APPROXIMATION FORTE EN FAMILLE

par

Jean-Louis Colliot-Thélène & David Harari

***Résumé.* —** Soient k un corps de nombres et X une k-variété affine lisse intègre fibrée au-dessus de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$. Supposons que toutes les fibres sont géométriquement intègres, et que la fibre générique est un espace homogène sous un groupe semisimple simplement connexe presque simple $G/k(t)$, les stabilisateurs géométriques étant réductifs connexes. Soit v une place de k telle que la fibration $X \to \mathbb{A}^1_k$ admette une section rationnelle sur le complété k_v. Supposons en outre que pour presque tout point $x \in \mathbb{A}^1(k_v)$ le k_v-groupe G_x soit isotrope. Supposons enfin le groupe de Brauer de X réduit à celui de k. Alors l'approximation forte vaut pour X en dehors de la place v.

***Abstract.* —** Let k be a number field and X a smooth integral affine variety equipped with a surjective morphism $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ to the affine line. Assume that all fibres of f are split, for instance that they are geometrically integral. Assume that the generic fibre of f is a homogeneous space of a simply connected, almost simple, semisimple group $G/k(t)$, and that the geometric stabilizers are connected reductive groups. Let v be a place of k such that the fibration f acquires a rational section over the completion k_v at v. Assume moreover that at almost all points in $x \in \mathbb{A}^1(k_v)$ the specialized group G_x is isotropic over k_v. If the Brauer group of X is reduced to the Brauer group of k, then strong approximation holds for X away from the place v.

1. Introduction

On dit qu'une variété algébrique X définie sur un corps de nombres k et qui possède des points dans tous les complétés de k satisfait l'approximation forte en dehors d'un ensemble fini S de places du corps k si l'image diagonale de l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X est dense dans l'espace $X(\mathbb{A}_k^S)$ des points adéliques de X hors de S.

Lorsqu'une telle propriété vaut, elle implique pour tout modèle de X audessus de l'anneau des S-entiers de k un principe local-global pour l'existence de points S-entiers.

Pour S non vide, l'approximation forte est une propriété bien connue des espaces affines. Cette propriété a été établie par M. Kneser et V. P. Platonov pour tout k-groupe semisimple simplement connexe presque k-simple, sous l'hypothèse que le produit des points locaux de G aux places de S est non compact.

Il a été observé que cette propriété ne s'étend pas aux groupes non simplement connexes. Cependant, une obstruction de type Brauer-Manin a été dégagée [**9**] et il a été montré dans une série d'articles (voir [**3**]) que sous des hypothèses très larges elle contrôle le défaut d'approximation forte pour les espaces homogènes de groupes linéaires connexes.

Tout comme cela est entrepris pour le problème analogue pour les points rationnels, on souhaite élargir la classe des variétés pour lesquelles on a un tel contrôle sur les points entiers. L'obstruction de Brauer-Manin entière est en effet définie pour toute variété [**10**]. Elle a été calculée pour quelques variétés qui ne sont pas des espaces homogènes [**20, 11**], mais sans que l'on puisse dire s'il s'agit là de la seule obstruction.

Dans [**10**], Fei Xu et le premier auteur étudient l'approximation forte pour certains modèles lisses X des variétés définies sur un corps de nombres k par une équation

$$q(x, y, z) = p(t),$$

où $q(x, y, z)$ est une forme quadratique non dégénérée à coefficients dans un corps de nombres k et $p(t) \in k[t]$ est un polynôme non nul en une variable. S'il existe une place v_0 telle que $q(x, y, z)$ est isotrope sur le complété k_{v_0}, on a établi que l'image diagonale de $X(k)$ dans la projection de l'ensemble de Brauer–Manin $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}X}$ sur $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$ (adèles hors de v_0) est dense.

Inspirés par cet exemple, nous établissons un résultat général pour les familles à un paramètre d'espaces homogènes. Nous montrons :

Théorème A (voir le théorème 3.5). *Soit X une k-variété lisse connexe munie d'un morphisme $f : X \to \mathbb{A}_k^1$ satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) la fibre générique de f est un espace homogène d'un $k(t)$-groupe semisimple simplement connexe presque simple G_t, et les stabilisateurs géométriques pour cette action sont réductifs connexes ;

(ii) les fibres de f sont scindées, par exemple géométriquement intègres ;

(iii) il existe une place v_0 telle que la fibration f ait une section rationnelle sur k_{v_0}, et que, pour presque tout $t_0 \in k_{v_0}$ le groupe spécialisé G_{t_0} est isotrope.

(iv) Les éléments du groupe de Brauer $\mathrm{Br}X$ prennent une valeur constante lorsqu'on les évalue sur $X(k_{v_0})$.

Alors l'image diagonale de $X(k)$ dans la projection de l'ensemble de Brauer–Manin $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}X}$ sur $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$ est dense.

Sous les hypothèses (i) et (ii) du théorème, le quotient $\mathrm{Br}X/\mathrm{Br}k$ est fini.

Comme nous l'a fait remarquer Dasheng Wei, même pour v_0 réelle, on ne peut pas espérer que la conclusion du théorème soit satisfaite si la projection sur $\mathbb{A}^1(k_{v_0})$ de $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}X}$ est compacte ; il est donc clair qu'il faut une condition en v_0, condition qui est ici assurée par la combinaison de nos hypothèses (iii) et (iv). Noter qu'en particulier l'hypothèse (iv) est automatiquement satisfaite dans plusieurs cas intéressants, voir la Remarque 3.10. Les hypothèses (iii) et (iv) sont toujours satisfaites si v_0 est complexe.

L'exemple suivant représente déjà une vaste généralisation des principaux résultats de [**10**].

Théorème B (théorème 4.2). *Soient $a_i(t), i = 1, 2, 3,$ et $p(t)$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Soit $X \subset \mathbb{A}_k^4$ l'ouvert de lissité de la k-variété affine Y d'équation*

$$\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 = p(t).$$

Soit v_0 une place de k. On suppose que la conique d'équation $\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 = 0$ sur le corps $k(t)$ a un point rationnel sur le corps $k_{v_0}(t)$.

