TROISIÈME GROUPE DE COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE DES HYPERSURFACES DE FANO

par

J.-L. Colliot-Thélène

Résumé. — Sur un corps algébriquement clos et sur un corps fini, on établit de nouveaux résultats d'annulation pour la cohomologie non ramifiée de degré 3 des hypersurfaces de Fano.

Abstract. — We establish the vanishing of degree three unramified cohomology for several new types of Fano hypersurfaces when the ground field is either finite or algebraically closed of arbitrary characteristic.

Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k et $\ell \neq \mathrm{car}(k)$ un nombre premier. Pour tout couple d'entiers $i \geq 0$ et $j \in \mathbb{Z}$, le groupe de cohomologie non ramifiée $H^i_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$ est par définition le groupe des sections globales du faisceau pour la topologie de Zariski sur X associé au préfaisceau qui à un ouvert $U \subset X$ associe le groupe de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(U, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$ de U à valeurs dans le groupe des racines ℓ-primaires de l'unité tordues j fois. Les propriétés générales de ces groupes sont décrites dans le rapport [**5**]. Le groupe $H^2_{\text{ét}}(U, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1))$ est la composante ℓ-primaire du groupe de Brauer de X. Les groupes $H^i_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$ sont des invariants k-birationnels des variétés projectives et lisses. On a une application naturelle du groupe de cohomologie galoisienne $H^i(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j)) = H^i_{\text{ét}}(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$ dans le groupe $H^i_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$, application qui est un isomorphisme si X est k-birationnelle à un espace projectif $\mathbf{P}^m_k$.

On s'intéresse ici au groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Ce groupe joue un rôle important dans l'étude [**9, 12, 7, 6**] de l'application "cycle" sur le groupe de Chow des cycles de codimension 2

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Pour une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ sur le corps des complexes, $n = 4$ et $n = 5$, on sait que l'on a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ pour tout ℓ. C'est une conséquence [**9**, Thm. 1.1] de la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 sur ces hypersurfaces cubiques. Pour $n = 4$, cette conjecture est facile à établir (voir le théorème 2.1 ci-dessous). C'est aussi un cas très particulier d'un théorème général de C. Voisin sur les solides uniréglés. Pour $n = 5$, cette conjecture fut démontrée par C. Voisin [**20**, Thm. 18].

Dans [**6**, §5.3], j'ai discuté des extensions de ce résultat aux hypersurfaces lisses de degré $d \leq n$ dans un espace projectif $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ avec n quelconque. Par la formule d'adjonction, ce sont exactement les hypersurfaces lisses de Fano, c'est-à-dire à fibré anticanonique ample.

Dans cet article, on considère la situation sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, et sur un corps fini.

Plus précisément, pour $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une hypersurface lisse de degré $d \leq n$ sur un corps k de caractéristique différente de ℓ, on établit

$$H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$$

dans chacun des cas suivants :

(i) k algébriquement clos et $n \neq 5$ (Théorème 2.1)

(ii) $k = \mathbb{F}$ fini et $n \neq 4, 5$ (Théorème 3.1) ;

(iii) k algébriquement clos (de caractéristique différente de 2 et 3), $d = 3$ et $n = 5$ (Théorème 4.1) ;

(iv) $k = \mathbb{F}$ fini, $d = 3$ et $n = 4$ (Théorème 5.1).

Le cas des hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbf{P}^5_{\mathbb{F}}$ reste ouvert.

La démonstration du cas (iii) repose sur un théorème de Charles et Pirutka [**3**]. Dans le cas (iv), on offre deux démonstrations, utilisant toutes deux la théorie du corps de classes supérieur de K. Kato et S. Saito. L'une de ces démonstrations passe par un théorème de Parimala et Suresh [**18**].

Pour X une variété sur un corps k et $\overline{k}$ une clôture séparable de k, on note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$.

1. Quelques rappels

Lemme 1.1. — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{F}}$, $n \geq 4$, une hypersurface cubique lisse. Le pgcd des degrés des extensions finies L de $\mathbb{F}$ sur lesquelles X_L possède une L-droite est égal à 1.*

Démonstration. — D'après Fano, Altman et Kleiman [**1**], sur tout corps k, la variété de Fano $F = F(X)$ des droites de $X \subset \mathbf{P}^n_k$, est non vide, projective et lisse [**1**, Cor. 1.12] pour $n \geq 3$ et géométriquement connexe pour $n \geq 4$ [**1**, Thm 1.16 (i)]. Sur un corps fini $\mathbb{F}$, les estimations de Lang-Weil donnent le résultat. □

Remarque 1.2. — Des résultats précis sur l'existence de droites sur le corps fini $\mathbb{F}$ lui-même sont obtenus dans [**11**].

