Obstruction de Brauer–Manin entière pour les espaces homogènes

Jean-Louis Colliot-Thélène (CNRS et Université Paris-Sud)

Atelier de géométrie arithmétique :
Approximation diophantienne et théorie d'Arakelov
Institut Fields, Toronto, Ontario
24 octobre 2008
Slides in French
Oral presentation in English

Quelques énoncés sur les formes quadratiques entières

p premier

Équivalents :

(a) $p \equiv 1 \bmod 4$

(b) Pour tout l premier, $p = x^2 + y^2$ a une solution dans $\mathbf{Z}_l$

(c) $p = x^2 + y^2$ a une solution avec $x, y \in \mathbf{Z}$

p premier

Équivalents :

(a) $p \equiv 1 \bmod 3$

(b) Pour tout l premier, $p = x^2 + 27y^2$ a une solution dans $\mathbf{Z}_l$

(c) $p = x^2 + 27y^2$ *ou* $p = 4x^2 + 2xy + 7y^2$ a une solution avec $x, y \in \mathbf{Z}$

(Euler, Lagrange)

p premier, équation $p = x^2 + 27y^2$. Conditions équivalentes :

(a) Pour tout l premier, $p = x^2 + 27y^2$ a une solution dans $\mathbf{Z}_l$

et

$2 = z^3$ a une solution dans $\mathbf{F}_p$

(b) $p = x^2 + 27y^2$ a une solution avec $x, y \in \mathbf{Z}$

conjecturé par Euler, démontré par Gauß

Voir le livre de D. Cox, *Primes of the form* $x^2 + ny^2$

Un exemple de Borovoi et Rudnick

$-9x^2 + 2xy + 7y^2 + 2z^2 = 1$
soit encore
$(y - x)(9x + 7y) = 1 - 2z^2$

a une solution dans chaque $\mathbf{Z}_l$ mais n'a pas de solution dans $\mathbf{Z}$

Un exemple du livre de Cassels *Rational quadratic forms*

m entier, $m \equiv 3 \bmod 8$

$m^2 = x^2 - 2y^2 + 64z^2$
soit encore
$(x - m)(x + m) = 2y^2 - 64z^2$

a une solution *primitive* dans chaque $\mathbf{Z}_l$ mais n'a pas de solution *primitive* dans $\mathbf{Z}$

solution primitive :
$(x, y, z) = 1$

La forme quadratique $x^2 + 32y^2$ est représentée par la forme quadratique $x^2 + 128y^2 + 128yz + 544z^2 - 64t^2$ sur chaque $\mathbf{Z}_l$ mais pas sur $\mathbf{Z}$

(Siegel)

Soient n, m, k des entiers positifs, $(n, m) = 1$. L'équation

$$m^2x^2 + n^{2k}y^2 - nz^2 = 1$$

Cette équation a une solution dans tout $\mathbf{Z}_l$.
En utilisant la théorie des genres, F. Xu et R. Schulze-Pillot ont montré :
Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbf{Z}$ exactement dans les deux cas suivants :
(i) 2 divise exactement m et $n \equiv 5\ (8)$
ou
(ii) 4 divise m et $n \equiv 3 \text{ ou } 5\ (8)$

Théorème (Eichler, Kneser)
Soit $q(x_1, \ldots, x_n)$ une forme quadratique entière *indéfinie* en $n \geq 4$ variables. L'équation

$$m = q(x_1, \ldots, x_n)$$

a une solution dans $\mathbf{Z}$ si et seulement si elle a une solution dans tous les $\mathbf{Z}_l$.

Il y a aussi un théorème analogue avec les solutions primitives.

La théorie du corps de classes
et
son cortège de suites exactes

k un corps de nombres, A son anneau des entiers, A_v le complété de A en une place v, et k_v le corps des fractions.
I_k^* le groupe des idèles modifié, où aux places infinies on a remplacé $k_v^\times$ par $k_v^\times / k_v^{\times 2}$
On a l'homomorphisme de réciprocité

$$\rho : I_k^* \to \mathrm{Gal}^{ab}(k)$$

L'image de $k^\times \to I_k^*$ est dans le noyau de ρ, et elle *dense dans ce noyau*.

$$\mathrm{Gal}^{ab}(k) = \mathrm{Hom}(H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(H^2(k, \mathbf{Z}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

Versions à niveau fini : à un sous-groupe ouvert U de I_k^* on associe une extension abélienne finie L_U/k (le corps de classes associé à cet ouvert) et on a $I_k^*/k^\times.U \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Gal}(L_U/k)$.