Si le produit $p(t).\prod_i a_i(t)$ est un polynôme non constant séparable, alors $X = Y$ et l'approximation forte vaut pour X hors de v_0 : l'image diagonale de $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$ (adèles hors de v_0).

Quand v_0 est complexe, on a l'énoncé plus général que l'image diagonale de $X(k)$ dans la projection de l'ensemble de Brauer–Manin $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}X}$ sur $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$ (adèles hors de v_0) est dense sans avoir besoin de l'hypothèse supplémentaire sur le produit $p(t).\prod_i a_i(t)$.

À titre d'illustration, voici un cas particulier.

Théorème C. *Soient $a_i(t), i = 1, 2, 3,$ et $p(t)$ dans $\mathbb{Z}[t]$ des polynômes. Supposons le produit $p(t).\prod_i a_i(t)$ non constant et séparable dans $\mathbb{Q}[t]$. Soit*

$\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ le schéma affine défini dans $\mathbb{A}^4_{\mathbb{Z}}$ par

$$\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 = p(t).$$

Supposons que pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ la conique $\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 = 0$ a un point dans $\mathbb{R}$. Alors le principe local-global et l'approximation forte valent pour les points entiers de $\mathcal{X}$: L'image diagonale de $\mathcal{X}(\mathbb{Z})$ est dense dans le produit $\prod_p \mathcal{X}(\mathbb{Z}_p)$ des solutions locales entières sur tous les premiers p.

Le lecteur peut se demander pourquoi dans les deux énoncés précédents on considère une forme quadratique à trois variables dans le membre de gauche de l'équation.

Lorsque l'on prend au moins 4 variables, sous l'hypothèse que le produit $p(t).\prod_i a_i(t)$ est non constant et séparable dans $\mathbb{Q}[t]$, une méthode de fibration simple [**10**, §3] donne l'analogue du résultat ci-dessus.

Par contre, quand on considère le problème avec 2 variables, la question de l'existence et de la densité des solutions entières d'une équation aussi simple que

$$x^2 + ay^2 = p(t),$$

avec $a \in k$ non carré et $p(t)$ polynôme séparable de degré au moins 3, est hors d'atteinte de toutes les techniques connues. Il y a deux difficultés essentielles : d'une part pour toute k-fibre lisse X_t le quotient $\mathrm{Br}\, X_t/\mathrm{Br}\, k$ est infini, d'autre part les fibres correspondant aux zéros du polynôme $p(t)$ ne sont pas scindées.

Disons maintenant un mot sur les méthodes employées dans l'article.

Dans une série d'articles [**17, 18, 19**], le second auteur a étudié le principe de Hasse et l'approximation faible en familles pour les points rationnels, en tenant compte des contraintes provenant du groupe de Brauer. Ces articles supposent la fibration $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ propre. Les démonstrations comportent essentiellement deux aspects : un aspect algébrique, l'étude du comportement du groupe de Brauer en famille et un aspect arithmétique, le choix d'une fibre dont l'ensemble de Brauer-Manin est non vide.

Pour le problème que nous considérons ici, la fibration n'est pas propre. La fibre générique est un espace homogène d'un groupe semisimple simplement connexe. La bonne connaissance que nous avons du groupe de Picard et du groupe de Brauer de tels espaces nous permet de les étudier en famille, ce qui donne la partie algébrique de la démonstration (Théorème 2.6).

Pour l'aspect arithmétique, dans le contexte d'approximation forte du présent article, un problème nouveau se présente : on doit travailler avec une place exceptionnelle v_0 qui est imposée au départ. Pour le résoudre, on développe *une variante nouvelle de la méthode des fibrations* (méthode qui avait été employée dans [**17**], [**18**] et [**19**]) : le principal ingrédient supplémentaire est une version raffinée du théorème d'approximation forte combinée à un argument de type irréductibilité de Hilbert (proposition 3.4).

Ces techniques permettent une réduction du problème d'approximation des points entiers sur X au cas des points entiers d'une fibre convenable du morphisme $f : X \to \mathbb{A}^1_k$, fibre qui est un espace homogène d'un k-groupe semi-simple simplement connexe, espace auquel on peut appliquer les résultats sur l'obstruction de Brauer-Manin entière établis par Fei Xu et le premier auteur [**9**], puis généralisés par Borovoi et Demarche [**3**].

Conventions et notations

Soit k un corps. Une k-variété X est par définition un k-schéma séparé de type fini. On note $k[X]^\times$ le groupe des fonctions inversibles sur X.

Si la k-variété X est intègre, on note $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles.

Une k-variété est dite *scindée* si elle contient un ouvert non vide qui comme k-variété est géométriquement intègre.

Soit $\overline{k}$ une clôture séparable de k. Pour toute k-variété X, on note $\overline{X}$ la $\overline{k}$-variété $X \times_k \overline{k}$. De même si S est un schéma et $\mathcal{X}$ un S-schéma, on note $\mathcal{X}_T := \mathcal{X} \times_S T$ pour tout S-schéma T.

On note $\mathrm{Pic}\, X$ le groupe de Picard d'un schéma X et $\mathrm{Br} X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Brauer. On désigne aussi par $X^{(1)}$ l'ensemble des points de codimension 1 de X.

Soit k un corps de nombres. Pour v une place de k on note k_v le complété de k en v, et pour v non archimédienne, on note $O_v \subset k_v$ l'anneau des entiers. Pour S un ensemble fini de places de k, on note $\mathcal{O}_S \subset k$ l'anneau des entiers hors de S.

Pour la définition et les généralités sur l'obstruction de Brauer–Manin entière, nous renvoyons le lecteur aux introductions de [**9**] et [**10**]. En particulier si X est une k-variété, on note $X(\mathbb{A}_k)$ (resp. $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$) l'ensemble de ses points adéliques (resp. de ses points adéliques hors de v_0) ; pour tout sous-ensemble B de $\mathrm{Br} X$, on note $X(\mathbb{A}_k)^B$ le sous-ensemble de $X(\mathbb{A}_k)$ constitué des points adéliques orthogonaux à B pour l'accouplement de Brauer-Manin et on pose $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} := X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br} X}$.

