COMPLÉMENT À L'ARTICLE : CH_0-TRIVIALITÉ D'HYPERSURFACES CUBIQUES PRESQUE DIAGONALES

par

J.-L. Colliot-Thélène

Certains des arguments de [**1**] admettent des variantes sur un corps de base autre que le corps des complexes.

Voici une variation sur la proposition 3.5 de l'article [**1**].

Proposition 0.1. — *Soient k un corps et X une k-variété projective et lisse telle que $H^1(X, O_X) = 0$, possédant un k-point. S'il existe une courbe Γ/k projective, lisse, connexe, avec un k-point, et un k-morphisme $\Gamma \to X$ tels que, pour tout corps F, l'application induite $CH_0(\Gamma_F) \to CH_0(X_F)$ soit surjective, alors, pour tout corps F, l'application $\deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, en d'autres termes la k-variété X est universellement CH_0-triviale.*

Démonstration. — Soit J la jacobienne de Γ. Pour tout corps F, on a $A_0(\Gamma_F) = J(F)$. Notons $K = k(X)$ le corps des fonctions de X. L'hypothèse $H^1(X, O_X) = 0$ implique que la variété d'Albanese de X est triviale. Un point de $J(k(X))$ définit une k-application rationnelle de X dans J, donc un k-morphisme de X dans J car une application rationnelle d'une variété lisse dans une variété abélienne est partout définie. Mais comme la variété d'Albanese de X est triviale, tout tel morphisme est constant. On a donc $J(k) = J(k(X))$. Ainsi l'image de $A_0(\Gamma_K)$ dans $A_0(X_K)$ est dans l'image de l'application composée

$$J(k) = A_0(\Gamma) \to A_0(X) \to A_0(X_K).$$

Par hypothèse, l'application $A_0(\Gamma_K) \to A_0(X_K)$ est surjective. Ainsi la restriction $CH_0(X) \to CH_0(X_K)$ est surjective, et en particulier la classe du point générique η de X, qui définit un point de $X(K)$, a une classe dans $CH_0(X_K)$ qui est dans l'image de $CH_0(X)$. D'après Merkurjev [**2**, Thm. 2.11], ceci assure que la k-variété X est universellement CH_0-triviale. $\square$

Soit k un corps de caractéristique différente de 3. Pour tout entier $n \geq 3$ impair, l'hypersurface cubique de Fermat $X_n \subset \mathbf{P}^n_k$, donnée par l'équation

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^3 = 0$$

est k-rationnelle, c'est-à-dire k-birationnelle à l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}_k$. Pour tout entier $n \geq 3$, l'hypersurface X_n contient une k-droite, et donc est k-unirationnelle de degré 2.

Les arguments de [**1**, Prop. 3.7 (i)] et la proposition ci-dessus permettent d'établir que, sur tout corps k de caractéristique zéro, pour tout entier $n \geq 3$, impair ou non, l'hypersurface cubique de Fermat est universellement CH_0-triviale.

Références

[1] J.-L. Colliot-Thélène, CH_0-trivialité d'hypersurfaces cubiques presque diagonales, à paraître dans Algebraic Geometry.

[2] A. S. Merkurjev, Unramified elements in cycle modules, J. London Math. Soc. (2) 78 (2008) 51–64.

---

20 septembre 2017

J.-L. Colliot-Thélène, Université Paris Sud, Université Paris-Saclay, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France