Cours de J.-L. Colliot-Thélène
Points rationnels sur les variétés non de type général

Orsay/IHP, 2ème semestre 1998/99.
Début du cours : 1er Février
Rédaction partielle et préliminaire, 5 mars.

Chapitre I : Classification birationnelle des surfaces

1. Préliminaires sur le groupe de Néron-Severi

Dans ce paragraphe, on passe en revue un certain nombre de résultats sur les diviseurs effectifs, amples, numériquement effectifs, dus à Nakai, Moishezon, Kleiman, Grothendieck.

La dualité entre le cône des courbes et le cône des classes de diviseurs nef est un ingrédient important des travaux de Mori.

Un certain nombre des résultats ici présentés admettent une généralisation en dimension supérieure à 2. En dimension 2, l'identification entre les sous-variétés de dimension 1 et sous-variétés de codimension 1 enrichit – et complique – la situation.

Soient k un corps et X une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe.

Sur le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ on a la forme d'intersection $\mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{Z}$, qui est symétrique et bilinéaire. On note $N(X) = Num(X)$ le quotient de $\mathrm{Pic}(X)$ par le sous-groupe des classes numériquement équivalentes à zéro. Le groupe $N(X)$ est un groupe libre de type fini (conséquence du théorème de Néron-Severi). La forme d'intersection $N(X) \times N(X) \to \mathbf{Z}$ n'a pas de noyau (mais le déterminant de la forme n'est pas forcément ± 1).

On sait ce qu'est un faisceau inversible ample. Ces faisceaux forment un semi-groupe dans $\mathrm{Pic}(X)$, il en est de même de leurs classes dans $N(X)$.

Un faisceau inversible L est dit numériquement effectif (en abrégé, nef) si pour toute courbe intègre $C \subset X$ on a $(L.C) \geq 0$. Ces faisceaux forment un semi-groupe dans $\mathrm{Pic}(X)$, il en est de même de leurs classes dans $N(X)$.

On note $N(X)_{\mathbf{Q}} = N(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et $N(X)_{\mathbf{R}} = N(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Un $\mathbf{Q}$-cône convexe dans un $\mathbf{Q}$-vectoriel est un sous-ensemble stable par addition et par multiplication par $\mathbf{Q}_{\geq 0}$. Un $\mathbf{R}$-cône convexe dans un $\mathbf{R}$-vectoriel est un sous-ensemble stable par addition et par multiplication par $\mathbf{R}_{\geq 0}$.

Le cône (convexe) des courbes $\mathrm{Ef}(X) \subset N(X)_{\mathbf{Q}}$ est par définition le semi-groupe engendré par les $\mathbf{Q}_{\geq 0}[C]$ pour $[C]$ la classe dans $N(X)$ d'une courbe intègre. C'est aussi l'ensemble des éléments de la forme $\lambda[D]$ avec $\lambda \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ et $[D]$ la classe d'une courbe effective.

On note $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$ le cône réel (stable par multiplication par $\mathbf{R}_{\geq 0}$) qui est l'adhérence de $\mathrm{Ef}(X)$ dans $N(X)_{\mathbf{R}}$.

Le cône (convexe) des diviseurs amples $\mathrm{Amp}(X) \subset N(X)_{\mathbf{Q}}$ est par définition le semi-groupe engendré par les (formé des) $\mathbf{Q}_{\geq 0}[H]$ pour $[H]$ la classe dans $N(X)$ d'un fibré inversible ample (on pourrait bien sûr remplacer ici "ample" par "très ample").

Pour tout $L \in \mathrm{Pic}(X)$ et tout $H \in \mathrm{Pic}(X)$ ample, on sait que $L + nH$ est ample pour $n >> 0$.

Le cône (convexe) $\mathrm{Nef}(X) \subset N(X)_{\mathbf{R}}$ est par définition le semi-groupe engendré par les (formé des) $\mathbf{R}_{\geq 0}[L]$ pour $[L]$ la classe dans $N(X)$ d'un fibré inversible numériquement effectif (nef). C'est par définition un cône fermé dans $N(X)_{\mathbf{R}}$. Pour $L \in \mathrm{Pic}(X)$, la propriété pour $[L]$ d'appartenir à $\mathrm{Nef}(X)$ ne dépend clairement que de la classe de $[L]$ dans $N(X)$. On dira qu'un diviseur, un faisceau inversible, une classe dans $\mathrm{Pic}(X)$ est nef si son image dans $N(X)$ l'est.

On a de façon évidente : $\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{Nef}(X)$.

Théorème 1.1 (Nakai-Moishezon) *Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L est ample
(ii) $(L.L) > 0$ et pour toute courbe intègre $C \subset X$, on a $(L.C) > 0$.
Que (i) implique (ii) est trivial. Pour la réciproque, voir Hartshorne, Algebraic Geometry. □
Ce théorème implique le fait non évident que pour $L \in \mathrm{Pic}(X)$, la propriété pour $[L]$ d'appartenir à $\mathrm{Amp}(X)$ ne dépend que de la classe de $[L]$ dans $N(X)$.