Proposition 1.3. — *Soit X une surface projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. Si k est algébriquement clos, ou si k est fini, $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.*

Démonstration. — On a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \subset H^3(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Ce dernier groupe est nul si k est algébriquement clos, car la ℓ-dimension cohomologique du corps des fonctions $k(X)$ est 2.

Pour toute surface X projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps fini et ℓ premier différent de la caractéristique de k, on a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ (Sansuc, Soulé et l'auteur [**8**, Rem. 2 p. 790] ; K. Kato [**13**, Thm. 0.7 and Corollary]).

□

Proposition 1.4. — *Soit $n \geq 3$ un entier et soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une hypersurface cubique lisse sur un corps k. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k.*

(i) Si X possède un zéro-cycle de degré 1, le quotient du groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par l'image de $H^3(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par 6.

(ii) Si X contient une droite k-rationnelle, le quotient du groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par l'image de $H^3(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par 2.

(iii) Si k est algébriquement clos, $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par 2.

(iv) Si k est fini, $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par 2.

Démonstration. — Les énoncés [**2**, Thm. 1.4] et [**2**, Prop. 2.1] donnent que ce quotient est annulé par 6 si X possède un zéro-cycle de degré 1, et par 2 si X contient une droite k-rationnelle. Ceci établit (i), (ii) et (iii). Pour k un corps fini, X possède un zéro-cycle de degré 1, et même un point rationnel. L'énoncé (iv) pour $n = 3$ est un cas particulier de la proposition 1.3. Pour $n \geq 4$, l'énoncé (iv) résulte de la combinaison de l'énoncé (ii), du lemme 1.1 et d'un argument de corestriction-restriction. □

2. Hypersurfaces de Fano dans $\mathbf{P}^n_k$, k algébriquement clos, $n \neq 5$

On étend en toute caractéristique des résultats de [**6**]. On en profite pour rectifier la démonstration de [**6**, Thm. 5.6 (vi)] pour une hypersurface dans $\mathbf{P}^4$.

Théorème 2.1. — *Soit $n \geq 3$ un entier, et soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une hypersurface lisse de degré d sur un corps algébriquement clos k. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k.*

(i) Pour $n = 3$ et $n \geq 6$, l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

(ii) Pour $n = 4$ et $d \leq 4$, l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

(iii) Pour $n \neq 5$ et $d \leq n$, on a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.

Démonstration. — Établissons (i). Pour $n = 3$, la classe de tout k-point de X engendre le $\mathbb{Z}_\ell$-module $H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \simeq \mathbb{Z}_\ell$. L'énoncé (i) est donc clair pour $n = 3$.

Supposons $n \geq 4$. Soit $U = \mathbf{P}^n_k \setminus X$. Pour tout entier $m > 0$, on a la suite exacte de cohomologie étale à supports propres [**15**, III.1.30] :

$$H^4_c(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^4(\mathbf{P}^n, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^4(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^5_c(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2)).$$

Les groupes finis $H^i_c(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2))$ et $H^{2n-i}(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2n-2))$ sont duaux (dualité de Poincaré [**15**, VI.11.2]).

Pour $n \geq 6$, on a $2n - 4 > 2n - 5 > n$. Le théorème de Lefschetz affine [**15**, VI.7.2] donne $H^{2n-4}(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2n-2)) = 0$ et $H^{2n-5}(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2n-2)) = 0$.

La flèche de restriction $H^4(\mathbf{P}^n, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^4(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2))$ est donc un isomorphisme de groupes finis pour tout m. La flèche de restriction

$$\mathbb{Z}_\ell = H^4(\mathbf{P}^n, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est donc un isomorphisme. Ceci implique que l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective. Ceci établit (i) pour $n \geq 6$.

Pour $n > 4$, la considération de la suite exacte

$$H^3(\mathbf{P}^n, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^3(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^4_c(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2)),$$

la dualité de Poincaré et le théorème de Lefschetz affine donnent alors $H^3(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) = 0$ pour tout m et donc $H^3(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$. Ceci sera utilisé dans la démonstration du théorème 3.1 ci-après.

