Cours de J.-L. Colliot-Thélène
Orsay/IHP, 2ème semestre 1998/99.
Début du cours : 1er Février 1999

Points rationnels sur les variétés non de type général

Cours du 22 Mars 99. Rédaction partielle et préliminaire, 8 avril 1999.

Chapitre III : Questions d'unirationalité

Soit k un corps de car. zéro, soit $\overline{k}$ une clôture algébrique. Soit X une k-variété lisse géométriquement intègre. Soit $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. La question suivante est importante mais très difficile :

Si $\overline{X}$ est $\overline{k}$-unirationnelle, et si X possède un point k-rationnel, X est-elle k-unirationnelle ?

En dimension un, la réponse est immédiate (théorème de Lüroth) mais déjà en dimension deux on ne connaît pas la réponse.

Nous décrivons dans ce chapitre quelques cas connus d'unirationalité.

Proposition *Soit k un corps infini, soit X une k-variété algébrique intègre de dimension d, et soit $k(X)$ son corps des fonctions. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) Il existe un entier $n \in N$, un ouvert non vide $U \subset \mathbf{A}^n_k$ et un k-morphisme dominant $U \to X$.

(ii) Il existe un entier $n \in N$ et un k-plongement du corps $k(X)$ dans le corps transcendant pur $k(t_1, \ldots, t_n)$.

(iii) Il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbf{A}^d_k$ et un k-morphisme dominant $U \to X$.

(iv) Il existe un entier $n \in N$ et un k-plongement du corps $k(X)$ dans le corps transcendant pur $k(t_1, \ldots, t_d)$.

Démonstration Les énoncés (i) et (ii) sont trivialement équivalents, et il en est de même des énoncés (iii) et (iv). Il suffit de démontrer que (i) implique (iii). Ceci se fait par récurrence, en utilisant la notion de dimension.

La surface $y^2 + z^2 = x^3 - x$ sur le corps $\mathbf{F}_3$ satisfait (i), il n'est pas clair qu'elle satisfasse (iii) (voir Coray-Tsfasman, p. 31).

Il conviendrait donc de distinguer deux types de k-unirationalité ... Je propose k-unirationnel pour (iii) et faiblement k-unirationnel pour (i). Bien sûr il faudrait en car. positive aussi distinguer suivant que l'on a une application séparable ou non.

Théorème *Soit k un corps parfait ayant au moins 23 éléments. Soit $X \subset \mathbf{P}^4_k$ une intersection complète, géométriquement intègre de deux quadriques, régulière en codimension 1, non conique. Supposons qu'il existe un k-point lisse sur X. Alors X est k-unirationnelle de degré 2.*

Démonstration Lorsque X est lisse, la démonstration (Manin, Formes cubiques) est en deux étapes.

1) Si X possède un k-point rationnel non situé sur les courbes exceptionnelles, alors X est k-unirationnelle de degré 2 (Manin, Formes cubiques, IV.29.4 p. 158). La méthode consiste à éclater un tel k-point, ce qui donne une surface cubique équipée d'une k-droite L, et à considérer le pinceau des plans contenant cette droite, qui fait de la surface un fibré en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$ possédant une 2-section (la droite L).

Remarque : cette démonstration d'unirationalité rentre dans un cadre général, c'est la méthode pour démontrer (sur un corps algébriquement clos) que les intersections complètes suffisamment générales de degré petit par rapport à la dimension du projectif où elles sont, sont unirationnelles (Morin, Predonzan, Ramero, Paranjape-Srinivas, Harris-Mazur-Pandharipande,

X. Chen) : on commence par trouver un gros sous-espace linéaire sur la variété. Question : certaines de ces variétés sont-elles unirationnelles sur le corps de base, par exemple si ce corps est un corps de nombres totalement imaginaire ?

2) Ensuite, si k est assez gros, si $X(k)$ est non vide, alors X possède un point k-rationnel non situé sur une courbe exceptionnelle (Manin, Formes cubiques, IV.30.1 p. 162.)

Note : Dans la démonstration de ce théorème IV.30.1, à la page 163, Manin écrit "It is easy to see that there exists exactly one more pair of exceptional curves D_3, D_4 ...". Ceci est faux, mais la suite de l'argument est correct : il suffit de considérer d'emblée le système linéaire $-K - D_1 - D_2$.

