Non rationalité stable d'hypersurfaces de Fano

Jean-Louis Colliot-Thélène
(CNRS et Université Paris-Saclay)

Groupe de travail d'Orsay
(en ligne)
Mardi 2 février 2021

Artin-Mumford Proc London Math Soc 1972
Saltman Inv math 1984
CT-Ojanguren Inv math 1989
Kollár JAMS 1995
Voisin 2013, Inv math 2015
CT-Pirutka 2014, Ann Sc ENS 2016
Totaro JAMS 2016
....
Chatzistamatiou-Levine ANT 2017 Degré minimum d'unirationalité
Hassett-Pirutka-Tschinkel Acta Math. 2018
Schreieder1 DMJ 2019 Fibrés en quadriques sur $\mathbb{P}^n$
Schreieder2 ANT 2018 Fibrés en surfaces quadriques sur $\mathbb{P}^2$
Schreieder3 JAMS 2019 Hypersurfaces de basse pente
Schreider4 ANT 2020 Degré minimum d'unirationalité
Springer UMILN 26

Décider si certaines variétés qui sont proches d'être rationnelles (variétés unirationnelles, variétés rationnellement connexes) sont rationnelles, stablement rationnelles. On s'intéresse ici à la non-rationalité stable.

Invariants birationnels qui sont triviaux sur les variétés projectives et lisses X stablement rationnelles sur un corps k de car. zéro.

$H^0(X, \Omega^{\otimes r}) = 0$ pour $r > 0$. Vrai aussi si X sép. rationnellement connexe.

Sur $k = \mathbb{C}$, $H^3_{Betti}(X, \mathbb{Z})_{tors=0}$

$\mathrm{Br}(k) \simeq \mathrm{Br}(X) := H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m)$

$H^i(k, \mathbb{Z}/n) \simeq H^i_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Z}/n)$ (cohomologie galoisienne des corps)

et de même avec d'autres coefficients, e.g. $\mu_n^{\otimes j}$ or $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$

Artin-Mumford 1972

Plusieurs versions birationnelles (singulières)

• Revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une surface quartique avec 10 points singuliers ordinaires.

• Fibrés en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^2$ dont le lieu de ramification est la réunion de deux courbes cubiques lisses transverses, et il existe une conique lisse tritangente à chacune des cubiques.

Artin-Mumford, calcul de $H^3_{Betti}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{tors} \neq 0$ pour un modèle projectif non singulier $X/\mathbb{C}$ explicite.

Pour $X/\mathbb{C}$ une variété projective, lisse, connexe, le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ est une extension de $H^3_{Betti}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{tors}$ par le groupe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_2-\rho}$ (Grothendieck), et $b_2 - \rho = 0$ si et seulement si $H^2(X, O_X) = 0$, ce qui est le cas si X est rationnellement connexe.

Saltman (1984), Bogomolov (1987)
Comment calculer $\mathrm{Br}(X)$ pour une variété projective et lisse X quand on n'a pas un modèle explicite de X ?
Utiliser les résidus en les anneaux de valuation discrète du corps des fonctions.
• $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(\mathbb{C}(X) \to \oplus_{x \in X^1} H^1(\mathbb{C}(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$
• ou encore (groupe de Brauer non ramifié)
$\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(X)) := \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(\mathbb{C}(X) \to \oplus_v H^1(\kappa(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$ où v parcourt les valuations discrètes de $\mathbb{C}(X)$, corps résiduel $k(v)$
• ou encore $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(\mathbb{C}(X) \to \oplus_v H^1(\kappa(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$ où x parcourt les points de codimension 1 de tout modèle normal de X.

Application : non rationalité sur $\mathbb{C}$ de corps d'invariants $(\mathbb{C}(V))^G$ de groupes finis G agissant linéairement sur un vectoriel V (Saltman, Bogomolov).

Artin–Mumford revu (CT-Ojanguren 89)

$X \to S$ fibration en coniques au-dessus de $S = \mathbb{P}^2$, sans section rationnelle, est donnée essentiellement par la fibre générique C, une conique lisse sur le corps $F = \mathbb{C}(S)$, qui correspond à une classe de quaternions A/F non nulle dans $\mathrm{Br}(F)$.
Pour une conique lisse C sur un corps F, d'équation $X^2 - aY^2 - bT^2 = 0$ (pour $\mathrm{car}(F) \neq 2$) on a $\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F(C)] = \mathbb{Z}/2(a,b)$, engendré par la classe de quaternions (a,b) (Witt, 1934).
[De plus l'image de $\mathrm{Br}(F)$ est exactement $\mathrm{Br}(C) \subset \mathrm{Br}(F(C))$.]