Proposition 1.2 *Soit $L, H \in N(X)_{\mathbf{Q}}$ avec L nef et H ample. Alors pour tout $a \in \mathbf{Q}, a > 0$, on a $L + aH \in \mathrm{Amp}(X)$.*
Démonstration On sait que pour $L + aH$ est ample pour $a >> 0$. Pour C courbe intègre, on a $(L + aH.C) = (L.C) + a(H.C) > 0$ pour tout $a > 0$ puisque $(L.C) \geq 0$ (L nef) et $(H.C) > 0$ (H ample).
Soit $a > 0, a \in \mathbf{Q}$. On a $(L + a/2H.L + a/2H) = (L.(L + aH) + a^2/4(H.H)$. Si $(L + aH$ est ample, alors $L.(L + aH) \geq 0$ car L est nef et donc $(L + a/2H.L + a/2H) > 0$. Le critère de Nakai-Moishezon appliqué à $L + a/2H$ montre alors que $L + a/2H$ est ample. En résume, pour $a > 0$, $L + aH$ ample implique $L + a/2H$ ample. Comme L ample implique $L + \varepsilon H$ ample pour tout $\varepsilon > 0$, ceci établit la proposition. □

Cet énoncé implique que tout élément de $\mathrm{Nef}(X) \subset N(X)_{\mathbf{R}}$ est limite d'éléments de $\mathrm{Amp}(X) \subset N(X)_{\mathbf{Q}}$. Comme la forme d'intersection est clairment continue sur $N(X)_{\mathbf{R}}$, et comme elle est (strictement) positive sur les éléments non nuls de $\mathrm{Amp}(X)$, on conclut :

Corollaire 1.3 *Si $L \in N(X)_{\mathbf{R}}$ est nef, alors $(L.L) \geq 0$.* □

Proposition 1.4 *Soit $L \in N(X)_{\mathbf{Q}}$ non nul. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $L \in \mathrm{Amp}(X)$
(ii) $(L.D) > 0$ pour tout D non nul dans $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$.
Démonstration
(a1) Si L est ample, alors $L.C > 0$ pour toute courbe effective, et donc $(L.D) \geq 0$ pour tout D dans $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$.
(a2) Supposons $(L.D) = 0$ pour un tel D. Soit $M \in N(X)$ tel que $(M.D) < 0$ (la forme d'intersection sur $N(X)_{\mathbf{R}}$ est non dégénérée). Alors $(nL + M.D) = (M.D) < 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ réel on peut écrire $M = M_1 + M_2$ avec $M_1 \in N(X)_{\mathbf{Q}}$ et $M_2 \in N(X)_{\mathbf{R}}$ petit. Pour n assez grand, on a $nL + M_1 \in \mathrm{Amp}(X)$ et donc $(nL + M_1.D) \geq 0$ d'après la partie (a1). Alors $0 > (M.D) = (nL + M.D) \geq (M_2.D)$. Pour M_2 suffisamment petit, on a une contradiction.
(b) Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$ avec $(L.D) > 0$ pour tout D non nul dans $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$. En particulier $(L.C) > 0$ pour tout toute courbe intègre. Soit H ample. Pour D non nul dans $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$, le quotient $(D.L)/(D.H) \in \mathbf{R}$ est bien défini d'après (a) et ce quotient n'est jamais nul par hypothèse. Il est invariant par multiplication par un réel dans $\mathbf{R}^*_{>0}$. Fixons une norme euclidienne sur $N(X)_{\mathbf{R}}$, et soit $\mathcal{C}$ la trace sur $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$ de la boule de rayon un. La fonction $D \mapsto (D.L)/(D.H)$ sur $\mathcal{C}$ prend les mêmes valeurs que sur $\overline{\mathrm{Ef}(X)} \backslash 0$. Elle est continue, strictement positive, et $\mathcal{C}$ est fermé borné, donc compact. Il existe donc $\varepsilon > 0$ qu'on peut prendre dans $\mathbf{Q}_{\geq 0}$ tel que $(D.L)/(D.H) \geq \varepsilon$ pour tout $C \in \overline{\mathrm{Ef}(X)} \setminus 0$. Alors $L - \varepsilon H$ est nef. Comme H est ample, il résulte de la proposition 1.2 que $L = L - \varepsilon H + \varepsilon H$ est ample. □

Corollaire 1.5 *Le cône ample est ouvert dans $N(X)_{\mathbf{Q}}$ (pour la topologie induite par celle de $N(X)_{\mathbf{R}}$. Sa fermeture dans $N(X)_{\mathbf{R}}$ est le cône nef.*
Démonstration On sait $\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{Nef}(X)$ (trivial) et l'on a vu que $\mathrm{Amp}(X)$ est dense dans $\mathrm{Nef}(X)$. Soit H ample. Soit $v_i, i = 1, ..., n$ une base de $N(X)_{\mathbf{Q}}$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{N(X)}_{\mathbf{R}}$ le compact évoqué ci-dessus. Sur $\mathcal{C}$, la fonction $C \mapsto (H.C)$ est supérieure à une constante c strictement positive, et chaque fonction $C \mapsto (v_i.C)$ est bornée. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_i \in \mathbf{Q}$ avec $0 \leq x_i < \varepsilon$ on ait $((H + \sum_i x_i v_i).C) > 0$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, et donc $(H + \sum_i x_i v_i)$ ample d'après la proposition 1.4. □

Proposition 1.6 *Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$ avec $(L.L) > 0$, et soit $H \in \mathrm{Pic}(X)$ une classe ample. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(L.H) > 0$;

(ii) il existe un entier $n > 0$ tel que $H^0(X, nL) \neq 0$.