Établissons l'énoncé (ii). Soit donc $n = 4$. L'argument qui suit corrige celui donné dans [**6**, Thm. 5.6 (vi)].

Pour tout degré d, et tout entier $m > 0$, la flèche de restriction $H^2(\mathbf{P}^4, \mathbb{Z}/\ell^m) \to H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^m)$ est un isomorphisme, comme on voit en utilisant la suite exacte de cohomologie étale à supports, la dualité de Poincaré sur $U = \mathbf{P}^4 \setminus X$, et le théorème de Lefschetz affine. Ceci implique $H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^m) \simeq \mathbb{Z}/\ell^m$, et ceci implique que l'application cycle $CH^1(X)/\ell^m \to H^2(X, \mu_{\ell^m})$ définie via l'application de Kummer $\mathrm{Pic}(X)/\ell^m \to H^2(X, \mu_{\ell^m})$ est un isomorphisme.

Le cup-produit sur la cohomologie étale

$$H^4(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \times H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^m(1)) \to H^6(X, \mathbb{Z}/\ell^m(3)) = \mathbb{Z}/\ell^m$$

est un accouplement non dégénéré de groupes finis (dualité de Poincaré). D'après ce qui précède, chacun des deux termes de cet accouplement est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell^m$. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} CH^2(X)/\ell^m & \times & CH^1(X)/\ell^m & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell^m \\ \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow = \\ H^4(X,\mathbb{Z}/\ell^m(2)) & \times & H^2(X,\mathbb{Z}/\ell^m(1)) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell^m, \end{array}$$

où l'accouplement supérieur est donné par l'intersection des cycles.

Pour $\ell \neq 2 = (\dim(X)-1)!$, ce diagramme est commutatif [**15**, Prop VI.10.7], Pour tout premier ℓ, il commute sur les couples de cycles (Z_1, Z_2) transverses l'un à l'autre [**15**, Prop. VI.9.5]. Soit $Y = H \cap X \subset X$ la trace d'un hyperplan $H \subset \mathbf{P}^4$. Sous l'hypothèse $d \leq 4$, l'hypersurface X contient une droite $L \subset \mathbf{P}^4$. Ceci est bien connu pour $d = 3$; pour un énoncé général, voir [**10**, Thm. 2.1]. Dans l'accouplement supérieur, on a $(L, Y) = 1$. En appliquant [**15**, Prop. VI.9.5], on voit que la classe de cycle de L dans $H^4(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \simeq \mathbb{Z}/\ell^m$ engendre ce groupe. Ainsi l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective. Ceci établit (ii) pour $n = 4$.

Montrons maintenant (iii). D'après [**12**, Thm. 1.1] ou [**7**, Thm. 2.2], la surjectivité de

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) = \mathbb{Z}_\ell$$

implique que le groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible.

D'après un théorème de Roitman ([**19**], voir aussi [**4**, §4]), l'hypothèse $d \leq n$ implique que sur tout corps algébriquement clos K contenant k, l'application degré $CH_0(X_K) \to \mathbb{Z}$ sur le groupe de Chow des zéro-cycles est un isomorphisme. D'après un argument général (voir [**7**, Prop. 3.2]), ceci implique l'existence d'un entier $N > 0$ qui annule $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$.

Sous l'hypothèse $n \neq 5$ et $d \leq n$, on a donc établi que le groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible et d'exposant fini. Il est donc nul. □

Remarque 2.2. — Pour $k = \mathbb{C}$ et $X \subset \mathbf{P}^n_k$ comme ci-dessus avec $d \leq n$ et tout corps F contenant k, et pour $n \geq 6$, on a établi dans [**6**, Thm. 5.6 (vii)] que la flèche naturelle

$$H^3(F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un isomorphisme. Il est très vraisemblable que ce résultat vaut sur tout corps k algébriquement clos, avec ℓ distinct de la caractéristique de k.

3. Hypersurfaces de Fano dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{F}}$, $\mathbb{F}$ fini, $n = 3$ et $n \geq 6$

Théorème 3.1. — *Soit $n \geq 3$ un entier et soit $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{F}}$ une hypersurface lisse de degré $d \leq n$ sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Pour $n = 3$ et pour $n \geq 6$, on a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.*

Démonstration. — D'après la proposition 1.3, on peut supposer $n \geq 6$.