On prend $A = (f, g_1 g_2)$ avec des fonctions f, g_1, g_2 dans $\mathbb{C}(S)^\times$. Ici $f = 0$ est l'équation affine de la conique et g_1 et g_2 les équations affine des deux cubiques. En utilisant la configuration particulière des cubiques et de la conique, on vérifie que, pour $i = 1, 2$, il existe une valuation discrète w_i de $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)$ où (f, g_i) a résidu nontrivial, et que pour toute valuation discrète w de $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)$, l'un au moins des (f, g_i) a résidu nul en w (les conditions de tangence sont importantes). Ceci implique que l'image de (f, g_1) par $\mathrm{Br}(\mathbb{C}(S)) \to \mathrm{Br}(\mathbb{C}(X))$ est non ramifiée, et, en utilisant Witt, que cette image est non nulle. Ainsi $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(X)) \neq 0$, et donc X n'est pas stablement rationnelle.

C'est un exercice instructif de fabriquer des configurations de courbes, par exemples de droites dans $\mathbb{P}^2$, menant à d'autres fibrés en coniques $X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dont l'espace total n'est pas stablement rationnel.

La construction ci-dessus est "birationnelle". Il convient, pour les arguments de déformation, de considérer les fibrés en quadriques sur $\mathbb{P}^n$ donnés par un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ fixé sur $\mathbb{P}^n$, souvent de la forme $\mathcal{E} = \oplus_i O_{\mathbb{P}^n}(a_i)$, un fibré inversible $O(m)$ sur $\mathbb{P}^n$, et une forme quadratique non nulle dans $H^0(\mathbb{P}^n, S^2(\mathcal{E})(m))$, dont le lieu d'annulation définit la fibration en quadriques. Dans le cas le plus simple, on considère un bidegré $(2, d)$ et une matrice symétrique de polynômes homogènes tous de même degré d.

Mais ce n'est pas toujours le meilleur choix. Partant d'une forme quadratique sur $\mathbb{C}(\mathbb{P}^n)$, un travail consiste à bien choisir les a_i pour obtenir un fibré en quadriques $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{E})$ dont l'espace total est plat sur $\mathbb{P}^n$, et aussi peu singulier que possible.

Invariants cohomologiques galoisiens non ramifı'es supérieurs.
Soit M un module galoisien fini sur un corps k. Pour X/k projective lisse intègre de corps des fonctions $k(X)$, et $i \geq 1$, on définit ici

$$H^i_{nr}(k(X), M) := \mathrm{Ker}[H^i(k(X), M) \to \oplus_v H^{i-1}(\kappa(v), M(-1))]$$

où v parcourt les valuations discrètes de $k(X)$ triviales sur k, où $\kappa(v)$ est le corps résiduel, et les applications à droite sont les applications résidus sur la cohomologie galoisenne des corps valués discrets.
Par définition, ces groupes sont des invariants k-birationnels. Ce sont en fait des invariants k-birationnels stables par passage de X à $X \times \mathbb{P}^1$.
La théorie de Bloch-Ogus (conjecture de Gersten) montre que l'on peut se limiter aux valuations correspondant aux points de codimension 1 de X, et ce groupe est fonctoriel contravariant par morphisme quelconque de k-variétés projectives et lisses.

On est en général intéressé par $M = \mu_{\ell^n}^{\otimes j}$ et la limite directe $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j)$ pour tous les n.
Par Voevodsky, pour $j \geq 1$ et tout corps F de car. $\neq \ell$,

$$H^j(F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j-1)) = \bigcup_n H^j(F, \mu_{\ell^n}^{\otimes j-1}).$$

Le groupe $H^1_{nr}(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) = H^1_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ classifie les revêtements étales cycliques ℓ-primaires de X.

On a

$$H^2_{nr}(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)) = \mathrm{Br}(X)\{\ell\}.$$

CT-Ojanguren 89 utilise H^3_{nr} pour faire un analogue d'Artin-Mumford avec H^3.
On montre l'existence de variétés unirationnelles X de dimension 6 fibrées en quadriques de dimension 3 au-dessus de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ pour lesquelles l'invariant d'Artin-Mumford ne donne rien, mais le groupe H^3_{nr} permet d'établir la non-rationalité stable.