2. Spécialisation du groupe de Brauer

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème 2.6, analogue dans le présent cadre du théorème 2.3.1 de [**18**], qui traitait de fibrations propres sur la droite affine. Il faut adapter au présent contexte tous les arguments du §2 de [**18**].

Proposition 2.1. — *Soit R un anneau de valuation discrète de corps résiduel k de caractéristique zéro. Soit K le corps des fractions de R. Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma lisse à fibres géométriquement intègres. Soit $p : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$ le morphisme structural. Soit X/K la fibre générique et Y/k la fibre spéciale. Supposons $H^1_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, c'est-à-dire que la fibre spéciale géométrique n'a pas de revêtement abélien connexe non trivial. Alors la flèche de restriction $\mathrm{Br}\mathcal{X} \to \mathrm{Br}X$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Br}\mathcal{X}/\mathrm{Br}R \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{Br}X/\mathrm{Br}K$$

et une flèche de spécialisation

$$\mathrm{Br}X/\mathrm{Br}K \to \mathrm{Br}Y/\mathrm{Br}k.$$

(On fait systématiquement l'abus de langage d'écrire A/B plutôt que $A/\mathrm{Im}\,(B)$.)

Démonstration. — On a le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Br}R & \to & \mathrm{Br}K & \to & H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathrm{Br}\mathcal{X} & \to & \mathrm{Br}X & \to & H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & & \end{array}$$

La première suite exacte est bien connue [**16**], à la surjectivité à droite près, pour laquelle nous renvoyons à [**2**] et [**8**, Thm. B. 2.1].

La deuxième suite exacte résulte de la suite de localisation en cohomologie étale, de la suite exacte de Kummer, de l'injectivité du groupe de Brauer d'un schéma régulier intègre dans le groupe de Brauer de son corps des fonctions, et du théorème de pureté de Gabber (voir [**13**]). Sous les hypothèses faites sur Y, on a $H^0_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $H^1_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, donc la flèche naturelle

$$H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. La proposition résulte alors du diagramme. □

Proposition 2.2. — *Soit R un anneau de valuation discrète. Soit K le corps des fractions de R. Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma lisse à fibres géométriquement intègres. Soit $p : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$ le morphisme structural. Soit $X = \mathcal{X}_K$ la fibre générique.*

(1) La flèche de restriction $\mathrm{Pic}\,\mathcal{X} \to \mathrm{Pic}\,X$ *est un isomorphisme.*

(2) Soit $\mathrm{Spec}\,S \to \mathrm{Spec}\,R$ *un revêtement galoisien (éventuellement infini) de groupe de Galois* G*. Supposons que l'on a :*

(a) $S^\times \xrightarrow{\simeq} H^0(\mathcal{X}_S, \mathbb{G}_m)$ *;*

(b) $\mathrm{Br} S = 0$ *;*

(c) $H^3(G, S^\times) = 0$*.*

Alors on a une suite exacte naturelle

$$0 \to H^1(G, \mathrm{Pic}\,\mathcal{X}_S) \to \mathrm{Br}\mathcal{X}/\mathrm{Br}R \to [\mathrm{Br}\mathcal{X}_S]^G \to H^2(G, \mathrm{Pic}\,\mathcal{X}_S).$$

Démonstration. — L'énoncé (1) est classique. La suite exacte dans (2) provient de la suite spectrale de Leray pour le morphisme $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\,R$ et le faisceau $\mathbb{G}_m$, la démonstration est essentiellement celle de [**18**, Prop. 2.1]. □

Proposition 2.3. — *Soit* R *un anneau de valuation discrète de corps résiduel* k *de caractéristique zéro. Soit* K *le corps des fractions de* R*. Soit* R^h *le hensélisé de* R *et* R^{sh} *le hensélisé strict. Soit* K^h*, resp.* K^{sh} *le corps des fractions de* R^h*, resp.* R^{sh}*. Fixons des inclusions* $K \subset K^h \subset K^{sh} \subset \overline{K}$*. Notons* $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) = \mathrm{Gal}(K^{sh}/K^h)$ *et* $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$*.*

Supposons $H^3(\Gamma, \overline{k}^\times) = 0$*,* $H^3(\Gamma, \mathbb{Z}) = 0$ *et* $H^3(\Gamma_K, \overline{K}^\times) = 0$*.*

Soit $\mathcal{X}$ *un* R*-schéma lisse à fibres géométriquement intègres. Soit* $p : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\,R$ *le morphisme structural. Soit* $X = \mathcal{X}_K$ *la fibre générique.*

Supposons que l'on a $\mathbb{G}_{m,R} \xrightarrow{\simeq} p_*\mathbb{G}_{m,\mathcal{X}}$ *universellement sur* $\mathrm{Spec}\,R$*.*

On a alors un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^1(K, \mathrm{Pic}\,X_{\overline{K}}) & \to & \mathrm{Br}X/\mathrm{Br}K & \to & [\mathrm{Br}X_{\overline{K}}]^{\Gamma_K} & \to & H^2(K, \mathrm{Pic}\,X_{\overline{K}}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & H^1(K^h, \mathrm{Pic}\,X_{\overline{K}}) & \to & \mathrm{Br}X_{K^h}/\mathrm{Br}K^h & \to & [\mathrm{Br}X_{\overline{K}}]^{\Gamma_{K^h}} & \to & H^2(K^h, \mathrm{Pic}\,X_{\overline{K}}) \\
 & & \uparrow & & || & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \to & H^1(\Gamma, \mathrm{Pic}\,X_{K^{sh}}) & \to & \mathrm{Br}X_{K^h}/\mathrm{Br}K^h & \to & [\mathrm{Br}X_{K^{sh}}]^{\Gamma} & \to & H^2(\Gamma, \mathrm{Pic}\,X_{K^{sh}}) \\
 & & || & & \uparrow \rho & & \uparrow & & || \\
0 & \to & H^1(\Gamma, \mathrm{Pic}\,\mathcal{X}_{R^{sh}}) & \to & \mathrm{Br}\mathcal{X}_{R^h}/\mathrm{Br}R^h & \to & [\mathrm{Br}\mathcal{X}_{R^{sh}}]^{\Gamma} & \to & H^2(\Gamma, \mathrm{Pic}\,\mathcal{X}_{R^{sh}}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & H^1(\Gamma, \mathrm{Pic}\,\overline{Y}) & \to & \mathrm{Br}Y/\mathrm{Br}k & \to & \mathrm{Br}\overline{Y}^{\Gamma} & \to & H^2(\Gamma, \mathrm{Pic}\,\overline{Y}).
\end{array}$$

Si de plus $H^1(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$*, la flèche* ρ *dans ce diagramme est un isomorphisme.*

Démonstration. — Vérifions que les hypothèses de la proposition 2.2 sont satisfaites pour chacune des 5 lignes du diagramme. L'hypothèse (a) est par hypothèse satisfaite pour toutes.