Une version tordue à la Tate-Nakayama pour $T(k) = H^0(k, T)$

T un k-tore algébrique. On a un complexe

$T(k) \to \prod^* T(k_v) \to \mathrm{Hom}(H^2(k, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$
où dans le produit restreint, pour v archimédienne, on remplace $T(k_v)$ par $T(k_v)/2$.
(Cas précédent : $T = \mathbb{G}_{m,k}$)

Théorème (Harari)
L'adhérence de l'image de $T(k)$ est le noyau de la flèche $\prod^* T(k_v) \to \mathrm{Hom}(H^2(k, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Version groupe de Brauer

A tout corps F on associe son groupe de Brauer $\mathrm{Br} F$

Corps de classes local

$\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br} k_v \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$

Corps de classes global, suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br} k \to \oplus_v \mathrm{Br} k_v \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$$

Tate-Nakayama classique

T un k-tore

$$H^1(k, T) \to \oplus_v H^1(k_v, T) \to Hom(H^1(k, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

Il y a aussi une information sur le noyau à gauche

Généralisation non commutative (Kottwitz, ...)
H/k groupe linéaire connexe

$$H^1(k, H) \to \prod_v^* H^1(k_v, H) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(H), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

(terme du milieu, produit restreint, éléments égaux à 1 pour presque toute place v)

Coefficients finis (Poitou-Tate)

$$H^1(k,\mu) \to \prod_v^{*} H^1(k_v,\mu) \to Hom(H^1(k,\hat{\mu}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

Produit restreint par rapport aux divers $H^1(O_v,\mu)$ pour v place de bonne réduction

Il y a une version “finie” : si S est un ensemble fini de places de k contenant les places de mauvaise réduction pour μ et $\hat{\mu}$, et A_S est l'anneau des S-entiers de k, alors on a la suite exacte de groupes finis

$$H^1(A_S, \mu) \to \oplus_{v \in S} H^1(k_v, \mu) \to \mathrm{Hom}(H^1(A_S, \hat{\mu}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$$

L'obstruction de Brauer–Manin entière

Le groupe de Brauer d'un schéma

Sur une variété algébrique et plus généralement sur un schéma X, les fibrés vectoriels sont les analogues des espaces vectoriels sur un corps.
Les algèbres d'Azumaya sur un schéma sont les analogues naturels des algèbres simples centrales sur un corps.
On peut introduire une relation d'équivalence sur les algèbres d'Azumaya qui étend celle donnée pour les algèbres simples centrales sur un corps. L'ensemble des classes d'équivalence forme un groupe abélien, le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ de X.
Soit X un schéma. Pour tout anneau commutatif R il y a un accouplement naturel $X(R) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(R)$.

Soient k un corps de nombres, A son anneau des entiers, X un A-schéma séparé de type fini.
La loi de réciprocité pour le groupe de Brauer donne :
L'image de $X(A)$ dans $\prod_v X(A_v)$ est dans le noyau à gauche de l'accouplement (bien défini)

$$\prod_v X(A_v) \times \mathrm{Br}(X_k) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

$$(\{M_v\}, \alpha) \mapsto \sum_v \mathrm{inv}_v(\alpha(M_v)).$$

On note ce noyau $(\prod_v X(A_v))^{\mathrm{Br}(X_k)}$.

De $X(A) \subset (\prod_v X(A_v))^{\mathrm{Br}(X_k)}$ on conclut :
si $(\prod_v X(A_v))^{\mathrm{Br}(X_k)} = \emptyset$, alors $X(A) = \emptyset$: il n'y a pas de point entier.
Ceci est une version "entière" de l'obstruction de Brauer-Manin (1970).