Premier ingrédient : analogue du théorème de Witt.
Soit F un corps, $\mathrm{car}(F) \neq 2$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in F^\times$, avec $n \geq 1$
Soit Q/F la quadrique lisse définie par l'annulation de la forme quadratique (diagonale) de Pfister (de rang 2^n)

$$<< a_1, \ldots, a_n >>:=< 1, -a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, -a_n > .$$

Théorème. *Le noyau de l'application* $H^n(F, \mathbb{Z}/2) \to H^n(F(Q), \mathbb{Z}/2)$ *est engendré par l'élément d'ordre 2* $(a_1) \cup \ldots (a_n)$, *où* (a_i) *est la classe de* a_i *dans* $F^\times/F^{\times 2} = H^1(F, \mathbb{Z}/2)$.
($n = 2$, Witt 1934 ; $n = 3$, Arason 1975 ; $n = 4$ Jacob-Rost 1989 ; tout n, Orlov-Vishik-Voevodsky 2007)
Ceci vaut encore pour la forme quadratique Q' , de rang $2^{n-1} + 1$. ("voisine de Pfister")

$$[< 1, -a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, -a_{n-1} >] \perp < -a_n >$$

Deuxième ingrédient. Une configuration bien choisie (c'est délicat) de 18 plans dans $\mathbb{P}^3$, qui permet de définir, par divers quotients de leurs équations, des fonctions rationnelles $f, g, h_1, h_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^3)^\times$ avec de bonnes propriétés pour leurs résidus aux valuations de $\mathbb{C}(\mathbb{P}^3)$.
On prend pour $X/\mathbb{C}$ une variété fibrée en quadrique sur $\mathbb{P}^3$, de fibre générique donnée par la quadrique de $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}(\mathbb{P}^3)}$ associée à la forme Q' correspondant au triple $(f, g, h_1 h_2)$.
Les bonnes propriétés et le théorème d'Arason assurent :
(a) L'image du cup-produit $(f, g, h_1) \in H^3(\mathbb{C}(\mathbb{P}^3), \mathbb{Z}/2)$ dans $H^3(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/2))$ est non ramifée.
(b) Cette image est non nulle.
On a alors $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/2) \neq 0$, et X n'est pas stablement rationnelle.

Kollár 1995, Méthode de spécialisation

Point de départ : théorème de spécialisation de Matsusaka (1968)
Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K, de corps résiduel k. Soit $X \to \mathrm{Spec}\,(A)$ un morphisme projectif et plat à fibres géométriquement intègres. Supposons X normal intègre. Si la fibre générique géométrique est réglée (birationnelle à un produit avec $\mathbb{P}^1$), alors la fibre spéciale géométrique est réglée.

Pour d et $n \geq d$ entiers convenables, Kollár fait dégénérer des hypersurfaces lisses de degré d dans $\mathbb{P}^n$ sur des variétés projectives et très légèrement singulières en car. positive (revêtements cycliques inséparables de variétés), dont on peut montrer, en utilisant des formes différentielles sur une désingularisation, qu'elles sont non réglées.
Il obtient ainsi le fait que les hypersurfaces de Fano complexes *très générales* de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}$ avec grosso modo $2/3 \leq d/n \leq 1$, plus précisément $d \geq 2\lceil (n+3)/3 \rceil$, ne sont pas réglées.

Voisin 2014, Inventiones 2015
Nouvel argument de spécialisation.
Utilise la spécialisation des groupes de Chow à la Fulton.
Soit C une courbe lisse sur $\mathbb{C}$. Soit $X \to C$ une famille projective de variétés complexes de dimension relative au moins 2, lisse hors d'un point $0 \in C$. Si la fibre spéciale X_0 n'a comme singularités que des points doubles ordinaires et admet une résolution des singularités $\tilde{X}_0 \to X_0$ avec $H^3_{Betti}(\tilde{X}_0, \mathbb{Z})_{tors} \neq 0$, alors une fibre très générale X_t n'est pas stablement rationnelle.
Application : un revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une quartique très générale n'est pas stablement rationnel.
Par réduction à l'exemple d'Artin-Mumford, revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une quartique avec comme singularités 10 points doubles ordinaires.

Méthode généralisée par CT-Pirutka 2014. Utilisation systématique du groupe de Chow des zéro-cycles pour une variété sur un corps quelconque plutôt que de la décomposition à la Bloch-Srinivas de la diagonale (mais les deux points de vue sont très proches).

Définition. Soit k un corps. Un morphisme propre de k-variétés $f : X \to Y$ est dit universellement CH_0-trivial si pour *tout corps* F *contenant* k l'application $f_* : CH_0(X_F) \to CH_0(Y_F)$ est un isomorphisme.
Si $Y = \mathrm{Spec}\,(k)$, la k-variété X est appelée CH_0-triviale. Pour tout corps F contenant k, le degré $\deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.
Pour établir la propriété que le morphisme f est universellement CH_0-trivial il suffit de vérifier que pour tout point schématique $M \in Y$, la fibre $Y_M/\kappa(M)$ sur le corps résiduel est une $\kappa(M)$-variété CH_0-triviale.

Exemples de variété propre W/k qui est CH_0-triviale.