Démonstration

(a) Soit $D > 0$ un diviseur effectif de classe nL. On ne peut avoir $D = 0$ car $(L.L) > 0$. Donc $D > 0$, et $(H.nL) = (H.D) > 0$, et donc $(H.L) > 0$.

(b) Supposons $(L.H) > 0$. Par dualité de Serre, la dimension de $H^2(X, nL)$ est la dimension de $H^0(X, K - nL)$. De $(H.K - nL) > 0$ pour $n >> 0$ on conclut que $H^0(X, K - nL) = 0$. Pour $n >> 0$, le théorème de Riemann-Roch donne alors

$$h^0(X, nL) \geq (nL.nL - K)/2 + \chi(X, O_X) > 0$$

car $(L.L) > 0$. $\square$

Ainsi pour $(L.L) > 0$ on a un critère numérique pour l'effectivité d'un multiple suffisamment grand de L. Inversement :

Corollaire 1.7 *Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$ tel que $(L.L) > 0$. Alors $(L.H) > 0$ pour un ample H implique $(L.H) > 0$ pour tout autre ample H.* $\square$

Théorème 1. 8 (Théorème de l'indice) *Soit $H \in N(X)$ une classe ample. Sur l'orthogonal de H dans $N(X)_{\mathbf{Q}}$, la forme d'intersection est définie négative.*

Démonstration Comme $(H.H) > 0$, donc $(H.H) \neq 0$, la forme d'intersection induit sur l'orthogonal de $\mathbf{Q}H \in N(X)_{\mathbf{Q}}$ une forme quadratique non dégénérée. Il suffit de démontrer que cette forme est négative ou nulle sur tout élément de cet orthogonal. Si ce n'était pas le cas, il existerait $L \in \mathrm{Pic}(X)$ avec $(L.H) = 0$ et $(L.L) > 0$. Pour un entier $r >> 0$, $L + rH$ est ample. On a $(L.L + rH) = (L.L) > 0$. Comme $(L.L) > 0$, le corollaire apliqué à L et au fibré ample $L + rH$ implique $(L.H) > 0$, contradiction. $\square$

Ainsi sur $N(X)_{\mathbf{R}}$, la forme quadratique est de type $(1, -1, \ldots, -1)$. On en déduit :

Corollaire 1.9 *Soit $L \in N(X)$ tel que $(L.L) > 0$. Soit $M \in N(X)$ tel que $(L.M) = 0$. Alors $(M.M) \leq 0$, et $(M.M) = 0$ si et seulement si $M = 0 \in N(X)$.* $\square$

Un autre outil dont on aura besoin est le critère de contractibilité de Castelnuovo, sur un corps de base parfait.

Proposition 1.10 (critère de contractibilité de Castelnuovo) *Soient k un corps parfait et X une k-surface projective, lisse et géométriquement connexe. Soit $C \subset X$ une courbe intègre. Si l'on a $(C.C) < 0$ et $(C.K) < 0$, alors C est une courbe exceptionnelle : il existe une k-surface Y projective, lisse et géométriquement connexe, et un k-morphisme birationnel $f : X \to Y$ envoyant Y sur un point fermé $P \in Y$, tel que l'on ait $C = f^{-1}(P)$ (au sens schématique) et que f induise un isomorphisme $X \setminus C \simeq Y \setminus P$.*

Démonstration Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soit $\overline{C} = \sum_{i=1}^{r} C_i$. Le groupe de Galois permute les C_i transitivement. On a $0 > (C.C) = \sum_i (C_i.C_i) + \sum_i (C_i. \sum_{j \neq i} C_j))$. Comme la forme d'intersection sur $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est invariante sous l'action du groupe de Galois, il existe un entier s avec $s = (C_i.C_i)$ pour tout i et un entier $t \geq 0$ avec $t = (C_i. \sum_{j \neq i} C_j))$ pour tout i. On a donc $0 > rs + st$, soit $s + t < 0$ et donc $r < 0$. Par ailleurs il existe un entier u avec $u = (C_i.K)$ pour tout i. On a $0 > (C.K) = ru$, d'ou $u < 0$. On a donc $(C_i.K) < 0$ et $(C_i.C_i) < 0$. La formule du genre arithmétique montre alors que C_i est isomorphe à $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ et qu'on a $s = (C_i.C_i) = -1$ et $(C_i.K) = -1$. On obtient alors $-1 + t < 0$, et donc $t = 0$. La courbe $\overline{C}$ est une union de courbes exceptionnelles gauches deux à deux. La méthode usuelle pour établir le critère de contractibilité de Castelnuovo permet alors de trouver un trouver un faisceau inversible dont le système linéaire associé définit le morphisme $X \to Y \subset \mathbf{P}_k^N$ requis. □