Pour $n \geq 6$, on a établi dans la démonstration du théorème 2.1 que l'on a $H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ et que la restriction

$$\mathbb{Z}_\ell = H^4(\mathbf{P}^n_{\mathbb{F}}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un isomorphisme. Pour toute $\mathbb{F}$-variété Y, on dispose de la suite exacte déduite de la suite spectrale de Leray

$$0 \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{Y}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^4(Y, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^0(\mathbb{F}, H^4(\overline{Y}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to 0.$$

La comparaison de cette suite pour $Y = \mathbf{P}^n_{\mathbb{F}}$ et pour $Y = X$ donne que l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) = \mathbb{Z}_\ell$$

est surjective.

D'après [**12**, Thm. 1.1] ou [**7**, Thm. 2.2], sur un corps fini $\mathbb{F}$, la surjectivité de

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) = \mathbb{Z}_\ell$$

implique que le groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible.

Comme rappelé dans la démonstration du théorème 2.1, l'hypothèse $d \leq n$, le théorème de Roitman [**19**] et l'argument donné dans [**7**, Prop. 3.2] impliquent que $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est d'exposant fini.

Le groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible et d'exposant fini, il est donc nul. □

4. Hypersurfaces cubiques dans $\mathbf{P}^5_k$, k algébriquement clos

Déjà pour les hypersurfaces cubiques, le théorème 2.1, sur un corps algébriquement clos, laisse ouvert le cas $n = 5$. Pour $X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ une hypersurface cubique lisse sur le corps des complexes, Claire Voisin [**20**, Thm. 18] a établi la conjecture de Hodge entière dans ce contexte. D'après [**9**], ceci implique $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, et [**5**, Thm. 4.4.1] montre alors que le résultat vaut pour toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^5_k$ sur un corps k algébriquement clos de caractéristique zéro.

En utilisant le travail de Charles et Pirutka [**3**], on obtient l'analogue de ce résultat sur tout corps algébriquement clos, avec une restriction mineure sur la caractéristique.

Théorème 4.1. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2 et 3. Soit $X \subset \mathbf{P}^5_k$ une hypersurface cubique lisse. Soit ℓ premier différent de la caractéristique de k. On a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.*

Démonstration. — D'après la proposition 1.4, le groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est d'exposant fini, en fait divisant 2. La proposition 1.4 donne donc déjà le résultat pour $\ell \neq 2$.

Par une variante du lemme de rigidité de Suslin [**5**, Thm. 4.4.1], pour établir ce dernier énoncé $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, on peut se limiter à considérer le cas où k est une clôture algébrique d'un corps F de type fini sur le corps premier, et où $X = X_0 \times_F k$ pour $X_0 \subset \mathbf{P}^5_F$ une hypersurface cubique lisse.

On considère l'application cycle $CH^2(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$. Elle respecte l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k/F)$. Elle envoie donc le groupe des cycles dans le sous-groupe

$$H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))^f \subset H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

des classes dont le stabilisateur est un sous-groupe ouvert.

Comme $H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini et l'action de $\mathrm{Gal}(k/F)$ est continue, le conoyau de

$$H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))^f \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un groupe sans torsion [**7**, Lemme 4.1].

Charles et Pirutka [**3**, Thm. 1.1] ont montré que l'application

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))^f$$

est surjective. On conclut que le conoyau de

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un groupe sans torsion. D'après [**12**, Thm. 1.1] ou [**7**, Thm. 2.2], le groupe fini donné par la torsion du conoyau de l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

coïncide avec le groupe quotient de $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par son sous-groupe divisible maximal. D'après la proposition 1.4, le groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est d'exposant fini. Ceci établit $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$. □

Remarque 4.2. — Pour $X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ une hypersurface cubique lisse, la conjecture de Hodge rationnelle (à coefficients dans $\mathbb{Q}$) pour les cycles de codimension deux est connue depuis 1977 (Zucker [**22**], Murre [**17**]). La nullité de $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ établie ci-dessus et [**9**, Thm. 1.1] redonnent donc la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension deux sur ces hypersurfaces, c'est-à-dire le résultat établi en 2007 par C. Voisin [**20**, Thm. 18] [**21**, Thm. 3.11]. Il convient cependant d'observer que la démonstration ci-dessus repose de façon essentielle sur [**3**], dont les méthodes géométriques sont inspirées de celles de [**20**] (qui cite [**22**]).

5. Hypersurfaces cubiques dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{F}}$, $\mathbb{F}$ corps fini

Pour les hypersurfaces cubiques lisses sur un corps fini, le travail [**18**] de Parimala et Suresh permet de compléter le théorème 3.1 pour $n = 4$.