Pour $n \geq 1$, et $F(x_1, \ldots, x_n)$ homogène de degré quelconque, le cône $F_d(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dans $\mathbb{P}^n_k$.

Pour $n \geq 2$, une quadrique lisse $Q \subset \mathbb{P}^n_k$ avec $Q(k) \neq \emptyset$.

Une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe qui est k-birationnelle à un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$.

Théorème (CT-Pirutka)
Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel k algébriquement clos. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma fidèlement plat et propre sur A à fibres géométriquement intègres. Supposons que la fibre spéciale $Y = \mathcal{X} \times_A k$ possède une désingularisation $f : Z \to Y$ telle que le morphisme f est universellement CH_0-trivial.
Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Supposons que la fibre générique géométrique $\overline{X} := \mathcal{X} \times_A \overline{K}$ admet une désingularisation $\tilde{X} \to \overline{X}$.
/...

Chacun des énoncés (i), (ii), (iii) ci-dessous implique le suivant :
(i) La $\overline{K}$-variété $\overline{X}$ est stablement rationnelle.
(ii) La $\overline{K}$-variété $\tilde{X}$ est universellement CH_0-triviale.
(iii) La k-variété Z est universellement CH_0-triviale.
Cette dernière propriété implique :
(a) Pour tout $i \geq 0$ et tout $n > 0$ premier à la car. de k, pour tout corps L contenant k, $H^i(L, \mathbb{Z}/n) \to H^i_{nr}(L(Z)/L, \mathbb{Z}/n)$ est un isomorphisme.
(b) Pour tout corps L contenant k, la flèche naturelle $\mathrm{Br}(L) \to \mathrm{Br}(Z_L)$ est un isomorphisme.
(c) $\mathrm{Br}(Z) = 0$.

Utilise spécialisation du groupe de Chow (Fulton).
Méthode alternative pour (i) implique (iii) : spécialisation de la R-équivalence.

Application aux hypersurfaces quartiques lisses dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$.
On part d'une hypersurface quartique $Y \subset \mathbb{P}^4$ birationnelle à un solide d'Artin-Mumford, obtenue simplement en "homogénéisant" stupidement l'équation affine $w^2 - f_4(x, y, z) = 0$ du revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une surface quartique avec 10 points singuliers. L'hypersurface Y a 9 singularités ordinaires et une droite double de points singuliers. On désingularise $f : Z \to Y$ et on vérifie que f est un morphisme CH_0-trivial. Par ailleurs $\mathrm{Br}(Z) \neq 0$ par Artin-Mumford.

Conclusion : une hypersurface quartique lisse très générale dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ n'est pas stablement rationnelle.

Il y a au moins deux versions de ce genre d'énoncé : celle pour les variétés d'un type donné sur un anneau de valuation discrète (ci-dessus) et celle plus "géométrique" pour les variétés "très générales" dans une famille $X \to S$ de variétés d'un type donné sur une variété S complexe connexe.

La méthode avec anneau de valuation marche en inégale caractéristique et donne ici : Il existe des hypersurfaces quartiques lisses sur $\mathbb{C}$, définies sur un corps de nombres, qui ne sont pas stablement rationnelles.

Théorème (Totaro 2015). *Soit $n \geq 3$. Une hypersurface $X \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ très générale de degré d. If $d \geq 2\lceil (n+2)/3 \rceil$ n'est pas universellement CH_0-trivial, donc pas stablement rationnelle.*
Un peu mieux que Kollár pour la non rationalité (mais Kollár démontre non réglé).
Méthode. Spécialisation en inégale caractéristique. L'invariant $H^0(Y, \Omega^j)$, $j > 0$, sur une variété projective et lisse Y établit que la variété n'est pas CH_0-triviale.
En degré pair $d = 2a$ on dégénère sur un revêtement double en caractéristique 2, un peu singulier, on établit la CH_0-trivialité du morphisme résolution des singularités, et on utilise le même invariant que Kollár. En degré impair $d = 2a + 1$, Totaro fait une double spécialisation. Il commence par une dégénérescence sur la réunion d'un hyperplan et d'une hypersurface de degré $2a$, utilise une variante avec fibre spéciale réductible de l'argument de CT-Pirutka, puis applique la spécialisation précédente.

Série d'autres travaux pour diverses classes de variétés rationnellement connexes naturelles.
Familles de coniques sur $\mathbb{P}^n$.
Revêtements cycliques de $\mathbb{P}^n$.
Certaines intersections complètes, aussi dans des espaces projectifs à poids.
Familles d'hypersurfaces dans $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ de divers bidegrés.

La plupart via la réduction en car. p et les différentielles.