On devrait pouvoir établir le théorème Manin IV.30.1 pour les dP_4 de la même manière que pour les dP_3. Il s'agit de montrer que sur un corps k parfait infini, si $X \subset \mathbf{P}^4_k$ est une dP_4, et si X possède un k-point, alors $X(k)$ est Zariski-dense. Le cas qui pose problème est celui où X possède un k-point M situé à l'intersection de deux courbes exceptionnelles (droites) conjuguées (et non définies sur k). Soit K/k l'extension quadratique correspondante. Alors $X_K = X \times_k K$ est K-rationnelle, et donc $R_{K/k}(X_K)$ est k-rationnelle. On considère alors l'application k-rationnelle de $R_{K/k}(X_K)$ vers X qui sur les k-points se lit : à un $R \in X(K)$ on associe le quatrième point d'intersection de X avec le 2-plan $\mathbf{P}^2_k$ engendré par R, son conjugué $\sigma(R)$ et M. VERIFIER (en passant à la clôture algébrique de k) que cette k-application k-rationnelle est bien définie sur un ouvert, et dominante (le cas est un peu special, puisque M est a l'intersection de deux courbes exceptionnelles). Ainsi X est dominée, sur k, par la k-variété k-rationnelle $R_{K/k}(X_K)$, et donc X est k-unirationnelle.

On peut aussi discuter ce cas en utilisant la proposition 4.8 de Coray-Tsfasman (Proc. London math. Soc. **57** (1988), qui décrit diverses surfaces k-birationnelles à une k-surface du type donné (vérifier les hypothèses sur le cardinal du corps de base, chez Coray-Tsfasman cela semble être simplement que l'ordre de k est au moins 5.)

Le cas où X est singulière, à singularités isolées, est discuté dans l'article de Coray et Tsfasman : Lemma 7.1 p. 74 (il conviendrait de discuter aussi les cas où X, non conique, a un lieu singulier de dimension un, montrer qu'alors X est k-birationnelle à une surface projective lisse avec $(K.K) \geq 5$).

Théorème *Soit k un corps, car.(k)=0. Soit $n \geq 4$ un entier. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une intersection complète, géométriquement intègre de deux quadriques, régulière en codimension 1. Supposons qu'il existe un k-point lisse sur X. Alors dans chacun des cas suivants :*
(i) X n'est pas un cône,
(ii) X est régulière en codimension deux,
la k-variété X est k-unirationnelle de degré 2.

Démonstration [CT/Sa/SwD], Crelle **373** (1987), Prop. 2.3. Elle se fait par réduction au cas de la dimension 2 (énoncé précédent). L'hypothèse de caractéristique zéro permet d'appliquer un théorème de Bertini dû à Kleiman.

Théorème *Soit k un corps parfait ayant au moins 37 éléments. Soit $X \subset \mathbf{P}^3_k$ une surface cubique, géométriquement intègre, non conique. Supposons qu'il existe un k-point lisse sur X. Alors X est k-unirationnelle de degré 6.*

Démonstration Lorsque X est lisse, la démonstration (Manin, Formes cubiques) est en deux étapes : si X possède un k-point rationnel non situé sur une courbe exceptionnelle, alors X est k-unirationnelle de degré 6 (Manin, Formes cubiques, IV.29.4 p. 158). Ensuite, si k est assez gros, si $X(k)$ est non vide, alors X possède un point k-rationnel non situé sur une courbe exceptionnelle (Manin, Formes cubiques, IV.30.1 p. 162.)

A la page 164 de Manin, ne peut-on voir que l'application $R_{K/k}(V_K)$ vers V est dominante en passant à la clôture algébrique ? La référence à 15.2 est incorrecte. C'est sans doute une référence à 15.1.3. (bas de la page 67).

Dans Manin, p. 163, on trouvera un exemple de surface cubique sur le corps $\mathbf{F}_4$ dont on ne connaît pas l'unirationalité.

Le cas où X n'est pas lisse est traité par Coray-Tsfasman (Lemma 1.1, Lemma 1.2, Prop. 3.2 ; voir aussi Thm. 1.3).