Un morphisme $X \to Y$ comme ci-dessus est appelé une contraction (élémentaire). L'application rationnelle inverse est appelée un éclatement (élémentaire). On a les faits suivants :

Tout k-morphisme $f : X \to Y$ k-birationnel de k-surfaces projectives, lisses, géométriquement connexes est un composé de contractions. Une k-surface est donc k-minimale (pour la relation de domination birationnelle parmi les k-surfaces projectives, lisses, géométriquement connexes) si et seulement si elle ne contient pas de courbe exceptionnelle (sur k). Il existe des k-surfaces minimales X telles que $X \times_K K$ ne soit pas minimal pour K/k extension convenable. Pour X, C et Y comme ci-desssus, on a $\mathrm{rang}(N(Y) = \mathrm{rang}(N(X)) - 1$. Ainsi étant donnée une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe, après un nombre fini de contractions, on obtient une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe k-minimale. On dit que Y est un k-modèle minimal de X. En général (même sur un corps algébriquement clos) il n'y a pas un k-modèle minimal unique (à k-isomorphisme près).

Théorème 1.11 (Théorème de rationalité) *Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe. Supposons que le faisceau canonique K n'est pas nef. Pour tout faisceau inversible ample H, le nombre*

$$b = b(H) = \sup\,\{t \in \mathbf{R},\ H + tK \text{ est nef}\}$$

est un nombre rationnel.

Démonstration (Kawamata, Miles Reid, Pelham Wilson, cf. C. Peters).

On a vu que le cône ample est l'ensemble des points rationnels de l'intérieur du cône nef, lequel est fermé. Il existe donc $b \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $H + tK$ est ample pour tout $t \in \mathbf{Q}_{>0}, t < b$, $H + bK$ est nef et $H + tK$ n'est nef pour aucun $t > b$.

Si $N(X)_{\mathbf{Q}}$ est de dimension un, alors $N(X)_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}[H]$. Le cône ample est $\mathbf{Q}_{>0}[H]$, le cône nef est $\mathbf{R}_{\geq 0}[H]$, come K n'est pas nef, on a $K = -cH$ avec $c \in \mathbf{Q}_{>0}$, et $b = 1/c \in \mathbf{Q}$. Supposons dorénavant $N(X)_{\mathbf{Q}}$ de dimension au moins 2.

Soient u, v des entiers positifs tels que $0 \leq (u-1)/v < b$. Alors $H + ((u-1)/v)K$ est ample. Soit $L = vH + (u-1)K \in \mathrm{Pic}(X)$. On a $h^1(K+L) = h^1(-L)$ et $h^2(K+L) = h^0(-L)$ par dualité de Serre. Comme L est ample, on a $h^0(-L) = 0$. Comme L est ample et k de caractéristique zéro, on a $h^1(-L) = 0$ d'après un théorème de Kodaira. Le théorème de Riemann-Roch donne alors $h^0(L + K) = \chi(L + K) = (L + K.L)/2 + \chi(O_X)$, soit pour tous u, v comme ci-dessus, $h^0(vH + uK) = P(v, u)$ avec $P(U, V) \in \mathbf{Q}[V, U]$ un polynôme quadratique en V et U, non nul. Pour p, q entiers naturels, le polynôme en une variable $P(Xq, Xp)$ est quadratique en X ou identiquement nul. S'il est identiquement nul, alors $P(V, U)$ est divisible par la forme linéaire $Vp - Uq$. Le polynôme $P(Xq, Xp)$ n'est donc identiquement nul que pour un nombre fini de couples (p, q).

Supposons $b \notin \mathbf{Q}$. Le sous-groupe $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}b$ de $\mathbf{R}$ est alors dense. Il existe donc (Dirichlet) une infinité de couples d'entiers naturels p, q (positifs) tels que

$$p/q - 1/3q < b < p/q.$$

Choisissons le couple (p, q) tel que le polynôme quadratique $P(Xq, Xp)$ n'est pas identiquement nul. On a donc $P(kq, kp) \neq 0$ pour au moins un k entier, $1 \leq k \leq 3$, que l'on fixe désormais. Posons $u = kp$ et $v = kq$. On a $(u-1)/v = p/q - 1/kq < b$, donc d'après ce que l'on a vu ci-dessus $0 \leq h^0(vH + uK) = P(v, u) \neq 0$. On conclut $h^0(vH + uK) > 0$, il existe un diviseur effectif $D = \sum_i n_j C_j$ avec $C_j \subset X$ courbe intègre et chaque n_j entier strictement positif, soit encore $H + (u/v)K = \sum_j a_j C_j$ avec $a_j \in \mathbf{Q}_{>0}$. On a donc $H + (u/v)K.C \geq 0$ pour toute courbe

