

“Diophantine methods, lattices, and arithmetic theory of quadratic forms”

BIRS, Banff, 14–18 November 2011

Sur l'équation $q(x, y, z) = P(t)$ en entiers
(Travail commun avec Fei XU)

Jean-Louis Colliot-Thélène

C.N.R.S., Université Paris-Sud, France

X une k -variété algébrique sur un corps de nombres k

Approximation forte hors de S .

Soit $S \subset T$ avec T ensemble fini de places contenant les places archimédiennes et $\mathcal{X}/\mathcal{O}_T$ un modèle de X/k , puis pour chaque $v \in T \setminus S$, un ouvert $U_v \subset X(k_v)$. Dans toute telle situation, si l'ensemble

$$\prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \in T \setminus S} U_v \times \prod_{v \notin T} \mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$$

est non vide, il contient l'image diagonale d'un point de $X(k)$.

Lorsque ceci vaut, on a un principe local-global pour les points S -entiers.

Pour \mathcal{X}/O_S un modèle entier de X/k , si l'on a $\prod_{v \notin S} \mathcal{X}(O_v) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{X}(O_S) \neq \emptyset$.

Si l'approximation forte hors de S vaut, elle vaut hors de tout S' contenant S .

Si U ouvert non vide de X lisse et géométriquement intègre, si l'approximation forte hors de S vaut pour U , alors elle vaut pour X .

Cas classiques d'approximation forte

(1) \mathbb{G}_a : le théorème du reste chinois, S tout ensemble non vide de places

(2) $q(x_1, \dots, x_n) = a$ avec $n \geq 4$, q isotrope en une place $v \in S$.
(Eichler, Kneser)

(3) Groupe algébrique semisimple simplement connexe G/k sous une hypothèse forte de non compacité pour $\prod_{v \in S} G(k_v)$. (Kneser, Platonov)

L'approximation forte peut être en défaut.

Exemple de Borovoi et Rudnick :

$$-9x^2 + 2xy + 7y^2 + 2z^2 = 1$$

soit encore

$$(y - x)(9x + 7y) = 1 - 2z^2$$

Solutions dans tous les \mathbb{Z}_p mais pas dans \mathbb{Z} .

De nombreux exemples de ce type ont été interprétés (CT-Xu, à partir de 2005; Comp. Math. 2009) en terme de l'obstruction de Brauer-Manin (qui jusque là avait plutôt été considérée dans l'étude des points rationnels).

On utilise l'accouplement

$$X(\mathbb{A}_k) \times \mathrm{Br}(X) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(\{M_v\}, A) \mapsto \sum_v \mathrm{inv}_v A(M_v),$$

qui est nul sur $X(k) \times \mathrm{Br}(X)$. On note

$$X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$$

le noyau à gauche. On a donc $X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$.

Approximation forte hors de S avec condition de Brauer-Manin.

On suppose $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$.

Soit $S \subset T$ avec T ensemble fini de places contenant les places archimédiennes et $\mathcal{X}/\mathcal{O}_T$ un modèle de X/k , puis pour chaque $v \in T \setminus S$, un ouvert $U_v \subset X(k_v)$. Dans toute telle situation, si l'ensemble

$$\left[\prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \in T \setminus S} U_v \times \prod_{v \notin T} \mathcal{X}(\mathcal{O}_v) \right]^{\text{Br}(X)}$$

est non vide, il contient l'image diagonale d'un point de $X(k)$.

Fait. Si l'approximation forte hors de S avec condition de Brauer-Manin vaut pour S , elle vaut hors de tout S' avec $S \subset S'$.

Fait. Si $X' \rightarrow X$ morphisme propre birationnel de variétés lisses, alors l'approximation forte avec condition de Brauer-Manin hors de S vaut pour X si et seulement si vaut pour X' .

Théorème. Soit $U \subset X$ un ouvert d'une k -variété lisse géométriquement intègre. Soit S un ensemble fini de places. On suppose $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. Si $\text{Br}(U)/\text{Br}(k)$ est fini, et si l'approximation forte hors de S avec condition de Brauer-Manin vaut pour U , alors elle vaut pour X .

[Utilise le lemme formel d'Harari.]