Théorème *Soit k un corps, car.(k)=0. Soit $n \geq 3$ un entier. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une hypersurface cubique géométriquement intègre, régulière en codimension 1, non conique. Supposons qu'il existe un k-point lisse sur X. Alors la k-variété X est k-unirationnelle.*

Démonstration [CT/Sa/SwD], Crelle **373** (1987), Remark 2.3.1. Elle se fait par réduction au cas de la dimension 2 (énoncé précédent). L'hypothèse de caractéristique zéro permet d'appliquer un théorème de Bertini dû à Kleiman. VOIR cette démonstration (non explicitée dans loc. cit. Pour un énoncé un peu plus faible, mais en toute caractéristique, voir Manin, Thm. 12.11.

Proposition *Soit k un corps parfait infini, et soit X une k-variété projective géométriquement intègre équipée d'un k-morphisme dominant f vers $\mathbf{P}^1_k$. Supposons que la fibre générique X_η de f soit une $k(\mathbf{P}^1)$-variété de Severi-Brauer, et soit $A \in \mathrm{Br}(k(\mathbf{P}^1))$ la classe associée à cette variété de Severi-Brauer. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) X est k-unirationnelle ;

(ii) il existe un k-morphisme $g : \mathbf{P}^1_k \to X$ tel que $f \circ g : \mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$ soit dominant ;

(iii) il existe un k-morphisme dominant $h : \mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$ induisant une inclusion $h^* : K_1 = k(\mathbf{P}^1) \subset K_2 = k(\mathbf{P}^1)$ telle que $h^*(A) = 0 \in \mathrm{Br}(K_2)$;

(iv) il existe un k-morphisme dominant $h : L_2 = \mathbf{P}^1_k \to L_1 = \mathbf{P}^1_k$ induisant une inclusion $h^* : K_1 = k(\mathbf{P}^1) \subset K_2 = k(\mathbf{P}^1)$ telle qu'on ait les deux propriétés :

(iv.a) la classe $h^*(A) \in \mathrm{Br}(K_2)$ est non-ramifiée,

(iv.b) il existe un k-point $M \in L_2(k)$ tel que la classe $A \in \mathrm{Br}(K_1)$ soit non ramifiée au point $h(M)$ et $(A(h(M)) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$. $\square$

Remarque. Lorsque X/k est lisse, on peut montrer que (iv.b) se traduit par : il existe un k-point $M \in L_2(k)$ tel que la fibre de $X \to \mathbf{P}^1_k$ en $h(M)$ soit lisse et possède un k-point.

Soit $X \to \mathbf{P}^1_k$ comme dans l'énoncé du théorème ci-dessus, et supposons que X possède un point k-rationnel lisse. C'est une question ouverte de savoir si les conditions équivalentes de la proposition sont alors satisfaites. Nous allons établir qu'il en ainsi dans deux cas particuliers.

Un résultat de Mestre.

Nous donnons, en caractéristique zéro, une démonstration "naturelle" du théorème suivant, dû à Mestre.

Théorème *Soit k un corps,* car.$(k) = 0$. *Soit A une $k(t)$ algèbre simple centrale, d'exposant 2 dans le groupe de Brauer de $k(t)$. Si la somme r des k-degrés des points fermés M de $\mathbf{P}^1_k$ avec $\partial_M(A) \neq 0$ est égale à 4, et si $A(t_0) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$ en un k-point où A a bonne réduction, alors il existe un k-plongement $K_1 = k(t) \subset K_2 = k(s)$ tel que $A \otimes_{K_1} K_2 = 0 \in \mathrm{Br}(K_2)$.*

Démonstration La première partie de la démonstration que nous présentons n'utilise pas l'hypothèse que $r = 4$.

On utilise ici la théorie des résidus des algèbres simples centrales.