Si $X/\mathbb{C}$ est projective et lisse, et rationnellement connexe, il existe un entier N tel que pour tout surcorps F, on ait $N.A_0(X_F) = 0$. La question est de minorer (au sens division) cet entier. Cela donne non seulement la non rationalité stable mais aussi un minorant pour le degré d'unirationalité, si jamais X est unirationnelle.
Chatzistamatiou-Levine ANT 2017.
Minoration de la torsion pour les hypersurfaces, estimations à peu près dans les mêmes degrés que Kollár et Totaro. Via différentielles en car. p.

Hassett-Pirutka-Tschinkel Acta Math. 2018
Fibrations en quadriques de type (2,2) dans $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$.

Commence par un exemple spécifique de dimension 2 sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
Configuration : une conique lisse et trois tangentes à la conique.
$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)$ et les trois axes de coordonnées ; $x = 0, y = 0, z = 0$. La forme F induit un carré sur chacun des axes de coordonnées, et $F = 0$ ne passe pas par les points du type $(1,0,0)$.
On considère la variété W définie dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ par

$$yzX^2 + zxY^2 + xyZ^2 + F(x,y,z)T^2 = 0.$$

C'est une famille $W \to \mathbb{P}^2$ de quadriques de dimension deux.

Résolution précise des singularités $\tilde{W} \to W$.
On montre que cette résolution est un morphisme universellement CH_0-trivial. On utilise le symbole quaternionien $(x/z, y/z) \in \mathrm{Br}(\mathbb{C}(\mathbb{P}^2))$. Pour quadrique Q lisse de dimension 2 sur F avec discriminant non carré $\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F(Q))$ est injectif. On montre que l'image de $(x/z, y/z)$ dans $\mathrm{Br}(\mathbb{C}(W))$ est non nulle et non ramfiiée. Argument comme pour Artin-Mumford ci-dessus.

Application (HPT). Il existe des familles projectives et lisses $X \to S$ avec $S/\mathbb{C}$ connexe, les fibres très générales non stablement rationnelles, et certaines fibres rationnelles. Les fibres $X_s, s \in S$ sont des variétés de dimension 4 fibrées en surfaces quadriques au-dessus de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Utilisation du bidegré $(2,2)$ dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$, et de Bertini pour obtenir de telles familles.
On peut trouver des fibres spéciales $X_s/\mathbb{C}$ de la famille lisse $X \to S$ considérée qui sont rationnelles, via existence d'une section rationnelle pour la fibration en quadriques spécialisée $X_s \to \mathbb{P}^2$, en spécialisant une matrice symétrique $(4,4)$ de coefficients des polynômes homogènes $a_{i,j}$, $0 \leq i,j \leq 3$, de degré 2 en (x_0, x_1, x_2), de façon que pour la fibre spéciale on ait $a_{0,0} = 0$. La fibration en quadriques $X_s \to \mathbb{P}^2$ a alors une section, et donc l'espace total X_s est birationnel à $\mathbb{P}^4$.

Schreieder 1 DMJ 2019

Fibrés en quadriques "quelconques" sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de dimension relative $r \leq 2^n - 2$.

Note : pour $r > 2^n - 2$, il y a une section (Lang) donc l'espace total est rationnel.

Le cas de dimension maximale :

Théorème. *Soit* $r = 2^n - 2$*. Une hypersurface très générale dans* $\mathbb{P}^{r+1} \times \mathbb{P}^n$ *de bidegré* $(d, 2)$ *avec* $d \geq n + 2r + 1$ *n'est pas stablement rationnelle.*

Idée de la démonstration du théorème.

Définition de quadrique "spéciale" Z sur $S = \mathbb{P}^n$ en toute dimension. La fibre générique sur $\mathbb{C}(S)$ est une voisine de quadrique de Pfister, et on exhibe une classe α dans $H^n(\mathbb{C}(S), \mathbb{Z}/2)$ dont l'image ξ dans $H^n(\mathbb{C}(Z), \mathbb{Z}/2)$ est *non nulle* et est dans $H^n_{nr}(\mathbb{C}(Z)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2)$.

Utilisation de Orlov-Vishik-Voevodsky (OVV) pour contrôler le noyau de $H^n(\mathbb{C}(\mathbb{P}^n), \mathbb{Z}/2) \to H^n(\mathbb{C}(Z), \mathbb{Z}/2)$ (au plus égal à $\mathbb{Z}/2$), et voir $\xi \neq 0$.

Partie délicate : produire des configurations d'hyperplans et d'hyperquadriques dans $\mathbb{P}^n$, avec des conditions de "tangence" qui joueront pour les Z le rôle des configurations de plans dans $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}^3$ dans CTOj89 et donneront les propriétés ci-dessus de α et ξ.

