Formes homogènes en beaucoup de variables

J.-L. Colliot-Thélène
CNRS, Université Paris-Sud

Journée ENS/SMF
6 novembre 2009

k un corps
Notion de k-variété algébrique projective : un système d'équations homogènes à coefficients dans k dans un espace projectif $\mathbf{P}_k^N$.

Notion de variété irréductible : pas union de deux sous-variétés propres.
La $\mathbf{R}$-variété $x^2 + y^2 = 0$ est irréductible.

Notion de variété absolument irréductible : reste irréductible sur toute extension de k.
La $\mathbf{R}$-variété $x^2 + y^2 = 0$ n'est pas absolument irréductible.

Notion de variété lisse : critère jacobien.

Etant donnée une variété X sur un corps k, on s'intéresse à l'ensemble $X(k)$ de ses points rationnels : solutions à coordonnées dans k.

On définit l'indice $I(X/k)$ d'une variété X sur k comme le pgcd des degrés des extensions finies de corps K/k avec $X(K) \neq \emptyset$.

$$X(k) \neq \emptyset \Longrightarrow I(X/k) = 1$$

Deux énoncés classiques

Sur un corps fini $\mathbf{F}$, toute forme homogène $f(x_0, \ldots, x_n)$ de degré $d \leq n$ a un zéro non trivial (Chevalley 1935)

Sur le corps $\mathbf{C}(t)$, toute forme homogène $f(x_0, \ldots, x_n)$ de degré $d \leq n$ a un zéro non trivial (Tsen 1933)
Vaut aussi sur $\mathbf{C}((t))$ (Lang 1952)

Quelles généralisations ?

Une notion des années 1990

Une k-variété absolument irréductible est dite *rationnellement connexe* si les points de X sur tout corps algébriquement clos contenant k peuvent être reliés par des chaînes d'images algébriques de droites. (Kollár, Miyaoka, Mori)

Théorème : *Une hypersurface absolument irréductible et lisse* $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ *de degré* d *avec* $d \leq n$ *est rationnellement connexe.* (KMM; Campana)

Corps finis $\mathbf{F}$

Soit $X/\mathbf{F}$ une variété algébrique projective, non singulière, absolument irréductible, *rationnellement connexe*.
Alors $X(\mathbf{F}) \neq \emptyset$.
(Hélène Esnault, 2003)

Il existe $N(n, d, \delta)$ tel que si $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{F}}$ est une variété algébrique *absolument irréductible* de dimension d et de degré δ sur $\mathbf{F}$, et si $\mathrm{card}(\mathbf{F}) > N(n, d, \delta)$, alors $X(\mathbf{F}) \neq \emptyset$.
En particulier pour *toute* $\mathbf{F}$-variété X *absolument irréductible*, on a $I(X/\mathbf{F}) = 1$.
(..., Weil 1949, Lang-Weil 1954)

$\mathbf{C}(t)$ et $\mathbf{C}((t))$

Soit $X/\mathbf{C}(t)$ une variété algébrique projective, non singulière, absolument irréductible, *rationnellement connexe*. Alors X possède un point à coordonnées dans $\mathbf{C}(t)$.
(Graber, Harris et Starr, 2003)

Pas d'analogue de Lang-Weil. La courbe $X^3 + tY^3 + t^2Z^3 = 0$ a des points seulement sur les extensions de $\mathbf{C}((t))$ de degré divisible par 3.

Tsen et Lang

Si sur k toute forme homogène en $n > d^r$ variables a un zéro non trivial alors sur $k(t)$ et sur $k((t))$ toute forme homogène en $n > d^{r+1}$ variables a un zéro non trivial

Ainsi toute forme en $n > d^2$ variables sur $\mathbf{C}(t_1, t_2)$ a un zéro.
Y a-t-il dans ce cadre une bonne notion de variété “simplement rationnellement connexe” ?
(de Jong, Starr)

Corps p-adiques

Sur un corps $\mathbf{F}((t))$ toute forme de degré d en $n > d^2$ variables a un zéro.