Théorème 5.1. — *Soit $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{F}}$ une hypersurface cubique lisse sur un corps fini $\mathbb{F}$ de caractéristique différente de 2.*

(i) Pour tout ℓ premier différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$, on a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.

(ii) Soit $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$ et $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. L'application naturelle

$$CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G$$

est un isomorphisme.

(iii) L'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

Démonstration. — (i) Le cas $\ell \neq 2$ résulte déjà de la proposition 1.4. Pour démontrer la proposition, par le lemme 1.1 et un argument de restriction-corestriction, on peut supposer que X contient une droite $L \subset X$ définie sur le corps $\mathbb{F}$. En éclatant X le long de L, on trouve une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse Y $\mathbb{F}$-birationnelle à X et munie d'une structure de fibration en coniques sur $\mathbf{P}^2_{\mathbb{F}}$. Le théorème de Parimala-Suresh [**18**, Cor. 5.6] donne alors $H^3_{nr}(Y, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, et donc $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.

(ii) On sait (théorème de Lefschetz faible) que $H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion. La nullité de $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ et [**7**, Cor. 6.9] donnent (ii).

(iii) Comme X est géométriquement unirationnelle de dimension 3, le conoyau de l'application cycle $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est un groupe fini [**7**, Prop. 3.23]. D'après [**12**, Thm. 1.1] ou [**7**, Thm. 2.2], la torsion du conoyau de l'application cycle s'identifie au quotient de $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par son sous-groupe divisible maximal. De (i) résulte donc (iii). □

Remarque 5.2. — La démonstration du théorème de Parimala et Suresh [**18**] utilise un résultat de théorie du corps de classes supérieur, à savoir la nullité de $H^3_{nr}(S, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ pour S une surface projective et lisse sur un corps fini ([**8**, Rem. 2, p. 790] ; [**13**, Thm. 0.7, Cor]). Elle utilise aussi beaucoup d'autres arguments délicats.

En utilisant la théorie du corps de classes supérieur, et le lien entre la surface de Fano des droites de X et le groupe des cycles de codimension 2 de

X, on peut donner une démonstration alternative du théorème 5.1. Soit $Y/\mathbb{F}$ la surface de Fano de X, qui paramétrise les droites de X. C'est une surface projective, lisse, géométriquement connexe [**1**, Cor. 1.12], qui possède donc un zéro-cycle de degré 1 sur le corps fini $\mathbb{F}$.

La famille universelle des droites de X définit une correspondance entre Y et X qui induit un homomorphisme $CH_0(Y) \to CH^2(X)$, lequel induit une application $A_0(Y) \to CH_0^2(X)$, où l'on a noté $A_0(Y) \subset CH_0(Y)$ le sous-groupe des zéro-cycles de degré zéro, et $CH_0^2(X) \subset CH^2(X)$ le sous-groupe des 1-cycles d'intersection nulle avec une section hyperplane. Sur un corps de caractéristique différente de 2, on sait [**16**, VI,VII] que l'application $A_0(\overline{Y}) \to CH_0^2(\overline{X})$ se factorise comme

$$A_0(\overline{Y}) \to Alb_Y(\overline{\mathbb{F}}) \xrightarrow{\cong} CH_0^2(\overline{X}).$$

D'après le théorème de Roitman, l'application d'Albanese $A_0(\overline{Y}) \to Alb_Y(\overline{\mathbb{F}})$, qui est surjective, a son noyau uniquement divisible (en fait, pour $\mathbb{F}$ corps fini, cette flèche est un isomorphisme). Ceci assure que l'application $A_0(\overline{Y})^G \to CH_0^2(\overline{X})^G$ est surjective. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A_0(Y) \arrow[r] \arrow[d] & CH_0^2(X) \arrow[d] \\ A_0(\overline{Y})^G \arrow[r] & CH_0^2(\overline{X})^G. \end{tikzcd}$$

La théorie du corps de classes supérieur (Kato-Saito [**14**, Prop. 9.1]) montre que, pour toute variété projective lisse Y géométriquement connexe sur un corps fini, l'application $A_0(Y) \to A_0(\overline{Y})^G$ est surjective (pour $Y/\mathbb{F}$ une surface, voir aussi [**7**, §6.2]). On conclut donc que $CH_0^2(X) \to CH_0^2(\overline{X})^G$ est surjectif, puis que $CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G$ est surjectif. Ceci donne l'énoncé (ii) du théorème 5.1. Comme on a $H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, l'énoncé (i) résulte alors de (ii) et de [**7**, Cor. 6.9]. L'application $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ a son conoyau fini. D'après [**12**] ou [**7**, Thm. 2.2], ce conoyau s'identifie au quotient de $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par son sous-groupe divisible maximal. Ainsi l'application $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est surjective.