On peut supposer que A a bonne réduction en ∞, et a une fibre nulle en ce point. Soient $M_1, \ldots, M_n \in \mathbf{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$ les points fermés M avec $\partial_M(A) \neq 0$. Pour tout tel point fermé, soit $\alpha_M \in k(M)^*$ un représentant du résidu $\partial_M(A) \in H^1(k(M), \mathbf{Z}/2) = k(M)^*/k(M)^{*2}$. Soit $p(t) \in k[t]$ un polynôme unitaire séparable tel que $k[t]/p(t) = \prod_i k(M_i)$, et soit $r(t) \in k[t]$ un polynôme de degré strictement plus petit que $p(t)$ de classe la famille $\alpha_{M_i} \in \prod_i k(M_i)$. Notons $\theta \in k[t]/p(t) = \prod_i k(M_i)$ la classe de t.

On introduit alors la k-variété définie par le système d'équations

$$(**) \qquad u - \theta v = (\sum_{i=0}^{r-1} u_i \theta^i)^2 - r(\theta)(\sum_{i=0}^{r-1} v_i \theta^i)^2.$$

(On développe l'équation suivant les puissances de θ, et on annule les coefficients de chaque puissance de θ.)

On considère l'ouvert W de la k-variété ci-dessus défini par $(u, v) \neq (0, 0)$. C'est une k-variété lisse. c'est un ouvert d'un cône épointé ayant pour base une k-variété $V \subset \mathbf{P}_k^{2r-1}$ intersection complète de $r - 2$ quadriques dans $\mathbf{P}_k^{2r-1}$, intersection géométriquement intègre et qui n'est pas un cône. Cette variété V n'a que des singularités isolées . Pour toutes ces propriétés, voir [CT/Sa Descente II], Prop. 2.6.3.

On dispose du k-morphisme $q : W \to \mathbf{P}_k^1$ envoyant le point $(u, v, u_O, \ldots, u_{r-1}, v_0, \ldots, v_{r-1})$ sur le point de coordonnées homogènes $(u, v) \in \mathbf{P}_k^1$. Ce morphisme est dominant.

Lemme *L'image réciproque $q^*(A) \in \mathrm{Br}(k(W))$ est nulle.*
Démonstration Commençons par montrer

$$A(t) = \mathrm{Cores}_{k(\theta)(t)/k(t)}(t - \theta, r(\theta)).$$

Dans cette formule, $t - \theta$ et $r(\theta)$ sont vus comme des éléments de $k(\theta)(t)^*/k(\theta)(t)^{*2} = H^1(k(\theta)(t), \mathbf{Z}/2)$, éléments dont on prend le cup-produit. Pour établir cette formule, au vu de la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(t)) \to \oplus_{M \in \mathbf{P}_k^1} H^1(k(M), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0$$

(on se restreint à la torsion première à la caractéristique, la somme directe porte sur les points fermés de $\mathbf{P}_k^1$), il suffit de vérifier que les résidus des deux membres sont nuls, et que l'évaluation au point à l'infini est triviale pour le second membre. Nous renvoyons à [CT/SwD Crelle **453** (1994)], §1 pour des références. De la suite exacte ci-dessus on déduit $\mathrm{Cores}_{k(\theta)/k}(r(\theta)) = 1 \in k^*/k^*2 \subset H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

On a alors

$$q^*(A) = \mathrm{Cores}_{k(\theta)(t)/k(t)}((u/v) - \theta, r(\theta))$$

donc

$$q^*(A) = \mathrm{Cores}_{k(\theta)(t)/k(t)}(u - \theta v), r(\theta)) - \mathrm{Cores}_{k(\theta)(t)/k(t)}(v, r(\theta)).$$

On a $\mathrm{Cores}_{k(\theta)(t)/k(t)}(v, r(\theta)) = (v, \mathrm{Cores}_{k(\theta)/k}(r(\theta))$ par la formule de projection, et on a vu ci-dessus $\mathrm{Cores}_{k(\theta)/k}(r(\theta)) = 1 \in k^*/k^*2$. Notons $A(\theta) = \sum_{i=0}^{r-1} u_i \theta^i$ et $B(\theta) = \sum_{i=0}^{r-1} v_i \theta^i$. On adonc

$$q^*(A) = \mathrm{Cores}_{k(\theta)(t)/k(t)}(A(\theta)^2 - r(\theta)B(\theta)^2, r(\theta)).$$

Mais on a $(A(\theta)^2 - r(\theta)B(\theta)^2, r(\theta)) = 0$ par des propriétés élémentaires du cup-produit (formule $(x, 1 - x) = 0$). Ainsi la classe de $q^*(A)$ sur la k-variété lisse W est-elle triviale. □

Pour établir l'énoncé voulu, il "suffit" donc de trouver une k-application rationnelle de $\mathbf{P}_k^1$ vers W telle que la composée avec la projection $W \to \mathbf{P}_k^1$ soit dominante.