Pour la ligne 5, (b) est automatique et (c) est l'hypothèse $H^3(k,\mathbb{G}_m)=0$.

Pour la ligne 4, $\mathrm{Br} R^{sh}=\mathrm{Br}\overline{k}=0$. Par ailleurs on a la suite exacte scindée de Γ-modules galoisiens donnée par la réduction modulo l'idéal maximal

$$1\to {R^{sh}}^1\to {R^{sh}}^\times\to \overline{k}^\times\to 1$$

où ${R^{sh}}^1$ est uniquement divisible. L'hypothèse $H^3(k,\mathbb{G}_m)=0$ assure donc $H^3(\Gamma,{R^{sh}}^\times)=0$.

Pour la ligne 3, on a la suite scindée de Γ-modules

$$1\to {R^{sh}}^\times\to {K^{sh}}^\times\to \mathbb{Z}\to 0$$

donnée par la valuation. On a vu que l'égalité $H^3(k,\mathbb{G}_m)=0$ implique alors $H^3(\Gamma,{R^{sh}}^\times)=0$. Sous l'hypothèse $H^3(\Gamma,\mathbb{Z})=0$ on a donc $H^3(\Gamma,{K^{sh}}^\times)=0$, c'est-à-dire la condition (c). Comme $\overline{k}$ est algébriquement clos, on a

$$0=\mathrm{Br} R^{sh}=\mathrm{Br} K^{sh}.$$

Pour la ligne 2, l'hypothèse (b) est automatique et (c) se lit $H^3(K^h,\mathbb{G}_m)=0$. D'après [**21**], exemple (c) p. 108, il suffit de voir que $H^3(R^h,\mathbb{G}_m)$ et $H^2(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sont nuls. Or $H^2(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=H^3(\Gamma,\mathbb{Z})$ et $H^3(R^h,\mathbb{G}_m)$ est isomorphe à $H^3(k,\mathbb{G}_m)$ ([**21**], Rem. III.3.11).

Pour la ligne 1, l'hypothèse (b) est automatique et (c) se lit $H^3(\Gamma_K,\overline{K}^\times)=0$.

La proposition 2.2 et les hypothèses sur la cohomologie de K donnent donc le diagramme de suites exactes ci-dessus, et la proposition 2.1. montre que, sous l'hypothèse $H^1(\overline{Y},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=0$, l'homomorphisme $\rho:\mathrm{Br}\mathcal{X}_{R^h}/\mathrm{Br} R^h\to \mathrm{Br} X_{K^h}/\mathrm{Br} K^h$ est un isomorphisme. □

Remarque 2.1. — Les hypothèses $H^3(\Gamma,\overline{k}^\times)=0$, $H^3(\Gamma,\mathbb{Z})=0$ et $H^3(\Gamma_K,\overline{K}^\times)=0$ sont satisfaites lorsque k est un corps de nombres et $K=k(t)$; voir par exemple [**5**] p. 199 et [**17**], p. 241.

Proposition 2.4. — *Soient k un corps de caractéristique zéro, $\overline{k}$ une clôture algébrique, et $\Gamma=\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Soit X une k-variété algébrique lisse et géométriquement intègre, et $f:X\to\mathbb{A}^1_k$ un k-morphisme. Soit $K=k(\mathbb{A}^1)$ et soit G un K-groupe semisimple simplement connexe. Supposons que la fibre générique de f est un espace homogène de G, à stabilisateurs géométriques réductifs connexes. Il existe un ouvert non vide $U\subset\mathbb{A}^1_k$ tel que pour tout k-point M de U d'anneau local R, avec R de hensélisé R^h et de hensélisé strict R^{sh}, on ait (notant Y/k la fibre en M de f) :*

(i) Les flèches naturelles

$$\operatorname{Pic} X_{R^{sh}} \to \operatorname{Pic} X_{K^{sh}} \to \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}$$

sont des isomorphismes de réseaux, et la flèche naturelle

$$\operatorname{Pic} X_{R^{sh}} \to \operatorname{Pic} \overline{Y}$$

est un isomorphisme de Γ-réseaux, où on a noté $X_{R^{sh}} = X \times_{\mathbb{A}^1_k} R^{sh}$ via la flèche $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{A}^1_k$ associée à M ; de même $X_{K^{sh}}$ et $X_{\overline{K}}$ sont définis par changement de base à partir de la fibre générique X_K.

(ii) Les flèches naturelles

$$\mathrm{Br} X_{R^{sh}} \to \mathrm{Br} X_{K^{sh}} \to \mathrm{Br} X_{\overline{K}}$$

sont des isomorphismes de groupes abéliens finis, et la flèche de spécialisation

$$\mathrm{Br} X_{R^{sh}} \to \mathrm{Br} \overline{Y}$$

est un isomorphisme de Γ-modules finis.

(iii) Supposons $H^3(\Gamma, \overline{k}^{\times}) = 0$, ce qui est le cas si k est un corps de nombres. Alors la flèche naturelle

$$\mathrm{Br} X_{R^h} / \mathrm{Br} R^h \to \mathrm{Br} Y / \mathrm{Br} k$$

est un isomorphisme de groupes abéliens finis.

Démonstration. — Il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{A}^1_k$ et un revêtement fini étale galoisien connexe $V \to U$, définissant une extension galoisienne finie L/K de corps, tels qu'on ait les propriétés suivantes :

(a) Le groupe G s'étend en un U-groupe semisimple simplement connexe.