C intègre distincte de l'une des courbes C_j. Comme on a aussi $H.C > 0$, on $H + tK.C \geq 0$ pour tout $0 < t \leq u/v$. pour chaque C_j, Le réel b coïncide donc avec le plus grand $t \in \mathbf{R}$ tel que $H + tK.C_j \geq 0$ pour chaque C_j. On a $H + (u/v)K.C_j < 0$ pour au moins un j, car $H + (u/v)K$ n'est pas nef, donc ce plus grand t est fini, et il est clairement rationnel. Ceci contredit l'hypothèse initiale . $\square$

2. Le théorème de classification des surfaces

Rappelons-en l'énoncé.

Théorème 2.1 (Castelnuovo, Enriques, ..., Manin, Iskovskih, Mori) *Soient k un corps de car. zéro, X une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe et $K = K_X \in \mathrm{Pic}(X)$ le faisceau canonique. Alors pour X, on a au moins des propriétés suivantes :*

(i) Il existe sur X une courbe exceptionnelle.

(ii) Le rang de $N(X)$ est un et le faisceau $-K$ est ample.

(iii) Le rang de $N(X)$ est 2, et X est une surface fibrée en coniques au-dessus d'une courbe Y projective, lisse, géométriquement connexe. Pour chaque point fermé $M \in Y$, de corps résidue $k(M)$, la fibre X_M est une $k(M)$-conique intègre.

(iv) Le faisceau K est nef, i.e. $(K.C) \geq 0$ pour toute courbe $C \subset X$.

Certaines surfaces sont à la fois du type (iii) et (i). A cette exception près, les propriétés ci-dessus sont exclusives l'une de l'autre.

Démonstration

Tout d'abord l'hypothèse (i) exclut les hypothèses (ii) et (iv). Une courbe exceptionnelle C satisfait $(C.K) < 0$. S'il existe une telle courbe sur X, on ne saurait être dans le cas (ii) (par exemple parce que le rang de $N(X)$ ne saurait chuter par contraction). On ne peut être dans le cas (iv) de façon évidente.

L'hypothèse (iv) exclut toutes les autres. Le cas (i) a déjà été vu. Dans le cas (ii), $-K$ est ample et donc K ne saurait être nef. Dans le cas (iii), la classe d'une fibre F satisfait $(F.K) < 0$.

Comme exemple de surface satisfaisant à la fois (i) et (iii), sur un corps algébriquement clos, le seul exemple est la surface $\mathbf{F}_1$ (éclaté de $\mathbf{P}^2$ en un point). Sur un corps k non algébriquement clos, il peut exister une surface cubique X/k possédant une droite k-rationnelle et telle que $\mathrm{Pic}(X)$ soit de rang 2. Une analyse détaillée des cas possibles est faite par Iskovskih (1979, Théorème 5).

Dans la suite de la démonstration, on suppose que X ne possède pas de courbe exceptionnelle et que K n'est pas nef.

Si $N(X)$ est de rang un, pour tout $L \in N(X)$, soit $L = 0$, soit L est ample, soit $-L$ est ample. Si K n'est pas nef, alors $-K$ est ample, et on est dans le cas (ii).

Supposons dorénavant que X est k-minimale, K non nef et le rang de $NS(X)$ au moins égal à 2. Il reste à montrer que l'on est alors dans le cas (iii).

Comme le rang de $N(X)$ est au moins 2, et que les faisceaux amples engendrent $\mathrm{Pic}(X)$, il existe une classe ample $H \in \mathrm{Pic}(X)$ dont la classe dans $N(X)$ n'appartient pas à la droite $\mathbf{R}[K] \in N(X)_{\mathbf{R}}$. Comme K n'est pas nef, on peut appliquer le théorème de rationalité : il existe $b \in \mathbf{Q}_{>0}$ tel que $H + tK$ est ample pour tout $t \in \mathbf{Q}_{>0}, t < b$, $H + bK$ est nef mais pas ample et $H + tK$ n'est nef pour aucun $t \in \mathbf{R}, t > b$. Soit $b = u/v$ avec $u > 0, v > 0$ entiers. Le faisceau inversible $L = vH + uK$ est nef mais pas ample. Comme faisceau nef, il vérifie $(L.L) \geq 0$ (voir §I).

Supposons d'abord $(L.L) > 0$. Comme L est nef mais pas ample, par le critère de Nakai-Moishezon, il existe une courbe intègre C telle que $(L.C) = 0$. De $(L.L) > 0$ et $(L.C) = 0$, et du théorème de l'indice on déduit $(C.C) \leq 0$, et $(C.C) = 0$ est exclu car cela impliquerait que C est numériquement nul, ce qui n'est pas, car on a $(H.C) > 0$. Ainsi $(C.C) < 0$. On a $0 = (L.C) = (H + bK.C)$. De $b > 0$ et $(H.C) > 0$ on déduit $(C.K) < 0$. On a donc $(C.C) < 0$ et $(C.K) < 0$, et C est une courbe exceptionnelle sur X, ce qu'on avait exclu.