L'approximation forte avec condition de Brauer-Manin vaut pour
pour :

X/k espace homogène d'un groupe algébrique G/k linéaire
connexe, avec stabilisateurs géométriques connexes. Là encore, il
faut une hypothèse de non compacité forte pour $\prod_{v \in S} X(k_v)$.

CT et Xu 2009 (G semisimple simplement connexe); Harari 2008
(G commutatif connexe); Demarche 2011 (groupes quelconques);
Borovoi et Demarche (cas général).

Le cas intéressant le plus simple

Soit Y la k -variété définie par $q(x, y, z) = c$, avec q forme quadratique ternaire non dégénérée et $a \in k^\times$.

Soit $d = -c \cdot \det(q)$.

Si $d \in k^{\times 2}$ alors $\text{Br}(Y)/\text{Br}(k) = 0$.

Si $d \notin k^{\times 2}$ alors $\text{Br}(Y)/\text{Br}(k) = \mathbb{Z}/2$, engendré par un élément $\xi \in \text{Br}(Y)$ d'ordre 2, de la forme $(l(x, y, z), d)$ avec $l(x, y, z)$ fonction linéaire affine convenable.

Sur k corps de nombres, pour S fini contenant une place v avec q isotrope en v , on a l'approximation forte hors de S avec condition de Brauer-Manin.

Fait. Sur k_v un corps local quelconque, avec $Y(k_v) \neq \emptyset$ et $d \notin k^{\times 2}$, ξ ne prend qu'une seule valeur sur $Y(k_v)$ si et seulement si v est une place réelle et q est anisotrope sur k_v .

Fait. Sur k_v un corps p -adique non dyadique, q une forme non dégénérée sur o_v et $c \in o_v$, si $d = -c \cdot \det(q)$ non carré, alors ξ prend deux valeurs distinctes sur les points $(x, y, z) \in Y(o_v)$ avec $(x, y, z) = 1$ (points primitifs) si et seulement si $v(c)$ est impaire.

Application.

Endliche Anzahl von Spinorausnahmen (M. Kneser)

Soit $q(x, y, z) \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ indéfinie. Pour tout $c \in \mathbb{Z}$ non dans un ensemble fini $E = E(q) \subset \mathbb{Q}^\times / \mathbb{Q}^{\times 2}$, le principe local-global vaut pour les solutions entières de l'équation

$$q(x, y, z) = c.$$

Que dire sur les points entiers en dehors du cadre des espaces homogènes de groupes linéaires connexes ?

Penser à la situation analogue pour l'étude du principe local-global et l'approximation faible sur les points *rationnels*. Le cas des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes (avec stabilisateur connexe) a été beaucoup étudié (Eichler, Kneser, Harder, Chernousov, Sansuc, Borovoi). On a ensuite étudié l'extension à d'autres types de variétés, en particulier les variétés X avec une fibration $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ dont la fibre générale est un tel espace homogène.

Soient k un corps, $q(x, y, z)$ une forme quadratique ternaire sur k , non dégénérée, et $P(t) \in k[t]$ non nul. Notons X/k la variété affine

$$q(x, y, z) = P(t).$$

Si $P(t)$ est séparable, X est lisse. Soit $U \subset X$ l'ouvert complémentaire de $x = y = z = 0$. C'est une variété lisse. Soit $\tilde{X} \rightarrow X$ une résolution des singularités de X , avec $U \subset \tilde{X}$.

Théorème principal de l'exposé (CT et Fei XU, 2011)

Pour k un corps de nombres et $S = \{v_0\}$ une place telle que q est isotrope sur k_{v_0} , l'approximation forte hors de S avec condition de Brauer-Manin vaut pour tout ouvert Zariski V de X avec $U \subset V \subset \tilde{X}$.

$k = \mathbb{Q}$, S la place réelle.

L'approximation forte hors de S ne vaut pas en général pour \tilde{X} .
Contre-exemple au principe local-global pour les solutions entières de

$$(x - y)(9x + 7y) - 2z^2 = -(2t^2 - 1)^2.$$

L'approximation forte hors de S ne vaut pas en général pour U .
Contre-exemple au principe local-global pour les solutions entières primitives $(x, y, z) = 1$ de

$$x^2 - 2y^2 + 64z^2 = (2t^2 + 3)^2.$$

L'approximation forte hors de S vaut si le polynôme $p(t)$ n'est pas trop spécial.