(b) Il existe une section σ de $f_V : X_V \to V$.

(c) Le stabilisateur H de cette section est un V-groupe réductif (à fibres connexes).

(d) Le groupe H s'inscrit dans une extension de V-groupes

$$1 \to H^{ss} \to H \to T \to 1$$

où T est un V-tore et H^{ss} est un V-groupe semisimple, groupe dérivé de H.

(e) On a une suite exacte de V-groupes

$$1 \to \mu \to H^{sc} \to H^{ss} \to 1,$$

où H^{sc} est un V-groupe semisimple simplement connexe, et μ est un V-schéma en groupes finis abéliens étales.

On dispose du H-torseur $G_V \to X_V$ défini par la section σ. Ce torseur a une restriction triviale au-dessus de l'image de $\sigma : V \to X_V$.

À une telle situation sont associés, de façon fonctorielle en tout V-schéma W, des homomorphismes

$$\mathbb{G}_m(W) \to \mathbb{G}_m(X_W),$$
$$\widehat{T}(W) \stackrel{\simeq}{\to} \widehat{H}(W) \to \operatorname{Pic} X_W,$$

où la flèche $\widehat{H}(W) \to \operatorname{Pic} X_W$ est associée au H_W-torseur $G_W \to X_W$, et

$$\operatorname{Ext}^c_{W-gp}(H_W, \mathbb{G}_{m,W}) \to \operatorname{Pic} H_{W,}$$

où Ext^c désigne le groupe des classes d'extensions centrales ; cette dernière flèche est définie via le fait qu'une telle extension centrale définit ipso facto un H_W-torseur sous $\mathbb{G}_{m,W}$.

Lemme 2.5. — *Soit A un anneau intègre. Soit H_A un A-schéma en groupes réductifs connexes. Alors la flèche*

$$\operatorname{Ext}^c_{A-gp}(H_A, \mathbb{G}_{m,A}) \to \operatorname{Pic} H_{A,}$$

définie comme ci-dessus est injective.

Démonstration. — Soit F le corps des fractions de A. Soit

$$1 \to \mathbb{G}_{m,A} \to E \to H_A \to 1$$

une extension centrale dont l'image dans $\operatorname{Pic} H_A$ est nulle. Cela signifie qu'il existe une section $\sigma_A : H_A \to E$ du morphisme de A-schémas $E \to H_A$, section dont on peut supposer qu'elle envoie le neutre sur le neutre (quitte à la multiplier par un élément de $\mathbb{G}_{m,A}(A)$). Il s'agit alors de montrer que σ_A est de plus un homomorphisme de A-schémas en groupes. L'argument de la proposition 3.2 dans [**7**] (reposant sur le lemme de Rosenlicht) donne alors que la restriction de σ_A à la fibre générique est un morphisme $H_F \to E_F$ de F-schémas en groupes. Ceci implique que le morphisme de A-schémas séparés

$$H_A \times H_A \to E \quad (x,y) \mapsto \sigma_A(xy)\sigma_A(y)^{-1}\sigma_A(x)^{-1}$$

est constant égal au neutre sur la fibre générique, donc partout ; d'où le résultat. □

Reprenons la preuve de la proposition 2.4. Pour tout V-schéma W on a aussi un homomorphisme

$$\operatorname{Ext}^c_{W-gp}(H_W, \mathbb{G}_{m,W}) \to \operatorname{Br}_e X_W,$$

où $\mathrm{Br}_e X_W \subset \mathrm{Br} X_W$ est le sous-groupe formé des éléments nuls sur $\sigma(W)$, et où la flèche est définie par cup-produit avec la classe dans $H^1_{\text{ét}}(X_W, H_W)$ du H_W-torseur $G_W \to X_W$, et des hom ?omorphismes

$$\mathrm{Pic}\, H_W \to \mathrm{Pic}\, H_W^{ss},$$

$$\hat{\mu}(W) \to \mathrm{Pic}\, H_W^{ss},$$

ce dernier étant associé au μ_W-torseur $H_W^{sc} \to H_W^{ss}$.

Pour W le spectre d'un corps, ces diverses applications sont discutées dans [**23**], [**9**] et [**3**].

On a donc des homomorphismes

$$\hat{\mu}(W) \to \mathrm{Pic}\, H_W^{ss} \leftarrow \mathrm{Pic}\, H_W \leftarrow \mathrm{Ext}^c_{W-gp}(H_W, \mathbb{G}_{m,W}) \to \mathrm{Br}_e X_W \tag{2.2}$$

Soit F un corps de caractéristique zéro. Pour un F-groupe G semisimple simplement connexe, on a les propriétés suivantes

$$F^{\times} \xrightarrow{\simeq} F[G]^{\times};$$

$$\mathrm{Pic}\, G = 0;$$

$$\mathrm{Br} F \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br} G.$$

Pour F algébriquement clos, les deux premières propriétés sont bien connues [**23**]. La troisième l'est aussi, elle est établie de façon algébrique dans [**14**]. Pour F quelconque, on en déduit le résultat général en utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie étale du faisceau $\mathbb{G}_m$.

Supposons que W est le spectre d'un corps F. La proposition 6.10 de [**23**] montre que la flèche naturelle

$$\widehat{T}(F) \to \mathrm{Pic}\, X_F$$

est un isomorphisme.

Considérons la suite d'homomorphismes :

$$\hat{\mu}(F) \to \mathrm{Pic}\, H_F^{ss} \leftarrow \mathrm{Pic}\, H_F \leftarrow \mathrm{Ext}^c_{F-gp}(H_F, \mathbb{G}_{m,F}) \to \mathrm{Br}_e X_F.$$

La première flèche est un isomorphisme ([**23**, Lemme 6.9]). La seconde flèche est un isomorphisme si F est algébriquement clos ([**23**, Cor. 6.11 et Rem. 6.11.3]). La troisième flèche est un isomorphisme ([**7**, Cor. 5.7]). La quatrième flèche est un isomorphisme ; ceci résulte de [**3**, Thm. 2.8] et des égalités $\mathrm{Pic}\, G_F = 0$ et $\mathrm{Br} F = \mathrm{Br} G_F$.