On a donc $(L.L) = 0$. Comme L est nef, on a $(L.H) \geq 0$. Si on avait $(L.H) = 0$, alors d'après le théorème de l'indice on aurait $L = 0 \in N(X)$, et donc $H + bK = 0 \in N(X)$ ce qui est exclu par hypothèse (H et K sont indépendants). On a donc $(L.H) > 0$. Alors $0 = (L.L) = (H + bK.L) = (H.L) + b(K.L)$ et donc $(K.L) < 0$.

Pour tout $m > 0$ entier, le faisceau $mL - K$ est dans le cône ample. Ainsi $h^0(K - mL) = 0$, et par dualité de Serre $h^2(mL) = 0$. Le théorème de Riemann-Roch donne alors $h^0(mL) \geq (mL.mL - K)/2 + \chi(O_X) = -m(L.K)/2 + \chi(O_X)$.

De $(K.L) < 0$ on conclut $h^0(mL) > 0$ pour $m >> 0$. Quitte à remplacer L par mL, on a donc trouvé un faisceau inversible L nef mais pas ample, satisfaisant : $(L.L) = 0$, $(L.K) < 0$ et $h^0(L) \geq 2$.

Soit $\sum_i n_i C_i$ une section de L. Comme L est nef, on a $(L.C_i) \geq 0$. Mais de $(L.L) = 0$ on déduit alors $(L.C_i) = 0$. On a alors $(uH + vK.C_i) = 0$. Comme H est ample, on a $(H.C_i) > 0$ et donc $(K.C_i) < 0$. En résumé : pour toute composante C d'une section de L, on a $(C.K) < 0$. Cet argument vaut encore lorsque l'on passe de k à une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Ainsi, pour toute composante C d'une section de $M \otimes_k \overline{k}$, on a $(C.K) < 0$.

Le système linéaire des sections de L peut avoir une partie fixe. Soit Δ cette partie fixe. Par définition, Δ est le plus grand diviseur (avec multiplicités) contenu dans tout diviseur effectif de classe $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Soit $D \in \mathrm{Pic}(X)$ la classe de Δ, et soit M le faisceau inversible tel que $M + D = L$. Le système linéaire des sections de M n'a pas de composante fixe. Il en résulte que M est nef.

Comme L est nef, on a $(L.D) \geq 0$ et $(L.M) \geq 0$. On a $0 = (L.L) = (L.D) + (L.M)$. Ainsi $(L.D) = 0$ et $(L.M) = 0$. Comme M est nef, on a $(M.M) \geq 0$ et $(D.M) \geq 0$. Par ailleurs $0 = (L.M) = (M.M) + (D.M)$. Ainsi $(M.M) = 0$ et $(M.D) = 0$.

On a $0 = (L.M) = (vH + uK.M)$ avec $u > 0, v > 0$ entiers. On a $0 \leq (H.M)$. Si on avait $(H.M) = 0$, comme on a $(M.M) = 0$, du théorème de l'indice on conclurait que $M = 0 \in N(X)$. Mais alors $L = D$ et $h^0(L) = 1$, contradiction. Ainsi $(H.M) > 0$. De $0 = (L.M) = (vH + uK.M)$ on conclut $(K.M) < 0$.

Comme M est nef, si $\sum_i n_i C_i$ est un diviseur effectif section de M, de $(M.M) = 0$ on tire comme ci-dessus $(M.C_i) = 0$ pour toute composante intègre C_i. Ceci implique en particulier $(C_i.C_i) \leq 0$ pour chaque i. Le même argument avec L montre que $(L.C_i) = 0$ pour tout i. Ainsi $(H + bK.C_i) = 0$ et donc $(K.C_i) < 0$. On ne peut avoir $(C_i.C_i) < 0$ et $(K.C_i) < 0$, car il n' a pas de courbe exceptionnelle sur X. Ainsi, pour chaque i, on a $(K.C_i) < 0$ et $(C_i.C_i) = 0$.

Pour le faisceau inversible M, on a les propriétés : $(M.M) = 0$, $h^0(M) \geq 2$.

Soit $\sum_{i \in I} n_i C_i$ une section de M. De $(M.M) = 0$ on tire $(Y. \sum_{i \in I} n_i C_i) = 0$ et comme M est nef ceci impose $(M.C_i) = 0$ pour tout i. Pour tout i il existe par hypothèse une section Y_i de M ne contenant pas C_i. De $(Y_i.C_i) = 0$ on conclut que $Y_i \subset X$ ne rencontre pas C_i. Ainsi le système des sections $H^0(X, M)$ n'a pas de point base.