Dans cet article, solution assez compliquée, coefficients d'assez grands degrés. Solution plus simple dans l'article Schreieder 3.

Théorème. *Soit* $S = \mathbb{P}^n$ *avec* $n \geq 2$. *Soit* X *une variété projective qui se spécialise en une variété* Y *projective avec un morphisme* $Y \to S$. *Si la fibre générique de* $Y \to S$ *est birationnelle à une quadrique "spéciale"* Z *sur* S, *alors* X *n'est pas géométriquement stablement rationnelle.*

Pour le montrer, une nouvelle méthode, qui **évite les résolutions** CH_0**-triviales de singularités.**
Soit $f : \tilde{Z} \to Z$ une résolution des singularités telle que $f^{-1}(U) \to U$ est un isomorphisme sur un ouvert U contenant la fibre générique de $Z \to S$ et que les composantes Y_i de $\tilde{Z} \setminus f^{-1}(U)$ soient lisses, de codimension 1 dans $\tilde{Z}$.

(i) La restriction de ξ à chacune de ces composantes Y_i est nulle. Ceci utilise le fait que l'on a une fibration en quadriques. Ici on se réduit à considérer ce qui se passe au-dessus des points de codimension 1 sur un modèle normal quelconque de S , et on utilise la valeur exacte de $\alpha \in H^n(\mathbb{C}(S), \mathbb{Z}/2)$, et un argument de dimension cohomologique de corps. Argument qui vaut pour *toute* fibration en quadriques (Schreieder 3).
(ii) Si la fibre générique géométrique de $Z \to S$ est géométriquement stablement rationnelle, et si $\xi \in H^n_{nr}(\mathbb{C}(Z)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2)$ s'annule sur les composantes Y_i, alors $\xi = 0 \in H^n(\mathbb{C}(Z), \mathbb{Z}/2)$. Argument général. Utilise l'accouplement de CH_0 avec la cohomologie non ramifiée et la suite de localisation pour CH_0.
CONCLUSION : X n'est pas géométriquement stablement rationnelle.

Pour terminer, déformation des familles de fibrés quadratiques spéciaux (d'espace total a priori très singulier) sur des familles très générales de quadriques au-dessus de $\mathbb{P}^n$, plates, et d'espace total lisse.

Schreieder 2 ANT 2018 Fibrés en surfaces quadriques $X \to \mathbb{P}^2$ Simplification de Hassett Pirutka Tschinkel par les méthodes (i) et (ii) de Schr1. Pas besoin de résolution CH_0-triviale des singularités. Injectivité à la Witt ici très classique, $\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(Q)] = 0$ pour Q quadrique de dimension 2 sur corps k avec discriminant non carré. Comme dans HPT, classe convenable dans $\mathrm{Br}(\mathbb{C}(\mathbb{P}^2))$ d'image non nulle et non ramifiée dans $\mathrm{Br}(\mathbb{C}(X))$.

• Généralisation systématique de HPT. En particulier : Une hypersurface très générale de bidegré $(d, 2)$ dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ n'est pas stablement rationnelle dès que $d \geq 2$.

• Donne l'inspiration pour Schreiderer 3, tant pour la méthode que pour le choix des familles de quadriques (Pfister modifié).

Schreieder 3 JAMS 2019

Hypersurfaces de basse pente

Théorème. *Une hypersurface lisse* $X \subset \mathbb{P}^{N+1}_{\mathbb{C}}$ *très générale de dimension* $N \geq 3$ *et de degré* $d \geq log_2 N + 2$ *n'est pas stablement rationnelle.*

Rappel : Kollár, Totaro avaient obtenu : $d \geq 2N/3$ (grosso modo).

Soit $N \geq 3/$ Alors $N = n + r$ avec $n \geq 2$ et $r \geq 1$ avec $2^{n-1} - 2 \leq r \leq 2^n - 2$ (écriture unique). L'entier n est de l'ordre de $log_2(N)$. Enoncé plus précis :

Théorème. *Une hypersurface très générale* $X \subset \mathbb{P}^{N+1}_{\mathbb{C}}$ *de degré* $d \geq n + 2$ *n'est pas stablement rationnelle.*

Le rôle des puissances de 2 : vient de l'utilisation des formes quadratiques de Pfister, qui sont de dimension 2^m.