Remarque 5.3. — Sur un corps fini $\mathbb{F}$ et pour un nombre premier $\ell \neq \mathrm{car}(\mathbb{F})$, la question si l'on a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ pour une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{F}}$ reste ouverte dans le cas crucial $\ell = 2$ (pour $\ell \neq 2$, voir la Proposition 1.4 (iv)). Elle est équivalente à la question de la surjectivité de l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Références

[1] A. Altman et S. Kleiman, Foundations of the theory of Fano schemes, Compositio Math. **34** no. 1 (1977), 3–47.

[2] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala, Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane, in *Brauer groups and obstruction problems : moduli spaces and arithmetic* (Palo Alto, 2013), A. Auel, B. Hassett, T. Várilly-Alvarado, and B. Viray, eds., Progress in Mathematics **320**, Birkhäuser Boston (2017), 29–56.

[3] F. Charles et A. Pirutka, La conjecture de Tate entière pour les cubiques de dimension quatre sur un corps fini, Compositio Math. **151** (2015), no. 2, 253–264.

[4] A. Chatzistamatiou et M. Levine, Torsion orders of complete intersections, to appear in Algebra & Number Theory, arXiv :1605.01913 [math.AG].

[5] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58**, Part I (1995), 1–64.

[6] J.-L. Colliot-Thélène, Descente galoisienne sur le second groupe de Chow : mise au point et applications, Documenta Mathematica, Extra Volume Merkurjev (2015), 109–134.

[7] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kahn, Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié pour les variétés sur les corps finis, J. K-Theory **11** (2013), 1–53.

[8] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et C. Soulé, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, Duke Math. J. **50** no. 3 (1983), 763–801.

[9] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, Duke Math. J. **161** (2012), 735–801.

[10] O. Debarre, On the geometry of hypersurfaces of low degrees in the projective space, in *Algebraic Geometry and Number Theory, Istanbul 2014*, ed. H. Mourtada, C. G. Sarıoğlu, C. Soulé and A. Zeytin, Progress in Mathematics **321**, Springer (2017), 55–90.

[11] O. Debarre, A. Laface, X. Roulleau, Lines on cubic hypersurfaces over finite fields, in *Geometry over Nonclosed Fields* (Simons Symposium) ed. F. Bogomolov, B. Hassett, Y. Tschinkel, Springer (2017), 19–52.

[12] B. Kahn, Classes de cycles motiviques étales, Algebra & Number Theory **6** no. 7 (2012), 1369–1407.

[13] K. Kato, A Hasse principle for two-dimensional global fields, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **366** (1986), 142–181.

[14] K. Kato et S. Saito, Unramified class field theory of arithmetical surfaces, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 2, 241–275.

[15] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. **33**, Princeton University Press (1980).

[16] J. P. Murre, Some results on cubic threefolds, in *Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds*, Lecture Notes in Math. **412**, Springer, Berlin, Heidelberg (1974), 140–164.

[17] J. P. Murre, On the Hodge conjecture for unirational fourfolds, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **80** = Indag. Math. **39** no. 3 (1977), 230–232.

[18] R. Parimala et V. Suresh, Degree three cohomology of function fields of surfaces, Int. Math. Res. Not. **IMRN 2016**, no. 14 (2016), 4341–4374.

[19] A. A. Roitman. Rational equivalence of zero-dimensional cycles, Mat. Zametki **28** no. 1 (1980), 85–90, 169.

[20] C. Voisin, Some aspects of the Hodge conjecture, Jap. J. Math. **2** no. 2 (2007), 261–296.

[21] C. Voisin, Abel-Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal, J. Algebraic Geometry **22** (2013), 141–174.

[22] S. Zucker, The Hodge conjecture for cubic fourfolds, Compositio Math. **34** (1977), 199–209.

submitted August 3rd, 2017; revised October 15th, 2017

J.-L. Colliot-Thélène, CNRS, Université Paris Sud et Paris-Saclay, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cédex, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`