Cette obstruction a été principalement étudiée lorsque X/A est propre, auquel cas $X(A) = X(k)$ et $X(A_v) = X(k_v)$: on étudiait les points rationnels des variétés.

Espaces homogènes de tores algébriques

Théorème 1 (Harari).
Soient k un corps de nombres, A son anneau des entiers, X un A-schéma séparé de type fini.
Si X_k est un espace homogène d'un k-tore T, alors $(\prod_v X(A_v))^{\mathrm{Br}(X_k)} \neq \emptyset$ implique $X(A) \neq \emptyset$.

On utilise la suite de Tate-Nakayama pour $H^1(k, T)$ pour établir qu'alors $X(k) \neq \emptyset$, donc $X_k \simeq T$, puis le complexe :

$$T(k) \to \prod^{*} T(k_v) \to \mathrm{Hom}(H^2(k, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

et l'on utilise une inclusion naturelle $H^2(k, \hat{T}) \subset \mathrm{Br}\, T$.
On s'est donné des points $x_v \in X(A_v) \subset T(k_v)$.
La suite exacte donne des $x_0 \in T(k)$ entiers aux places de bonne réduction et proches de x_v aux places de mauvaise réduction : cela donne donc des points entiers de X/A.

Problème : le groupe $H^2(k, \hat{T}) \subset \mathrm{Br} X_k / \mathrm{Br} k$ est en général infini, donc on a a priori une infinité de conditions à vérifier !

On peut cependant, par des arguments arithmétiques, i.e. faisant intervenir des choses comme le groupe des classes d'idéaux de k, se réduire en principe à un nombre fini de calculs.

Exemple : L'équation $c = x^2 - dy^2$, avec $c, d \in A$.
Ce cas particulier du résultat de Harari a aussi été obtenu par XU Fei et WEI Dasheng. Ces derniers discutent comment se ramener à un nombre fini de calculs.

On fixe un ensemble fini S_0 de places de k contenant les places archimédiennes, tel que l'application diagonale $A^*_{S_0}/A^{*2}_{S_0} \to \prod_{v\in S_0} A^*_v/A^{*2}_v$ soit injective.
On considère l'extension $K = k(\sqrt{d})$, B son anneau des entiers, $R = A[\sqrt{d}] \subset B$. On considère un sous-groupe ouvert $\prod_v U_v \subset I^*_K$ avec $U_v = R^\times_v$ pour $v \notin S_0$ et $U_v \subset B^{\times 2}_v$ pour $v \in S_0$. On note L/K l'extension abélienne associée à cet ouvert par la théorie du corps de classes.
Soit S un ensemble fini contenant S_0 et les places divisant $2cd$. Le problème se ramène à chercher $x_v, y_v \in A_v$ pour $v \in S$ avec $c = x_v^2 - dy_v^2$ et tel que l'image de la famille $\{x_v + \sqrt{d}y_v\}_{v\in S}$ par l'application de réciprocité à valeurs dans le groupe abélien fini $\mathrm{Gal}(L/K)$ soit triviale.
Il y a cependant encore un problème : déterminer effectivement l'extension finie L/K !

C'est ainsi que Cox arrive à l'énoncé très élégant :

Soit n entier positif. Un nombre premier p qui ne divise pas $2n$ s'écrit $x^2 + ny^2$ avec $x, y \in \mathbf{Z}$ si et seulement si p est totalement décomposé dans le corps de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ associé à l'ordre $\mathbf{Z}[\sqrt{-n}]$.

Ceci mène au critère pour la représentation d'un premier par $x^2 + 27y^2$: le polynôme $X^3 - 2$ est le polynôme minimal d'un générateur du corps de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ associé à l'ordre $\mathbf{Z}[\sqrt{-27}]$.

Espaces homogènes de groupes semisimples

Théorème 2 (CT et Xu)

Soient k un corps de nombres, A son anneau des entiers, X un A-schéma séparé de type fini. Soit G un k-groupe semisimple simplement connexe presque simple. Supposons que X_k est un espace homogène de G à stabilisateurs des groupes *connexes*. Supposons $G(k_v)$ non compact pour au moins une place archimédienne de k.