Méthode : **Utiliser des familles de quadriques spéciales au-dessus de $\mathbb{P}^n$ avec un coefficient modifié, comme dans HPT et Schr2 sur $\mathbb{P}^2$.**
Notons $x_i = X_i/X_0$. Soit $F = \mathbb{C}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$. On utilise une forme homogène $G(X_0, \dots, X_n)$ de degré pair qui induit un carré sur chacun des axes de coordonnées $X_i = 0$ et ne passe pas par les sommets comme $(1, 0, \dots, 0)$. Soit $g = G(1, x_1, \dots, x_n)$.
On prend une forme quadratique

$$q =< g, c_1, \dots, c_{r+1} >,$$

sur F, où $r \leq 2^n - 2$ et les $c_i \in F^\times, i = 1, \dots, r+$ sont des produits de x_j pour $j = 1, \dots, n$. La forme q définit une quadrique lisse Q sur $\mathbb{C}(\mathbb{P}^n)$. Un peu déformée par rapport à $< 1, c_1, \dots, c_{r+1} >$, qui elle est une sous-forme de la forme de Pfister $<< x_1, \dots, x_n >>$.

On s'intéresse à la famille de quadriques sur $\mathbb{P}^n$ définie par q et à la classe de cohomologie $\alpha = (x_1) \cup \cdots \cup (x_n) \in H^n(\mathbb{C}(\mathbb{P}^n), \mathbb{Z}/2)$ (ici $(x_i) \in F^\times/F^{\times 2} = H^1(F, \mathbb{Z}/2)$).
Techniques (i) et (ii) de Schreieder 1.
On montre
(a) l'image ξ de α dans $H^n(\mathbb{C}(\mathbb{P}^n)(Q), \mathbb{Z}/2)$ est non ramifiée sur $\mathbb{C}$,
(b) La classe ξ s'annule sur les composantes lisses d'une désingularisation non situées au-dessus du point générique de $\mathbb{P}^n$ (calcul direct, ou énoncé général que (a) implique (b) pour les fibrations en quadriques au-dessus d'un anneau de valuation discrète).

On montre $\xi \neq 0$.

Nouvelle astuce, très simple dans son principe, évitant les arguments type Witt, Arason, ..., Voevodsky. On met une variable t dans les coefficients de g, et on spécialise en une quadrique $Q_{t=0}$ qui admet un point rationnel, d'où injection à ce niveau.

On a alors tous les éléments pour conclure que si une variété propre intègre X se spécialise sur une variété birationnelle à une famille de quadriques de ce type, alors X n'est pas géométriquement stablement rationnelle.

La différence avec l'article Schr1, à ce niveau, est dans le choix des coefficients de la quadrique, qui est une déformation d'une voisine de Pfister, comme dans Schr2.

Comment attraper les hypersurfaces générales de basse pente dans $\mathbb{P}^{N+1}$?

Méthode de Schr1, adaptée aux formes voisines de Pfister modifiées :

Une hypersurface lisse générale se spécialise en une hypersurface de degré d avec un espace linéaire $(d-2)$-multiple convenable qui est birationnelle à une famille de quadriques "spéciales" modifiées.

Voici quelques détails.

$N = n + r$ avec $n \geq 2$ et $r \geq 1$ avec $2^{n-1} - 2 \leq r \leq 2^n - 2$. Le cas n impair. Comment trouver des hypersurfaces de degré pair $d \geq n + 2$ dans $\mathbb{P}^{N+1}$.
Coordonnées homogènes $(X_0, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_{r+1})$ pour $\mathbb{P}^{N+1}$.
Soit t une variable et $H = \sum_{i=0}^n X_i^{(n+1)/2}$ et $G = t^2 H^2 - \prod_{i=0}^n X_i$.
On note $g = G/X_0^{n+1} \in F^\times$.
Pour $\varepsilon : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ on note $C_\varepsilon = \prod_{i=1}^n X_i^{\varepsilon(i)}$. On note $c_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = C_\varepsilon(1, x_1, \ldots, x_n)$.
On renumérote $C_0, \ldots, C_{2^n-1}$ les C_ε. On considère la forme quadratique $< g, c_1, \ldots, c_{r+1} >$ et la forme voisine de Pfister $\psi =< 1, c_1, \ldots, c_r >$ (rappel $r \geq 2^{n-1} - 2$).

On définit $E_0(X_0, \ldots, X_n) = (X_0 + X_1)^{d-(n+1)} G(X_0, \ldots, X_n)$, forme de degré d.
Pour $i = 1, \ldots, r+1$ on définit $E_i(X_0, \ldots, X_n) = X_0^{d-2-d_i} C_i$, où $d_i = deg(C_i)$. Ce sont des formes de degré $d-2$.
On définit la forme de degré d en $N+2$ variables :

$$F(X_0, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_{r+1}) = E_0(X_0, \ldots, X_n) + \sum_{i=1}^{r+1} E_i(X_0, \ldots, X_n).Y_i^2.$$

L'hypersurface $F = 0$ de degré d contient l'espace linéaire $L \subset \mathbb{P}^{N+1}$ défini par $X_0 = \cdots = X_n = 0$ et cet espace est $(d-2)$-multiple.
On éclate L dans $\mathbb{P}^{N+1}$ et on considère le transformé propre de $F = 0$. Cela donne une fibration en quadriques sur $Y \to \mathbb{P}^n$ dont la fibre générique est donnée par la forme quadratique $< g, c_1, \ldots, c_{r+1} >$.