Soit M un k-point de U. Soit R le hensélisé de $\mathbb{A}^1_k$ en M et R^{sh} le hensélisé strict. Fixons une factorisation $\mathrm{Spec}\, R^{sh} \to V \to U$ induisant $\mathrm{Spec}\, R^{sh} \to$

$\operatorname{Spec} R$. Fixons aussi des plongements $K \subset K^h \subset K^{sh} \subset \overline{K}$. Soit Y/k la fibre de $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ en M.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{T}(R^{sh}) & \to & \operatorname{Pic} X_{R^{sh}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\widehat{T}(K^{sh}) & \to & \operatorname{Pic} X_{K^{sh}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\widehat{T}(\overline{K}) & \to & \operatorname{Pic} X_{\overline{K}},
\end{array}$$

Comme $T_{R^{sh}}$ est un tore déployé, les flèches verticales de gauche sont des isomorphismes. Comme on a dit, la proposition 6.10 de [**23**] implique que les deux flèches horizontales inférieures sont des isomorphismes. Le (1) de la proposition 2.2 montre que la verticale supérieure droite est un isomorphisme. On conclut que toutes les flèches dans ce diagramme sont des isomorphismes.

On a par ailleurs un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{T}(R^{sh}) & \to & \operatorname{Pic} X_{R^{sh}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\widehat{T}(\overline{k}) & \to & \operatorname{Pic} \overline{Y}
\end{array}$$

dans lequel toutes les flèches sauf peut-être la flèche $\operatorname{Pic} X_{R^{sh}} \to \operatorname{Pic} \overline{Y}$ sont des isomorphismes. Ainsi cette dernière flèche est un isomorphisme, ce qui achève d'établir l'énoncé (i).

Sur $\overline{K}$, tous les groupes intervenant dans (2.2) sont isomorphes au groupe fini $\hat{\mu}(\overline{K})$. Les groupes $\mathrm{Br} X_{\overline{K}}$ et $\mathrm{Ext}^c_{\overline{K}-gp}(H_{\overline{K}}, \mathbb{G}_{m,\overline{K}})$ sont donc finis.

Soit L/K une extension finie galoisienne de corps telle que l'application $\mathrm{Br} X_L \to \mathrm{Br} X_{\overline{K}}$ soit surjective et que l'application

$$\mathrm{Ext}^c_{L-gp}(H_L, \mathbb{G}_{m,L}) \to \mathrm{Ext}^c_{\overline{K}-gp}(H_{\overline{K}}, \mathbb{G}_{m,\overline{K}})$$

soit surjective.

Quitte à restreindre U, on peut de plus supposer que l'extension L/K est non ramifiée sur U, et que tout élément de $\mathrm{Ext}^c_{\overline{K}-gp}(H_{\overline{K}}, \mathbb{G}_{m,\overline{K}})$ provient d'un élément de $\mathrm{Ext}^c_{S-gp}(H_S, \mathbb{G}_{m,S})$, où S est la fermeture intégrale de U dans L.

Pour l'anneau local R d'un point $M \in U(k)$, on a

$$K \subset L \subset K^{sh} \subset \overline{K},$$

l'application $\mathrm{Br} X_{K^{sh}} \to \mathrm{Br} X_{\overline{K}}$ est surjective et l'application

$$\mathrm{Ext}^c_{R^{sh}-gp}(H_{R^{sh}}, \mathbb{G}_{m,R^{sh}}) \to \mathrm{Ext}^c_{\overline{K}-gp}(H_{\overline{K}}, \mathbb{G}_{m,\overline{K}})$$

est surjective.

D'après (2.2), on a un diagramme commutatif d'applications naturelles

$$\begin{array}{ccccccccc}
\hat{\mu}(\overline{K}) & \to & \mathrm{Pic}\, H^{ss}_{\overline{K}} & \leftarrow & \mathrm{Pic}\, H_{\overline{K}} & \leftarrow & \mathrm{Ext}^c_{\overline{K}-gp}(H_{\overline{K}}, \mathbb{G}_{m,\overline{K}}) & \to & \mathrm{Br}_e X_{\overline{K}} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\hat{\mu}(K^{sh}) & \to & \mathrm{Pic}\, H^{ss}_{K^{sh}} & \leftarrow & \mathrm{Pic}\, H_{K^{sh}} & \leftarrow & \mathrm{Ext}^c_{K^{sh}-gp}(H_{K^{sh}}, \mathbb{G}_{m,K^{sh}}) & \to & \mathrm{Br}_e X_{K^{sh}} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\hat{\mu}(R^{sh}) & \to & \mathrm{Pic}\, H^{ss}_{R^{sh}} & \leftarrow & \mathrm{Pic}\, H_{R^{sh}} & \leftarrow & \mathrm{Ext}^c_{R^{sh}-gp}(H_{R^{sh}}, \mathbb{G}_{m,R^{sh}}) & \to & \mathrm{Br}_e X_{R^{sh}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\hat{\mu}(\overline{k}) & \to & \mathrm{Pic}\, H^{ss}_{\overline{k}} & \leftarrow & \mathrm{Pic}\, H_{\overline{k}} & \leftarrow & \mathrm{Ext}^c_{\overline{k}-gp}(H_{\overline{k}}, \mathbb{G}_{m,\overline{k}}) & \to & \mathrm{Br}_e \overline{Y}
\end{array}$$

Les flèches dans la verticale de gauche sont toutes des isomorphismes. Dans la première ligne, toutes les flèches sont des isomorphismes. Dans la seconde ligne, toutes les flèches sauf peut-être la flèche $\mathrm{Pic}\, H^{ss}_{K^{sh}} \leftarrow \mathrm{Pic}\, H_{K^{sh}}$ sont des isomorphismes. La flèche $\mathrm{Pic}\, H^{ss}_{K^{sh}} \leftarrow \mathrm{Pic}\, H_{K^{sh}}$ est injective via la proposition 6.10 de [**23**], car $\mathrm{Pic}\, T_{K^{sh}} = 0$. Comme la flèche $\mathrm{Br}_e X_{K^{sh}} \to \mathrm{Br}_e X_{\overline{K}}$ est par nos hypothèses surjective, on conclut que toutes les flèches dans les deux premières lignes, ainsi qu'entre ces deux lignes, sont des isomorphismes.