Sur $\mathbf{Q}_p$, qui ressemble à $\mathbf{F}_p((t))$, toute forme de degré $d = 2$ ou 3 en strictement plus de d^2 variables a un zéro.

MAIS : il existe des formes de degré $d = 4$ en $n > d^2$ variables sans zéro (Terjanian 1966). Aucune condition du type $n > d^r$ ne suffit.

Conjecture de l'indice *p*-adique (Kato-Kuzumaki 1986)
(??) *Sur un corps p-adique k, pour toute hypersurface* $X \subset \mathbf{P}^n_k$ *de degré d avec* $n \geq d^2$*, on a* $I(X/k) = 1$.

Connu lorsque d est premier (Springer 1955, Kato-Kuzumaki 1986)

Il y a une traduction géométrique de cette question : existence d'un modèle sur $\mathbf{Z}_p$ avec une composante de la fibre spéciale de multiplicité 1 et absolument irréductible.

Il y a une question analogue pour un système de r formes de degré d en $n > r.d^2$ variables.

Pour $d = 2$, et r quelconque, c'est-à-dire pour un système de formes quadratiques, ceci vient d'être établi par Heath-Brown (2009).

La technique de Tsen permet alors de démontrer que sur un corps $\mathbf{Q}_p(t_1, \ldots, t_m)$ toute forme quadratique en $n > 4.2^m$ variables a un zéro.

Corps globaux

Corps de nombres :
extensions finies de $\mathbf{Q}$

Corps de fonctions d'une variables sur un corps fini :
extensions finies de $\mathbf{F}(t)$

Legendre 1785
Si une forme quadratique à coefficients entiers $ax^2 + by^2 + cz^2$ a des zéros primitifs modulo n pour tout entier $n > 0$, elle a une solution en entiers.

En d'autres termes : Si une conique sur $\mathbf{Q}$ a des points dans tous les $\mathbf{Q}_p$ et dans $\mathbf{R}$, elle a des points dans $\mathbf{Q}$.

Un phénomène curieux : il suffit de demander l'existence de solutions dans tous les $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{R}$ sauf un ! Le dernier vient gratuitement.

Ceci est l'un des points de départ de la loi de réciprocité quadratique (Gauß 1796), et plus généralement de la théorie du corps de classes.

Énoncé de Legendre généralisé par Minkowski (1890) et Hasse (1924) aux formes quadratiques en un nombre quelconque de variables sur un corps de nombres, d'où parfois le nom "Principe de Hasse" pour ce "principe" local-global.

Application : toute forme quadratique sur $\mathbf{Q}$ en au moins 5 variables a un zéro sur $\mathbf{Q}$ si elle a un zéro sur $\mathbf{R}$.

A partir de là, deux types de problèmes sur un corps global k

Recherche de classes de variétés X/k pour lesquelles le principe local-global vaut pour les points rationnels :

$$\forall v \text{ place de } k \;\; X(k_v) \neq \emptyset \Longrightarrow X(k) \neq \emptyset$$

Recherche de classes de variétés X/k pour lesquelles le principe local-global vaut pour l'indice

$$\forall v \text{ place de } k \;\; I(X_{k_v}/k_v) = 1 \Longrightarrow I(X/k) = 1$$

Depuis les années 1930, nombreux résultats pour certaines variétés algébriques :
– espaces homogènes de groupes algébriques
– formes homogènes en beaucoup de variables (méthode du cercle)

Mais même pour les espaces homogènes, le principe local-global ne vaut pas en général.

Il y a une obstruction, dont précisément la théorie du corps de classes permet de prendre la mesure.

On note $X(A_k) = \prod_v X(k_v)$

En utilisant le groupe de Brauer des variétés, on factorise l'inclusion évidente $X(k) \subset X(A_{k)}$ par l'ensemble de Brauer-Manin $X(A_k)^{Br}$

$$X(k) \subset X(A_k)^{Br} \subset X(A_k)$$

Ainsi $X(A_k)^{Br} \neq \emptyset$ est une condition nécessaire pour $X(k) \neq \emptyset$

Il y a une condition nécessaire analogue pour $I(X/k) = 1$.