Alors $(\prod_v X(A_v))^{\mathrm{Br}(X_k)} \neq \emptyset$ implique $X(A) \neq \emptyset$.

Esquisse de démonstration

On commence par établir $X(k) \neq \emptyset$ (Sansuc, Borovoi). Ceci utilise le *principe de Hasse pour les espaces homogènes principaux des groupes semisimples simplement connexes* (Harder, Kneser, Chernousov).
On fixe un k-point de X et on note H le k-groupe connexe stabilisateur d'un k-point. On a alors $G/H \xrightarrow{\simeq} X$. De ceci l'on déduit $\mathrm{Pic} H \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br} X/\mathrm{Br} k$.
On utilise de nouveau le principe de Hasse mentionné, le *théorème d'approximation forte pour les groupes semisimples simplement connexes* (Eichler, Kneser), la suite de Tate-Nakayama généralisée par Kottwitz, et une chasse dans le grand diagramme suivant, où $\mathcal{A}_k$ est l'anneau des adèles.

$$\begin{array}{ccccc}
G(k) & \to & G(\mathcal{A}_k) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
X(k) & \to & X(\mathcal{A}_k) & \to & \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}X_k/\mathrm{Br}k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(k, H) & \to & \prod_v^* H^1(k_v, H) & \to & \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
H^1(k, G) & \to & \prod_v H^1(k_v, G). & &
\end{array}$$

Les deux suites verticales de gauche sont des suites exactes d'ensembles pointés de cohomologie galoisienne.

Le quotient $\mathrm{Br}(X_k)/\mathrm{Br}k \simeq \mathrm{Pic}H$ est ici un groupe fini, pour des raisons purement algébriques, et on voit qu'il n'y a à calculer que des accouplements avec les points locaux aux places de mauvaise réduction. On n'a pas à se préoccuper de calculs de groupes de classes d'idéaux.

Théorème 3 (CT et Xu)

Soient k un corps de nombres, A son anneau des entiers, X un A-schéma séparé de type fini. Soit G un k-groupe semisimple simplement connexe presque simple. Supposons que X_k est un espace homogène de G à stabilisateurs géométriques des groupes *finis abéliens*.

Supposons $G(k_v)$ non compact pour au moins une place archimédienne de k.

Alors $(\prod_v X(A_v))^{\mathrm{Br}(X_k)} \neq \emptyset$ implique $X(A) \neq \emptyset$.

Esquisse de démonstration

On commence par établir $X(k) \neq \emptyset$ (Sansuc, Borovoi). Ceci utilise le principe de Hasse pour les groupes semisimples simplement connexes (Harder, Kneser, Chernousov).
On fixe un k-point de X et on note μ le k-groupe fini abélien stabilisateur de ce k-point. On a alors $G/\mu \xrightarrow{\simeq} X$.
On utilise le principe de Hasse pour G, l'approximation forte pour le groupe semisimple simplement connexe G, un plongement naturel $H^1(k, \hat{\mu}) \hookrightarrow \mathrm{Br}X/\mathrm{Br}k$ et la suite de Poitou-Tate (à coefficients μ), et le diagramme commutatif :

$$
\begin{array}{ccccc}
G(k) & \to & G(\mathcal{A}_k) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
X(k) & \to & X(\mathcal{A}_k) & \to & \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}X/\mathrm{Br}k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(k,\mu) & \to & \prod_v^* H^1(k_v,\mu) & \to & \mathrm{Hom}(H^1(k,\hat{\mu}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
H^1(k,G) & \to & \prod_v H^1(k_v,G) & &
\end{array}
$$

Problème : Le groupe $H^1(k, \hat{\mu}) \hookrightarrow \mathrm{Br}X/\mathrm{Br}k$ est en général infini. On peut se ramener à un calcul fini en utilisant la suite finie de Poitou-Tate pour un ensemble fini S de places de mauvaise réduction, mais on doit alors calculer un groupe $H^1(A_S, \mu)$, ce qui fait intervenir des calculs de groupes d'unités et de groupes de classes d'idéaux.