Les flèches verticales entre la deuxième et la troisième ligne, sauf peut-être les deux dernières à droite, sont clairement des isomorphismes. On en déduit que les deux premières flèches de la troisième ligne sont des isomorphismes. La dernière flèche verticale entre les lignes trois et deux est une injection (régularité des schémas considérés).

Comme Y est un espace homogène d'un groupe semisimple simplement connexe pour une action dont les stabilisateurs sont connexes, on a $H^1(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ et la proposition 2.1 montre que la flèche en question est un isomorphisme.

La dernière ligne est composée d'isomorphismes. On en conclut que les trois premières flèches verticales entre la troisième et la quatrième ligne sont des isomorphismes.

D'après ce qui précède, l'application

$$\mathrm{Ext}^c_{R^{sh}-gp}(H_{R^{sh}}, \mathbb{G}_{m,R^{sh}}) \to \mathrm{Ext}^c_{K^{sh}-gp}(H_{K^{sh}}, \mathbb{G}_{m,K^{sh}})$$

est surjective.

Par ailleurs la flèche $\mathrm{Ext}^c_{R^{sh}-gp}(H_{R^{sh}}, \mathbb{G}_{m,R^{sh}}) \to \mathrm{Pic}\, H_{R^{sh}}$ est injective d'après le lemme 2.5. Une chasse au diagramme donne alors que toutes les flèches sont des isomorphismes (de groupes finis).

Comme $\mathrm{Br}_e(\bullet) = \mathrm{Br}(\bullet)$ pour chacun des groupes dans la verticale de droite, on a maintenant établi l'énoncé (ii).

L'énoncé (iii) résulte alors de la proposition 2.3. et de sa démonstration, qui pour les deux lignes inférieures du grand diagramme, utilise seulement l'hypothèse $H^3(k, \mathbb{G}_m) = 0$. □

On peut maintenant établir le théorème suivant, qu'on comparera avec [**18**, Thm. 2.3.1].

Théorème 2.6. — *Soit k un corps de nombres. Soit X une k-variété lisse et géométriquement intègre, et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un k-morphisme. Soit $K = k(\mathbb{A}^1)$ et soit G un K-groupe semisimple simplement connexe. Supposons que la fibre générique de f est un espace homogène de G, à stabilisateurs géométriques réductifs connexes. Il existe alors un sous-ensemble hilbertien Hil de $\mathbb{A}^1(k)$ tel que pour tout point $m \in Hil$ la fibre X_m soit lisse et que l'on ait un isomorphisme naturel de groupes finis*

$$\mathrm{Br}X_\eta/\mathrm{Br}K \overset{\simeq}{\to} \mathrm{Br}X_m/\mathrm{Br}k.$$

Démonstration. — On reprend les notations de la démonstration précédente. On note déjà que $\mathbb{G}_m = p_*\mathbb{G}_m$ universellement sur la fibre générique $p : X_\eta \to \operatorname{Spec} K$, via le lemme de Rosenlicht (car G est semi-simple).

On suppose que l'extension finie galoisienne L/K est suffisamment grosse pour que comme précédemment l'application $\mathrm{Br}X_L \to \mathrm{Br}X_{\overline{K}}$ soit surjective, mais aussi que l'application de restriction $\operatorname{Pic} X_L \to \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}$ soit surjective, et donc un isomorphisme de réseaux, l'injectivité résultant de $\overline{K}^\times \overset{\simeq}{\to} \overline{K}[X_\eta]^\times$. Soit $\Delta = \mathrm{Gal}(L/K)$.

D'après le théorème d'irréductibilité de Hilbert, il existe un sous-ensemble hilbertien Hil de $\mathbb{A}^1(k)$ tel que pour tout point $m \in Hil$ la fibre $Y = X_m$ soit lisse, l'extension L/K soit non ramifiée en m et m soit *inerte* dans L. En tout tel point on a donc une extension induite de corps de nombres l/k de groupe de Galois Δ. La hensélisation donne également une extension galoisienne L^h/K^h de groupe Δ. On a les inclusions de corps

$$K \subset L \subset L^h \subset K^{sh} \subset \overline{K}.$$

Les applications $\operatorname{Pic} X_L \to \operatorname{Pic} X_{L^h} \to \operatorname{Pic} X_{K^{sh}} \to \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}$ sont des isomorphismes de réseaux.

On considère le diagramme commutatif de suites exactes (proposition 2.3 et remarque 2.1) :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & H^1(K, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}) & \to & \mathrm{Br}X/\mathrm{Br}K & \to & [\mathrm{Br}X_{\overline{K}}]^{\Gamma_K} & \to & H^2(K, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & H^1(K^h, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}) & \to & \mathrm{Br}X_{K^h}/\mathrm{Br}K^h & \to & [\mathrm{Br}X_{\overline{K}}]^{\Gamma_{K^h}} & \to & H^2(K^h, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}})
\end{array}$$

On a

$$H^1(\Delta, \operatorname{Pic} X_L) = H^1(K, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}})$$

et $H^1(\Delta, \operatorname{Pic} X_{L^h}) = H^1(K^h, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}})$. Ainsi la première flèche verticale est un isomorphisme.

Comme $\mathrm{Br} X_L \to \mathrm{Br} X_{\overline{K}}$ est surjectif, l'action de Γ_K sur $\mathrm{Br} X_{\overline{K}}$ se factorise par Δ. On a alors $[\mathrm{Br} X_{\overline{K}}]^{\Gamma_K} \xrightarrow{\simeq} [\mathrm{Br} X_{\overline{K}}]^{\Gamma_{K^h}}$.