Théorème :

Supposons de plus $p(t) \neq c \cdot (r(t))^2$ avec $c \in k^\times$. Pour k un corps de nombres et $S = \{v_0\}$ une place telle que q est isotrope sur k_{v_0} , l'approximation forte hors de S vaut pour tout ouvert Zariski V de X avec $U \subset V \subset \tilde{X}$.

Ceci est en fait un cas particulier du théorème principal, car on montre que l'hypothèse sur $p(t)$ implique

$$\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}(\tilde{X}) = \mathrm{Br}(U),$$

il n'y a donc pas de conditions de Brauer-Manin à respecter.

Expliquons la démonstration du dernier théorème dans un cas particulier.

Théorème. Soit $q(x, y, z) \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ une forme quadratique ternaire entière indéfinie. Si $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ n'est pas égal à une constante fois un carré, le principe local-global vaut pour les solutions entières de l'équation $q(x, y, z) = P(t)$.

Démonstration. Il y a un ensemble fini S de premiers tels que $q(x, y, z)$ représente tout élément de \mathbb{Z}_p si $p \notin S$.
On se donne des solutions locales (x_p, y_p, z_p, t_p) . On prend $t_0 \in \mathbb{Z}$ très proche de t_p pour $p \in S$. Il existe alors un entier $r > 0$ tel que, pour tout entier $m > 0$,

$$P(t_0 + (\prod_{p \in S} p)^r \cdot m)$$

est représenté par $q(x, y, z)$ sur chacun des \mathbb{Z}_p .

Lemme. Soit $P(t)$ un polynôme dans $\mathbb{Q}[t]$ qui n'est pas une constante fois un carré. L'ensemble des $P(m)$ pour $m \in \mathbb{N}$ parcourt une infinité de classes dans $\mathbb{Q}^\times / \mathbb{Q}^{\times 2}$.

On peut donc choisir $m = m_0$ de sorte que $P(t_0 + (\prod_{p \in S} p)^r \cdot m_0)$ n'appartienne à aucune des classes exceptionnelles dans $\mathbb{Q}^\times / \mathbb{Q}^{\times 2}$.
L'équation

$$q(x, y, z) = P(t_0 + (\prod_{p \in S} p)^r \cdot m_0)$$

qui a une solution sur chacun des \mathbb{Z}_p et sur \mathbb{R} a alors une solution $(x, y, z) \in \mathbb{Z}$. CQFD

Supposons maintenant $P(t) = c.(r(t))^2$, soit $P(t) = c. \prod_i P_i(t)^{e_i}$,
avec les $P_i \in k[t]$ irréductibles et les e_i tous pairs.

Soit $d = -c.\det(q)$. Soit $k_i = k[t]/(P_i)$.

Si d carré dans k , alors $\text{Br}(k) = \text{Br}(\tilde{X}) = \text{Br}(U)$.

Si d non carré dans k et il existe un i avec d non carré dans k_i ,
alors $\text{Br}(k) = \text{Br}(\tilde{X})$ et $\text{Br}(U)/\text{Br}(k) = \mathbb{Z}/2$.

Si d non carré dans k et carré dans chaque k_i , alors
 $\text{Br}(\tilde{X})/\text{Br}(k) = \text{Br}(U)/\text{Br}(k) = \mathbb{Z}/2$.

De plus, pour tout $t_0 \in k$ avec $p(t_0) \neq 0$, la spécialisation
 $\text{Br}(U)/\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(U_{t_0})/\text{Br}(k)$ est surjective.

Soit k corps de nombres. D'après une proposition vue au début, pour établir le théorème principal pour \tilde{X} , il suffit de le faire pour U . Soit $v_0 \in S$ avec q isotrope en v_0 .

Considérons le cas $P(t) = c.(r(t))^2$ et d non carré dans k . On a alors $\xi \in \text{Br}(U)$ d'ordre 2 engendrant $\text{Br}(U)/\text{Br}(k)$.