Observons que la k-variété lisse W possède un k-point rationnel évident, le point donné par $(u, v) = (1, 0); u_0 = 1$ et toutes les autres coordonnées égales à zéro. Ce point étant situé dans l'ouvert $(u, v) \neq (0, O)$ a pour projection un k-point lisse sur V.

Supposons désormais $r = 4$. Alors la k-variété $V \subset \mathbf{P}^7_k$ est une intersection de deux quadriques géométriquement intègres, non conique, régulière en codimension un, et possédant un point k-rationnel lisse. Si car(k)=0, ceci implique (théorème .. ci-dessus) que V est k-unirationelle, et il en est donc de même de V, qui est k-birationnelle à $\mathbf{P}^1_k \times_k V$. Il n'y a donc aucune difficulté à trouver une k-application rationnelle de $\mathbf{P}^1_k$ vers W telle que la composée avec la projection $W \to \mathbf{P}^1_k$ soit dominante et que de plus A ait bonne réduction au ppoint générique de l'image de $\mathbf{P}^1_k$ dans W. □

Remarques

1) Lorsque A est la classe d'une algèbre de quaternions, le résultat ci-dessus est une conséquence de la k-unirationalité des fibrés en coniques d'invariant 4 (conséquence des travaux de Manin et Iskovskikh vers 1970.)

2) Question : pour A d'exposant 2 mais d'indice plus grand que 2, quel est le lien entre (**) et les torseurs universels sur un modèle projectif et lisse de la variété de Severi-Brauer (avec dégénérescences) $X/\mathbf{P}^1_k$ associée à $A/k(t)$?

3) Esquissons la méthode de Mestre (CRAS **319** (1994), 529-532) (cas $r = 4$). Elle consiste à exhiber une k-application rationnelle explicite de $\mathbf{A}^1_k$ vers W. Il utilise pour cela le lemme, qui se démontre en extrayant une racine carrée du développement de $p(x)$ en $x = \infty$.

Lemme (Mestre) *Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit $p(x)$ un polynôme unitaire de degré $2n$. Il existe un unique polynôme unitaire $g(x)$ de degré n tel que le degré du polynôme $p(x) - g(x)^2$ soit strictement plus petit que n.*

Lorsque $2n = 4$, le polynôme $p(x) - g(x)^2$ est donc linéaire en x. Mestre applique alors cet énoncé au polynôme $p(t) + u^2 r(t)$ (avec p et r comme dans la démonstration ci-dessus) sur le corps $k(u)$. On obtient un développement

$$p(t) + u^2 r(t) = g(u,t)^2 + a(u)t - b(t)$$

dans $k[u,t]$. (Envoyant $k[t]$ dans $k[t]/p(t) = k(\theta)$, on obtient

$$u^2 r(\theta) = g(u,\theta)^2 + a(u)\theta - b(u) \in k(\theta)[u]$$

soit encore

$$b(u) - a(u)\theta = g(u,\theta)^2 - r(\theta)u^2,$$

ce qui définit bien un k-morphisme $\mathbf{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[u]) \to W$. Il convient alors de vérifier que le morphisme est suffisamment bien placé, ce que fait Mestre de faqn explicite. Sa méthode a l'avantage de fournir le changement de variables $K_1 = k(t) \subset K_2 = k(s)$ de manière totalement explicite. Elle vaut sur tout corps de caractéristique différente de 2.