Applications à la représentation par des formes quadratiques

Pour simplifier, je suppose maintenant $k = \mathbf{Q}$.
On s'intéresse traditionnellement à la représentation d'un entier par une forme quadratique non dégénérée, et plus généralement à la représentation d'une forme quadratique non dégénérée $g(x_1, \ldots, x_n)$ par une forme quadratique $f(y_1, \ldots, y_m)$, avec $1 \leq n \leq m$. On cherche à trouver des formes linéaires $l_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, m$ telles que

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(l_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, l_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Ceci définit un schéma $X = X(g, f)/\mathbf{Z}$, dont on suppose qu'il a des points sur chaque $\mathbf{Z}_l$ et dont on demande s'il a des points sur $\mathbf{Z}$.

Soit $m \geq 3$.
Supposons $X(\mathbf{Q}) \neq \emptyset$.

On a $X_{\mathbf{Q}} \simeq \mathrm{Spin}(g)_{\mathbf{Q}}/H$ avec

H simplement connexe si $m - n \geq 3$

H un k-tore de dimension 1 si $m - n = 2$

$H = \mu_2$ si $m - n = 1$

Supposons désormais la forme quadratique g indéfinie.

Pour $m - n \geq 3$, H est simplement connexe, donc $\mathrm{Pic} H = 0$, le groupe de Brauer de X est trivial : on retrouve l'énoncé classique de Eichler et Kneser : principe local-global pour la représentation d'une forme quadratique par une autre, en particulier pour la représentation d'un entier non nul par une forme quadratique indéfinie de rang au moins 4.
Ce n'est pas étonnant : Ce genre d'énoncé est à l'origine des travaux de Kneser qui menèrent au théorème d'approximation forte.

Supposons $m - n = 2$.
Le groupe H est un k-tore T de dimension 1 déployé par l'extension quadratique $K = k(\sqrt{d})$ avec $d = -\mathrm{disc}(f).\mathrm{disc}(g)$.
Supposons d non carré. Alors
$\mathrm{Br}(G/H)/\mathrm{Br}k = \mathrm{Pic}(T) = H^1(k, \hat{T}) = \mathbf{Z}/2$.

Le cas $m = 3, n = 1$. Soit $a \in \mathbf{Z}$ non nul, et soit $f(x, y, z)$ une forme quadratique ternaire indéfinie non dégénérée.
Soit X le $\mathbf{Z}$-schéma $a = f(x, y, z)$. Supposons $X(\mathbf{Z}_l) \neq \emptyset$ pour tout l.

Algorithme
a) Trouver un point $\mathbf{Q}$-rationnel P sur X.
b) Soit $l(x, y, z) = 0$ une équation de l'espace tangent à X en P.
c) Fait : L'algèbre de quaternions $Q = (l(x, y, z), -a.\mathrm{disc}(f))$ définit une classe dans $\mathrm{Br} X_{\mathbf{Q}}$. Ceci implique : pour presque toute place v, Q s'annule sur $X(\mathbf{Z}_v)$.
d) Calculer l'image de l'application $\prod_v X(\mathbf{Z}_v) \to \mathbf{Z}/2$ donnée par la somme des évaluations de Q.
e) $X(\mathbf{Z}) \neq \emptyset$ si et seulement si 0 est dans l'image de cette application. C'est le cas en particulier s'il existe une place v telle que Q prenne deux valeurs distinctes sur $X(\mathbf{Z}_v)$.

La famille d'exemples de Schulze-Pillot et XU Fei
Soient n, m, k des entiers positifs, $(n, m) = 1$. L'équation

$$m^2x^2 + n^{2k}y^2 - nz^2 = 1$$

peut se réécrire

$$(1 + n^k y)(1 - n^k y) = m^2x^2 - nz^2.$$

Soit $X/\mathbf{Z}$ le schéma que cette équation définit.
On vérifie $\prod_{p \cup \infty} X(\mathbf{Z}_p) \neq \emptyset$. L'espace tangent au point $\mathbf{Q}$-rationnel évident $(0, -1/n^k, 0)$ est donné par $1 + n^k y = 0$.
L'algèbre de quaternions $Q = (1 + n^k y, n)$ est dans $\mathrm{Br}(X_{\mathbf{Q}})$.