On suppose que ξ s'annule sur un point $\{M_v\}$ de

$$\prod_{v \in S} U(k_v) \times \prod_{v \in T \setminus S} U_v \times \prod_{v \notin T} U(O_v)$$

où U_v est un ouvert dans $U(k_v)$.

Quitte à augmenter T , on peut supposer que q est non dégénérée sur o_T et que ξ s'annule sur $\mathcal{U}(O_v)$ pour $v \notin T$. Chaque M_v s'écrit (x_v, y_v, z_v, t_v) . Par approximation forte sur k , on peut trouver t_0 entier en dehors de T , très proche de t_v pour $v \in T \setminus \{v_0\}$.

On peut alors remplacer chaque M_v pour $v \in T$ par un P_v de projection t_0 (en v_0 , on utilise q isotrope), et qui de plus est très proche de M_v pour $v \in T \setminus \{v_0\}$. En tout tel v , on a $\xi(M_v) = \xi(P_v)$.

Pour tout $v \notin T$, on choisit P_v quelconque dans $\mathcal{U}_{t_0}(o_v)$.

La restriction de $\xi \in \text{Br}(U)$ engendre $\text{Br}(U_{t_0})/\text{Br}(k)$.

On a

$$\sum_v \xi(P_v) = \sum_v \xi(P_v) - \sum_v \xi(M_v) = \xi(P_{v_0}) - \xi(M_{v_0}) \in \mathbb{Z}/2.$$

Si d est un carré dans k_{v_0} , alors ξ est constant sur $U(k_{v_0})$.

Si d n'est pas un carré dans k_{v_0} , comme q est isotrope sur k_{v_0} , on a vu que ξ prend les deux valeurs $0, 1 \in \mathbb{Z}/2$ sur $U(k_{v_0})$. si $\xi(P_{v_0}) - \xi(M_{v_0}) \neq 0$, on change de P_{v_0} , ce qui est possible, et on assure

$$\sum_v \xi(P_v) = 0.$$

En appliquant le théorème d'approximation forte hors de S avec condition de Brauer-Manin sur les équations $q(x, y, z) = a$, on trouve un point de $U_{t_0}(k)$ dans la trace sur U_{t_0} de l'ouvert adélique donné au début. QED

Conjecture/presque théorème (CT-Harari, en cours).

Soit k un corps de nombres. Soit X une k -variété algébrique lisse et géométriquement intègre, et $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ un k -morphisme.

Supposons $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. Soit $K = k(\mathbb{A}^1)$ et soit G un K -groupe semisimple simplement connexe, absolument presque K -simple.

On suppose :

(i) La fibre générique X_η/K de f est un espace homogène de G à stabilisateurs toriques.

(ii) Les fibres de f sont géométriquement intègres.

(iii) Il existe une place v_0 de k telle que $f : X(k_{v_0}) \rightarrow \mathbb{A}^1(k_{v_0})$ est surjectif, et que les fibres lisses de f au-dessus des points de $\mathbb{A}^1(k_{v_0})$ sont non compactes.

Alors pour tout ensemble fini S de places de k contenant v_0 , l'image diagonale de $X(k)$ dans la projection de $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}X}$ sur $X(\mathbb{A}_k^S)$ est dense.

Exemple satisfaisant (i) et (ii),

Pour X prendre le lieu lisse, ou une désingularisation de la variété affine

$$\sum_{i=1}^3 a_i(t)x_i^2 = P(t),$$

où le produit $P(t) \cdot \prod_i a_i(t)$ est supposé sans facteur carré.

Aspects calculatoires de l'obstruction de Brauer-Manin entière.

– Reconnaître que divers exemples dans la littérature s'expliquent de ce point de vue.

– Pour certains types d'équations, faire la liste exacte des contraintes provenant du groupe de Brauer.

CT-Wittenberg

Pour n entier $n \not\equiv \pm 4 \pmod{9}$, et \mathcal{X}_n/\mathbb{Z} défini par

$$x^3 + y^3 + z^3 = n$$

puis $X_n = \mathcal{X}_n \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, on a

$$\left[\prod_p \mathcal{X}_n(\mathbb{Z}_p) \right]^{\text{Br}(X_n)} \neq \emptyset.$$