4) Mestre démontre des résultats analogues dans deux autres cas : celui où $r = 5$ et celui où $r = 8$ et le résidu est constant. Lorsque $r = 5$ et A est une algèbre de quaternions, le résultat suit est déjà une conséquence de l'article d'Iskovskih (Math. USSR Izv. **14** (1980)) puisqu'alors le fibré en coniques correspondant est une k-surface cubique (équipée d'une droite k-rationnelle.) Peut-on établir la k-unirationalité de l'intersection de 3 quadriques dans $\mathbf{P}^9_k$ définie par $(**)$ dans ce cas ? Certaines intersections de trois quadriques apparaissent dans [Skoro, Sém. de théorie des nombres, 1990] et dans [Salb/Skoro]. Le cas $r = 8$ traité par Mestre est fort mystérieux.

5) Un autre point de vue géométrique sur les constructions de Mestre apparaît dans la thèse de Cornillon (Caen).

Un résultat de Yanchevskiĭ.

Proposition *Soit k un corps de caractéristique zéro muni d'une valuation hensélienne. Soit $\{M_i\}_{i=1,\ldots,n}$ une famille finie de points fermés de la droite affine $\mathbf{A}^1_k$. Soit K_i le corps résiduel de M_i. Soit K/k une extension finie de corps. Il existe un k-morphisme dominant $h : L_2 = \mathbf{P}^1_k \to L_1 = \mathbf{P}^1_k$ tel que $h(\infty) = \infty$ et que pour tout M_i et tout point fermé $N \in h^{-1}(M_i)$, on ait un k-plongement de K dans le corps résiduel $k(N)$.*

Démonstration Soit π une uniformisante de k. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. La valuation hensélienne de k s'étend de façon unique à $\overline{k}$. Soit $r(s) \in k[s]$ un polynôme unitaire irréductible tel que $K = k[s]/r(s)$.

Soit $L_1 = \mathbf{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$. Soit $\theta_i \in K_i$ l'image de t par l'homomorphisme naturel $k[t] \to K_i$. On a donc $K_i = k(\theta_i)$. Soit N un entier assez grand (à déterminer au cours de la démonstration). On définit un k-morphisme $h_N : L_2 = \mathrm{Spec}(k[s]) \to L_1 = \mathbf{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$ par son comorphisme $h_N^* : k[t] \to k[s]$ envoyant t sur $r(s)/\pi^N$. Ce morphisme s'étend en un k-morphisme $\mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$ envoyant ∞ sur ∞. La fibre de ce morphisme en le point M_i est le spectre de l'anneau $K_i[s]/(r(s) - \pi^N\theta_i)$. Comme $r(s)$ est séparable, du lemme de Krasner résulte que si N est suffisamment grand, alors la K_i-algèbre $K_i[s]/(r(s) - \pi^N\theta_i)$ est K_i-isomorphe à $K_i(s)/r(s)$. On dispose de l'homomorphisme de k-algèbre

$$K = k[s]/r(s) \to K_i(s)/r(s) \simeq K_i[s]/(r(s) - \pi^N\theta_i) = \prod_j K_i(N_j)$$

où N_j parcourt l'ensemble des points fermés de L_2 avec $h_N(N_j) = M_i$. Pour chaque tel N_j, on a donc bien une inclusion $K \subset K_i(N_j) = k(N_j)$. $\square$

Le même argument vaut pour un corps muni d'une valeur absolue ayant la propriété de prolongement unique (corps réel clos, corps complet).

Théorème *Soit k un corps de caractéristique zéro muni d'une valuation hensélienne. Soit X une k-variété projective et lisse géométriqument intègre munie d'un k-morphisme surjectif $f : X \to \mathbf{P}^1_k$. Supposons que la fibre en un k-point M soit lisse et possède un k-point rationnel, et supposons que le morphisme f ait toutes ses fibres géométriquement scindées (i.e. toute fibre possède une composante de multiplicité un). Il existe alors un changement de base $h : L_2 = \mathbf{P}^1_k \to L_1 = \mathbf{P}^1_k$ tel que le produit fibré $Y = X \times_{L_1} L_2$ soit lisse sur k, possède un k-point dans une fibre lisse, et que le morphisme $Y \to L_2$ soit scindé, i.e. que toute fibre de $Y \to L_2$ au-dessus d'un point fermé possède une composante de multiplicité un géométriquement intègre.*