Pour la surface S d'équation affine

$$y^2 + z^2 = (3 - x^2)(x^2 - 2)$$

sur le corps $\mathbf{Q}$, on a $\prod_v S(\mathbf{Q}_v) \neq \emptyset$
En utilisant la famille de coniques

$$U^2 + V^2 - (3 - x^2)W^2 = 0$$

paramétrée par $(x, y, z) \in S$, on montre $S(\mathbf{Q}) = \emptyset$

$$(??)\ X(A_k)^{Br} \neq \emptyset \Longrightarrow X(k) \neq \emptyset$$

Etabli pour la plupart des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires (Eichler, Kneser, Harder, Sansuc, Borovoi)

Conjecturé pour les espaces homogènes de groupes algébriques projectifs (= variétés abéliennes), par exemple pour les courbes de genre 1 (finitude des groupes de Tate-Shafarevich; version sur $\mathbf{F}(t)$: conjectures de Tate)

Récemment conjecturé pour les courbes de genre quelconque (Skorobogatov, Stoll); résultat de Poonen et Voloch 2007 sur $\mathbf{F}(t)$

$$(??)\ \ X(\mathbb{A}_k)^{Br} \neq \emptyset \Longrightarrow X(k) \neq \emptyset$$

Conjecturé pour l'espace total de beaucoup de familles à un paramètre de telles variétés, sous l'hypothèse que toutes les fibres géométriques sont de multiplicité 1, lien avec d'autres conjectures (conjecture des nombres premiers jumeaux généralisée), des résultats partiels depuis les années 1980
(CT, Coray, Sansuc, Swinnerton-Dyer, Skorobogatov, Harari, Wittenberg)

MAIS : l'énoncé

$$X(A_k)^{Br} \neq \emptyset \Longrightarrow X(k) \neq \emptyset$$

NE VAUT PAS en général (Skorobogatov 1999, Poonen 2008)

Travaux pour comprendre les nouvelles obstructions : Harari et Skorobogatov 2002, Demarche 2009
(Généralisations de la descente de Fermat, utilisation de torseurs sous des groupes non commutatifs)

Cependant

Conjecture locale-globale pour l'indice
(CT/Sansuc 1981, Kato/Saito 1983, ...)

(??) *Pour TOUTE variété projective, lisse, absolument irréductible X sur un corps de nombres k, l'obstruction à la Brauer-Manin à $I(X/k) = 1$ est la seule obstruction.*

Des résultats dans cette direction, pour k corps de nombres

Salberger 1987 : toute équation $a(t)U^2 + b(t)V^2 + c(t)W^2 = 0$

CT, Swinnerton-Dyer, Skorobogatov, Frossard, Wittenberg

Ppur k un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, lien (S. Saito 1989) avec la conjecture de Tate pour les cycles algébriques des variétés sur les corps finis. Mène à quelques cas particuliers de la conjecture.
Par exemple pour les surfaces de la forme $f + tg = 0$ sur le corps $k = \mathbf{F}(t)$, avec f et g deux formes de degré d *quelconque* sur $\mathbf{F}$ en 4 variables (CT/Sw-D. 2009).

La validité des deux conjectures sur l'indice impliquerait :

(??) Pour toute hypersurface non singulière $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ définie par une forme homogène de degré d, si $n \geq d^2$ et $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, alors $I(X/\mathbf{Q}) = 1$.

La technique de Tsen et Lang montre que si l'on remplace $\mathbf{Q}$ par $\mathbf{F}(t)$, alors *toute* hypersurface de degré d dans $\mathbf{P}^n_{\mathbf{F}(t)}$ avec $n \geq d^2$ a un zéro sur $\mathbf{F}(t)$.