On montre que la classe $\alpha = (x_1) \cup \cdots \cup (x_n) \in H^n(\mathbb{C}(P^n), \mathbb{Z}/2)$ a pour image une classe $\xi \in H^n(\mathbb{C}(Y), \mathbb{Z}/2)$ qui satisfait
(a) $\xi \neq 0$: pour établir cela, il suffit d'un argument de spécialisation de la variable t en $t = 0$ pour obtenir une fibration $Y_s \to \mathbb{P}^n$ qui admet une section. Évite OVV, qu'on ne peut utiliser ici en général.
(b) $\xi \in H^n_{nr}(\mathbb{C}(Y)/\mathbb{C})$: là bien sûr la forme spéciale de $G = t^2H^2 - \prod_{i=0}^n X_i$ joue un rôle essentiel ainsi que le fait qu'une classe $(x_1) \cup \cdots \cup (x_n)$ s'annule dans le corps des fonctions d'une voisine de Pfister de $\psi =<< x_1, \ldots, x_n >>$.
(c) Si $\phi : Z \to Y$ est une résolution des singularités induisant un isomorphisme $\phi^{-1}(U) \simeq U$ et $Z \setminus \phi^{-1}(U)$ est une union de composantes lisses de codimension 1 , alors ξ s'annule sur chacune de ces composantes. On montre que c'est une conséquence de (b) car ϕ est une fibration en quadriques.

On conclut alors comme dans Schr1 :

Soit X une variété projective qui se spécialise en $Y \to S = \mathbb{P}^n$. Alors X n'est pas géométriquement stablement rationnelle.

Il reste à déformer l'hypersurface $F = 0$ en une hypersurface lisse de degré d, ce qui est facile.

Noter là encore qu'on n'a pas besoin de résolution CH_0-triviale pour l'hypersurface $F = 0$ sur laquelle on spécialise.

L'article permet en fait de traiter la situation sur tout corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2
En caractéristique positive, en utilisant l'existence de résolutions des singularités par altérations, de Jong et Gabber.

Dans CTOj89, on avait donné des exemples de variétés complexes X unirationnelles (fibrés en quadriques) avec $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/2) \neq 0$ pour $dim(X) \geq 6$. Le présent article permet de construire de tels exemples avec $dim(X) \geq 4$.
Via CT-Voisin 2012, ceci donne des contre-exemples à la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 pour les variétés rationnellement connexes X pour $dim(X) \geq 4$.
Voisin 2006 : La conjecture vaut pour les variétés rationnellement connexes de dimension 3 (et donc $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/n) = 0$).

Schreieder 4 ANT 2020 Torsion order of hypersurfaces
Introduction d'analogues en degré quelconque des quadriques de Pfister.
Exemple, analogue de $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2$ est $x^n + ay^n + bz^n + abt^n$. Formes de Fermat-Pfister, déjà considérées par Krashen-Matzri dans un autre but. Non rationalité stable de familles d'hypersurfaces n-Pfister par utilisation de $H^r_{nr}(\bullet, \mathbb{Z}/n)$. (accessoirement, arrive à faire marcher en car. 2).
Fait dégénérer les hypersurfaces lisses quelconques sur des hypersurfaces contenant un espace linéaire très multiple, qui donne quelque chose birationnel à une fibration en familles d'hypersurfaces n-Pfister au-dessus de espace projectif.
Obtient des énoncés de non annulation de $H^i_{nr}(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/n)$ pour tout entier n.

Bornes inférieures fortes pour le degré d'unirationalité des hypersurfaces rationnellement connexes. Si $X/\mathbb{C}$ est une variété projective et lisse rationnellement connexe il existe un entier $M > 0$ tel que pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$ (par exemple le corps $F = \mathbb{C}(X)$, l'entier M annule le groupe de Chow $A_0(X_F)$ des zéro-cycles de degré zéro sur X_F (il y a une traduction en termes de multiples de la diagonale de $X \times X$).

Théorème (Schr4). *L'ordre de torsion d'une hypersurface de Fano très générale $X_d \subset \mathbb{P}^{N+1}$ de degré $d \geq 4$ est divisible par tout entier $m \leq d - log_2 N$.*

Exemple $X_{100} \subset \mathbb{P}^{100}$. L'ordre de torsion est divisible par

$$2^5.3^3.5^2.7.\prod_{p \leq 89} p.$$

$(> 7x10^{38})$.