Théorème (Yanchevskiĭ) *Soit k un corps de caractéristique zéro muni d'une valuation hensélienne. Soit X une k-variété projective et lisse géométriquement intègre possédant un point k-rationnel et munie d'un k-morphisme surjectif $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ à fibre générique une $k(\mathbf{P}^1)$-variété de Severi-Brauer de dimension d. Il existe alors un changement de base $h : L_2 = \mathbf{P}^1_k \to L_1 = \mathbf{P}^1_k$ tel que le produit fibré $Y = X \times_{L_1} L_2$ soit lisse sur k soit birationnel, au-dessus de L_2, à $\mathbf{P}^d_k \times_k L_2$. En particulier, X est k-unirationnelle.*

On commence par pousser le point k-rationnel dans une fibre lisse. On utilise le théoème précédent et le fait qu'une algébre simple centrale sur $k(s)$ à résidus triviaux et de fibre trivale en un k-point est triviale.

Un corps k est dit épais si sur toute k-courbe lisse intègre possédant un point k-rationnel, les k-points sont Zariski-denses.

Comme exemple de corps épais, citons : un corps muni d'une valaution hensélienne, un corps réel clos, un corps tel que son groupe de Galois absolu soit un pro-p-groupe, le corps des nombres algébriques totalement réels, le corps des nombres algébriques totalement p-adiques, un sous-corps infini d'une clôture algébrique d'un corps fini (dans ce dernier cas, ceci est une conséquence des estimations de Lang-Weil). Le corollaire suivant a été observé par Gabber.

Corollaire *Soit k un corps épais de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective et lisse géométriquement intègre possédant un point k-rationnel et munie d'un k-morphisme surjectif $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ à figre générique une $k(\mathbf{P}^1)$-variété de Severi-Brauer de dimension d. Il existe alors un changement de base $h : L_2 = \mathbf{P}^1_k \to L_1 = \mathbf{P}^1_k$ tel que le produit fibré $Y = X \times_{L_1} L_2$ soit lisse sur k et soit birationnel, au-dessus de L_2, à $\mathbf{P}^d_k \times_k L_2$. En particulier, X est k-unirationnelle.*

Démonstration Comme k est épais, on peut supposer que le point k-rationnel est situé dans une fibre lisse et que l'image de ce point dans $\mathbf{P}^1_k$ est le point $\infty \in \mathbf{P}^1_k$. On introduit le corps K hensélisé de l'anneau local de $\mathbf{P}^1_k$ en ∞.Du théorème précédant il résulte qu'il existe une K-application rationnelle dominante $\mathbf{P}^{d+1}_K \to X \times_k K$. Le corps K est limite inductive d'anneaux de k-courbes affines intègres lisses (donc de type fini) C équipées d'un k-point M_C et d'un k-morphisme étale $C \to \mathbf{P}^1_k$ envoyant M_C sur ∞. Il existe donc une telle courbe C et une k-application rationnelle dominante de $\mathbf{P}^{d+1}_k \times_k C$ vers $X \times_k C$. Comme le corps k est épais, les points k-rationnels sont denses sur C et on peut spécialiser cette application en une k-application rationnelle dominante de $\mathbf{P}^{d+1}_k$ vers X.

Remarques

1) Lorsque k est une extension algébrique infinie d'un corps fini, on trouve une version de ce résultat dans une note de Voronovich et Yanchevskiĭ (1986). La note de Mestre CRAS **322** (1996) 423-426 (cas des algèbres d'exposant deux) peut être interprétée comme une version effective de ce résultat.

2) L'ancêtre du résultat de Yanchevskiĭ est la remarque d'Iskovskikh que toute $\mathbf{R}$-surface rationnelle fibrée en coniques et possédant un $\mathbf{R}$-point est $\mathbf{R}$-unirationnelle. On se ramène au cas d'une surface donnée par une équation affine $y^2 + z^2 = \prod_i (x - e_i)$, et on fait un changement de variable $x = u^2 + b$ avec $b \in \mathbf{R}$ tel que $b - e_i > 0$ pour chaque i.

Liste des énoncés d'unirationalité pour les surfaces rationnelles.

Théorème *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement intègre $\overline{k}$-rationnelle. Supposons $X(k) \neq \emptyset$.*

(i) Si $(K.K) \geq 5$, alors X est k-rationnelle.