Pour $p \neq 2$, l'image de $ev_Q : X(\mathbf{Z}_p) \to \mathrm{Br}(\mathbf{Q}_p) \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est nulle.
Pour $p = 2$, l'image de cette application coïncide avec
$\{1/2\} \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ si et seulement si
(i) 2 divise exactement m et $n \equiv 5$ (8)
ou
(ii) 4 divise m et $n \equiv 3 \text{ or } 5$ (8)

Il y a donc obstruction de Brauer–Manin exactement dans ces cas.
La théorie démontre que dans les autres cas, $X(\mathbf{Z}) \neq \emptyset$.

Le langage classique

Soient $f(x_1, \ldots, x_n)$ et $g(y_1, \ldots, y_m)$ des formes quadratiques sur $\mathbf{Z}$ comme plus haut, $1 \leq n < m$ avec $m \geq 3$
On associe classiquement à f et g des réseaux quadratiques (Gitter) N et M dans un vectoriel fixe.
Soit $X = X(f, g)/\mathbf{Z}$.

Das Gitter N wird von der Klasse des Gitters M dargestellt.
(Le réseau quadratique N est représenté par la classe du réseau quadratique M)

Traduction :

$X(\mathbf{Z}) \neq \emptyset$

Das Gitter N wird von dem Geschlecht des Gitters M dargestellt. (Le réseau quadratique N est représenté par le genre du réseau quadratique M)

Traduction :

$\prod_v X(\mathbf{Z}_v) \neq \emptyset$

Das Gitter N wird von dem Spinorgeschlecht des Gitters M dargestellt.
(Le réseau quadratique N est représenté par le genre spinoriel du réseau quadratique M)

Traduction :

$(\prod_v X(\mathbf{Z}_v))^{\mathrm{Br} X_{\mathbf{Q}}} \neq \emptyset$

Supposons $m - n = 2$ et $-\mathrm{disc}(f).\mathrm{disc}(g)$ non carré.

Ein Gitter N, das zwar von dem Geschlecht von M dargestellt ist, nicht aber von allen Spinorgschlechtern im Geschlecht von M dargestellt wird, nennt man eine Spinorausnahme.
(Un réseau N représenté par le genre de M est appelé une exception spinorielle pour le genre de M s'il existe un genre spinoriel dans le genre de M tel qu'aucun réseau dans ce genre spinoriel ne représente M.)

Traduction

Soit $A \in \mathrm{Br}X_{\mathbf{Q}}$ engendrant $\mathrm{Br}X_{\mathbf{Q}}/\mathrm{Br}\mathbf{Q} = \mathbf{Z}/2$. Alors pour chaque premier p, A ne prend qu'une seule valeur sur $X(\mathbf{Z}_p)$.

Futur pour l'obstruction de Brauer–Manin entière ?

D. Harari : Espaces homogènes de variétés semiabéliennes, si l'on accepte la finitude des groupes de Tate–Shafarevich. Ceci utilise la théorie de la dualité (locale et globale) pour les 1-motifs, développée par Harari et Szamuely.

Y a-t-il une extension de la théorie présentée ici pour les espaces homogènes de groupes semisimples anisotropes en toutes les places archimédiennes ? Dans la théorie de la représentation par les formes quadratiques définies il y a des contre-exemples curieux au principe local-global.

Le cas des espaces homogènes de groupes semisimples connexes à stabilisateurs géométriques des groupes finis non commutatifs semble très difficile. De fait, même les problèmes sur l'existence des points rationnels semblent hors d'atteinte.

On peut utiliser l'obstruction de Brauer–Manin entière pour donner des contre-exemples au principe de Hasse entier pour des équations $f(x, y, z) = 1$ bien choisies, avec f homogène de degré 3 ou 4 (Kresch–Tschinkel), et aussi pour le complémentaire de $f(x, y, z) = 0$ dans $\mathbb{P}^2$, ce qui correspond à une équation du type $f(x, y, z) = u$ avec u unité non fixée.

Le cas fameux de l'équation

$$n = x^3 + y^3 + z^3$$

a résisté.