Il définit donc un k-morphisme de X dans un espace projectif. L'image Z de ce morphisme est de dimension au moins un, et il ne saurait être de dimension deux, car cela forcerait $(M.M) > 0$. Soit $X \to Y \to Z$ la factorisation de Stein du morphisme projectif $X \to Z$. Comme la factorisation de Stein est préservée par extension quelconque du corps de base et que X est lisse donc géométriquement normale, on conclut que la k-courbe propre, intègre, normale Y satisfait encore ces propriétés par passage de k à une clôture algébrique de k. Ainsi Y est une k-courbe projective, lisse, géométriquement intègre. Notons f le k-morphisme $X \to Y$.

Une fibre géométrique F_s de ce morphisme est une somme de composantes de sections de $L \otimes_k \otimes k$. Une telle fibre satisfait donc $(F_s.K) < 0$ (voir plus haut).

La fibre générique de f est une courbe projective, lisse, géométriquement intègre. Il en est donc de même des fibres géométriques F_s pout tout s dans un ouvert de Zariski non vide de $\overline{Y}$. Une telle fibre F_s satisfait $(F_s.F_s) = 0$ et, d'après ce qu'on a vu plus haut, $(F_s.K) < 0$. La formule du genre arithmétique d'une courbe montre que F_s est isomorphe à $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$, et que $(F_s.K) = -2$. Ainsi la fibre générale de f est une courbe lisse de genre zéro, et il en est donc de même de la fibre générique de f. Les fibres lisses de f sont donc des coniques.

Il reste à établir que toutes les fibres de f sont des coniques. Nous allons montrer plus précisément que ce sont des coniques intègres.

Par les propriétés de base de la factorisation de Stein, si M est un point fermé de Y et $F = X_M$ est la fibre en M, F est connexe. Ecrivons le diviseur F comme une somme $F = \sum_{i=1}^r a_i C_i$ avec a_i entier, $a_i \geq 1$ et chaque courbe C_i intègre. Comme F est une fibre, on a $(F.C) = 0$ pour toute composante verticale C d'une fibre. Supposons $r \geq 2$. On a $a_1(C_1.C_1) = (a_1 C_1.F - \sum_{i \geq 2} a_i C_i) > 0$, l'inégalité stricte provenant du fait que F est connexe. On trouve donc $(C_1.C_1) < 0$. Par ailleurs, comme établi plus haut, on a $(C_1.K) < 0$. Mais alors C_1 est une courbe exceptionnelle, ce qu'on avait exclu. Ainsi $r = 1$.

On a $F = aC$ avec C intègre et $a \geq 1$. Si l'on avait $a \geq 2$, cette propriété serait préservée sur $\overline{k}$: on aurait un point $s \in Y(\overline{k})$ dont la fibre F_s serait multiple. Mais la fibration $X \to Y$ étant une fibration en coniques sur une courbe, elle admet, par le théorème de Tsen, une section sur $\overline{k}$, et ceci exclut l'existence d'une fibre multiple. Ainsi $a = 1$, et l'on a montré que toute fibre $F = X_M$ pour M point fermé de Y est une courbe intègre.

Ceci établit que le rang de $N(X)$ est 2. En effet, la fibre générique X_η est une courbe lisse de genre zéro, donc son groupe de Picard est libre de rang un. Le noyau de la restriction $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_\eta)$ est engendré par les composantes des fibres de $X \to Y$ et par l'image réciproque de $\mathrm{Pic}(Y)$. Comme les fibres sont toutes intègres, ce noyau est engendré par l'image réciproque de $\mathrm{Pic}(Y)$ dans $\mathrm{Pic}(X)$. Deux classes de même degré dans $\mathrm{Pic}(Y)$ définissent des classes numériquement équivalentes dans $\mathrm{Pic}(X)$. Ainsi le rang de $N(X)$ est au plus deux, et en considérant une fibre F et une multisection de $X \to Y$, on voit que ce rang est exactement 2.

Soit $F = X_M$ une fibre au-dessus d'un point fermé M. La courbe intègre F satisfait $(F.F) = 0$ et $(F.K) < 0$. Comme k est parfait, le diviseur $\overline{F}$ se décompose sur $\overline{k}$ comme $\overline{F} = \sum_{i=1}^r F_i$, tous les F_i étant conjugués les uns des autres sous l'action du groupe de Galois. On a $(F_i.K) < 0$ pour tout i. Par invariance de la forme d'intersection sous l'action du groupe de Galois, il existe des entiers $s \geq 0$ et $t \geq 0$ avec $(F_i.F_i) = s$ et $(F_i.(\sum_{j \neq i} F_j) = t$ pour tout i. On a

$$0 = (X.X) = (\sum_i F_i.\sum_i F_i) = \sum_i (F_i.F_i) + \sum_i (F_i.(\sum_{j \neq i} F_j)) = rs + rt.$$

Ainsi $s+t = 0$. On a clairement $t \geq 0$, et donc $s \leq 0$. La formule du genre arithmétique appliquée à une courbe F_i montre alors que chaque F_i est isomorphe à $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$, et qu'il y a deux possibilités :

(a) $s = 0$, donc $t = 0$. Pour tout i, on a $(F_i.F_i) = 0$ et $(F_i.K) = -2$. Pour $j \neq i$, on a $(F_j.F_i) = 0$. Dans ce cas F est une courbe lisse intègre sur son corps de base $k(M)$, c'est une conique lisse.