(ii) Si $(K.K) = 4$ ou $(K.K) = 3$, alors X est k-unirationnelle.

(iii) (?) Si $(K.K) = 2$ et X possède un point k-rationnel non situé sur une courbe exceptionnelle, alors X est k-unirationnelle.

(iv) (?) Si X est une surface fibrée en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$, si $(K.K) = 1$ et X possède un k-point non situé sur une courbe exceptionnelle, alors X est k-unirationnelle.

Démonstration Le cas (i) est mis pour mémoire, il a été établi au chapitre 4.

Lorsque $(K.K) = 4$, et que X est k-minimale, alors X est soit une surface de Del Pezzo de degré 4 soit une surface fibrée en coniques d'invariant $r = 4$ (quatre fibres géométriques singulières). Dans le premier cas, on a vu plus haut que X est k-unirationnelle. Dans le second cas, si X n'est pas simultanément une surface de Del Pezzo, alors on peut montrer que c'est une surface de Châtelet. La k-unirationalité de telles surfaces est établie dans [CT/Sa/SwD Crelle **373**] sous une forme très précise, elle peut être établie de nombreuses autres façons, voir l'article d'Iskovskih (1979) ou la description ci-dessus du résultat de Mestre.

Lorsque $(K.K) = 3$, alors X est une k-surface cubique lisse, on a vu la k-unirationalité ci-dessus.

Lorsque $(K.K) = 2$ et que X est une surface de Del Pezzo possédant un k-point rationnel non situé sur une courbe exceptionnelle, la k-unirationalité est établie par Manin dans Formes cubiques, Thm. 29.4. Le principe est le même que pour la démonstration de la k-unirationalité des surfaces cubiques. On montre qu'il existe une unique k-courbe géométriquement intègre k-rationnelle $C \subset X$, k-birationnelle à $\mathbf{P}^1_k$, passant par le k-point M donné, et dont le transformé propre par l'éclatement $X' \to X$ en $P \in X$ a pour classe $-2K_{X'} - E$, où $E \subset X'$ est la courbe excpetionnelle. Puis on paramètre C et on itère la construction.

Il conviendrait d'écrire en détail le cas des surfaces fibrées en coniques avec $(K.K) = 2$ et $(K.K) = 1$ (ce qui explique les points d'interrogation laissés dans l'enoncé). Sous l'hypothèse qu'il y a suffisamment de points k-rationnels sur X, peut-on par une succession d'éclatements et de contractions dans les fibres de $X \to \mathbf{P}^1_k$ ramener X à être simultanément une surface de Del Pezzo et une sruface fibrée en coniques ? Sous réserve de vérification de l'article d'Iskovskih (1979) cela impliquerait alors que X est une surface fibrée en coniques de deux manières différentes : mais alors X serait clairement k-unirationnelle. $\square$

Remarques

1) Le cas des surfaces de Del Pezzo de degré 1 est largement ouvert. Toute telle surface possède un k-point, le point base du système anticanonique (sections de $-K$). Les k-points sont-ils toujours Zariski-denses ?

A ce sujet, notons les jolies formules, communiquées par J.-F. Mestre il y a quelques années :

$$x^5 - (x^2 + x)^3 + (x^3 + x^2 + x - 1/2)^2 = -x + 1/4.$$

$$x^5 + (-x^2 - x/3 - 1/3)^3 + (x^3 + 2x/3 + 19/54)^2 = 29x/81 + 253/2916$$

qui permettent aussi de trouver une solution avec X, Y, Z dans $\mathbf{Q}(x)$ pour toute équation

$$aX^5 + bY^3 + cZ^2 = x \qquad (a, b, c \in \mathbf{Q}, \quad abc \neq 0).$$

Ces formules disent que certaines $\mathbf{Q}(x)$-surfaces de del Pezzo de degré 1 ont des $\mathbf{Q}(x)$-points rationnels non triviaux.

2) Le cas des surfaces fibrées en coniques avec $r \geq 8$ est ouvert, le seul résultat général étant celui de Mestre pour $r = 8$ (résidus constants). Sur un corps de nombres, la conjecture de Schinzel implique que si point rationnel il y a, alors les points rationnels sont Zariski-denses.