(b) $s = -1$. On a, pour tout i, $(F_i.F_i) = -1$ et $(F_i.K) = -1$ (donc F_i est une courbe exceptionnelle sur $\overline{X}$). Le nombre de courbes F_i est pair, pour chaque i il existe un indice $j(i) \neq i$ et une seul tel que $F_j(i)$ rencontre F_i, et on a $(F_{j(i)}.F_i) = 1$. Dans ce cas, la fibre F sur le corps $k(M)$ est intègre, il existe une extension quadratique $K(M)$ de $k(M)$ sur laquelle F se décompose en deux droites conjuguées. La fibre $F/k(M)$ est bien une conique intègre. $\square$

Remarques.

(1) La lecture des textes sur ce sujet laisse l'impression qu'une fois fait le travail du §1, devrait se réduire à quelques arguments de géométrie des cônes convexes. La présente rédaction pêche autant que les précédentes en se laissant embarquer dans des arguments terre à terre.

(2) La démonstration donnée ci-dessus ne vaut qu'en caractéristique zéro. La raison en est que nous avons utilisé le "théorème de rationalité", lequel repose sur le théorème de Kodaira sur l'annulation de H^1. Mais le théorème vaut sur un corps quelconque : voir l'article original de Mori et le livre de Kollár.

Lemme 2.2 *Soit k un corps algébriquement clos, X_1 et X_2 deux k-surfaces projectives, lisses, connexes, et $f : X_1 \to X_2$ un k-morphisme birationnel, i.e. un composé déclatements. Notons K_i la classe canonique sur X_i. Soit $C_1 \subset X_1$ une courbe intègre dont l'image dans X_2 est une courbe (intègre) C_2. On a alors $(K_1.C_1) \geq (K_2.C_2)$.*

Démonstration Il suffit de démontrer l'énoncé lorsque f est l'éclaté en un unique point $P \in X_2$. Soit $E \subset X_1$ la courbe exceptionnelle image réciproque de P. Soit $m \geq 0$ la multiplicité de C_2 en P. On a $f^*(C_2) = C_1 + mE \in \mathrm{Pic}(X_1)$. Par ailleurs on a $K_1 = f^*(K_2) + E$. Enfin on sait que $f^* : \mathrm{Pic}(X_2) \to \mathrm{Pic}(X_1)$ est une injection qui préserve la forme d'intersection, et qu'on a la décomposition $\mathrm{Pic}(X_1) = f^*(\mathrm{Pic}(X_2)) \oplus \mathbf{Z}E$, orthogonale vis-à-vis de la forme d'intersection. On a donc

$$(K_1.C_1) = ((f^*K_2 + E).(f^*C_2 - mE)) = (K_2.C_2) + m,$$

ce qui établit l'énoncé. $\square$

Théorème 2.3 *Soit k un corps et X une k-surface telle que K_X est nef.*

(i) Sur toute extension K/k de corps, la K-surface X_K est K-minimale.

(ii) Si Y est une k-surface projective, lisse et géométriquement connexe, et si $f : Y \to X$ est une k-application rationnelle k-birationnelle, alors f est un k-morphisme.

(iii) Si X et X' sont des surfaces à faisceau canonique nef, toute k-application rationnelle $X \to X'$ est un isomorphisme.

(iv) Si une k-surface X n'est pas géométriquement birationnelle à une surface réglée, alors elle admet un k-modèle absolument minimal unique à k-isomorphisme près.

Démonstration

(i) C'est clair, car si K est nef il est aussi nef sur toute extension de corps, et il ne saurait y avoir de courbes exceptionnelles sur aucune extension.

(ii) Il suffit d'établir l'énoncé sur un corps algébriquement clos. Supposons que l'application rationnelle n'est pas un morphisme. On sait qu'il existe des morphismes birationnels, composés d'éclatements, $Z \to X$ et $Z \to Y$. Le morphisme $Z \to Y$ est un composé d'éclatements simples (en un seul point) $Z_i \to Z_{i+1}$, avec $Z = Z_0$, et $Z_n = Y$, avec $n \geq 1$. Soit $E \subset Z$ la courbe exceptionnelle de l'éclatement $Z_0 \to Z_1$. Si l'image de la courbe exceptionnelle E par $Z \to X$ est une courbe C, alors $-1 = (K_Z.E) \geq (K_Y.C)$, mais $(K_Y.C) \geq 0$ car K_Y est nef. Ainsi l'image de E par $Z_0 \to X$ est un point, et alors l'application rationnelle $Z_1 \to X$ est un morphisme. De proche en proche, on voit que $X \to Y$ est un morphisme.

(iii) et (iv) sont des conséquences évidentes.

Remarque Les propriétés ci-dessus sont en défaut pour les surfaces k-minimales des types (ii) et (iii) du théorème. C'est d'ailleurs ce qui fait la difficulté de l'arithmétique de ces surfaces.