On a, via la suite de restriction-inflation, le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & H^2(\Delta, \operatorname{Pic} X_L) & \to & H^2(K, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}) & \to & H^2(L, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & H^2(\Delta, \operatorname{Pic} X_{L^h}) & \to & H^2(K^h, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}) & \to & H^2(L^h, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}).
\end{array}$$

La flèche $H^2(\Delta, \operatorname{Pic} X_L) \to H^2(\Delta, \operatorname{Pic} X_{L^h})$ est un isomorphisme.

Comme le groupe $\mathrm{Br} X_{\overline{K}}$ est fini, on peut à l'avance choisir L de façon que de plus l'image de $[\mathrm{Br} X_{\overline{K}}]^{\Gamma_K}$ dans $H^2(K, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}})$ s'annule dans $H^2(L, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}})$ et donc dans $H^2(L^h, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}})$. On a alors le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^1(K, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}) & \to & \mathrm{Br} X/\mathrm{Br} K & \to & [\mathrm{Br} X_{\overline{K}}]^{\Gamma_K} & \to & H^2(\Delta, \operatorname{Pic} X_L) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & H^1(K^h, \operatorname{Pic} X_{\overline{K}}) & \to & \mathrm{Br} X_{K^h}/\mathrm{Br} K^h & \to & [\mathrm{Br} X_{\overline{K}}]^{\Gamma_{K^h}} & \to & H^2(\Delta, \operatorname{Pic} X_{L^h})
\end{array}$$

dans lequel toutes les flèches sauf peut-être $\mathrm{Br} X/\mathrm{Br} K \to \mathrm{Br} X_{K^h}/\mathrm{Br} K^h$ sont des isomorphismes. On en conclut que cette dernière flèche est un isomorphisme. En combinant avec la proposition 2.4, on obtient le théorème. □

Remarque 2.3. — Lorsque les stabilisateurs géométriques pour l'action de G sur la fibre générique X_K sont des tores algébriques, ce qui sera le cas au §4, les démonstrations de ce paragraphe se simplifient. On a en effet alors $\hat{\mu} = 0$, $\mathrm{Br} X_{\overline{K}} = 0$, $\mathrm{Br} X_{R^{sh}} = 0$, $\mathrm{Br} \overline{Y} = 0$.

3. Le théorème

On commence par quelques lemmes préliminaires.

Lemme 3.1. — *Soient k un corps de nombres, v une place de k, puis k_v le complété de k en v et $k_v^h \subset k_v$ le sous-corps des éléments algébriques sur k. Soit Y une $k(t)$-variété algébrique. Si Y possède un $k_v(t)$-point rationnel, alors Y possède un $k_v^h(t)$-point rationnel.*

Démonstration. — On peut supposer que Y est une $k(t)$-variété affine $Y \subset \mathbb{A}^n_{k(t)}$, donnée par un système d'équations polynomiales en les variables $x_i, i = 1, \dots, n$, qu'on peut écrire comme un système d'équations à coefficients dans k :

$$P_i(t, x_1, \dots, x_n) = 0, \ \ i = 1, \dots, m.$$

Par hypothèse, il existe des polynômes $r_i(t), i = 1, \dots, n$ et $s(t) \neq 0$ dans $k_v[t]$ tels que l'on ait identiquement

$$P_i(t, r_1(t)/s(t), \dots, r_n(t)/s(t)) = 0.$$

On introduit des variables en nombre fini correspondant aux coefficients des polynômes $r_i(t)$ et $s(t)$. On note $R_i(t)$ et $S(t)$ les polynômes de mêmes degrés que les $r_i(t)$ et $s(t)$, avec les coefficients remplacés par ces variables. Soit y un coefficient de $S(t)$ tel que le coefficient correspondant de $s(t) \in k_v[t]$ soit non nul. Introduisons une nouvelle variable z. Pour un entier $N > 0$ convenable, qu'on fixe, les produits

$$S(t)^N.[P_i(t, R_1(t)/S(t), \dots, R_n(t)/S(t))]$$

sont des polynômes G_i, à coefficients dans k, en t et en les coefficients des P_i et de S. On considère alors la k-variété affine W définie par l'annulation de tous les coefficients des puissances de t dans chacun de ces polynômes G_i, ainsi que par l'équation $yz = 1$. Par hypothèse, cette k-variété possède un point dans k_v. Il est connu (cf. [**4**, Chap. 3.6, Cor. 10]) que ceci implique $W(k_v^h) \neq \emptyset$. Ceci donne alors un $k_v^h(t)$-point de Y. □

Dans le lemme suivant, on ne peut pas remplacer $k_v^h(t)$ par $k_v(t)$.

Lemme 3.2. — *Soit k un corps de nombres. Soit v une place de k. Soit k_v^h le sous-corps des éléments de k_v algébriques sur k (pour v non archimédienne c'est le hensélisé de k en v). Soit t une variable. L'application naturelle $\mathrm{Br}k(t) \to \mathrm{Br}k_v^h(t)$ est surjective.*

Démonstration. — Notons $E = k_v^h$. Les suites exactes de Faddeev ([**15**], Cor. 6.4.6.) pour le groupe de Brauer de $k(t)$ et le groupe de Brauer de $E(t)$ sont compatibles. On a donc le diagramme commutatif de suites exactes

(3.1)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}k & \longrightarrow & \mathrm{Br}k(t) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^{1\,(1)}_k} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}E & \longrightarrow & \mathrm{Br}E(t) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^{1\,(1)}_k} [\oplus_{y \in \mathbb{A}^{1\,(1)}_E,\ y \mapsto x} H^1(E(y), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})] & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Pour L un corps de nombres et S un ensemble fini de places de L, l'application de restriction

$$H^1(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \prod_{w \in S_L} H^1(L_w, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est surjective. Ceci est une conséquence du théorème de Grunwald-Wang [**1**, Chap. 10, Thm. 5, p. 103]. Il en est donc de même de l'application de restriction

$$H^1(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \prod_{w \in S_L} H^1(L_w^h, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

En appliquant ceci à chaque $k(x)$ et à S l'ensemble des places de $k(x)$ au-dessus de la place v de k, on voit que la flèche verticale de droite dans le diagramme ci-dessus est surjective.

Pour L un corps de nombres et w une place de L, les applications naturelles de restriction $H^1(L_w^h, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(L_w, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Br}L_w^h \to \mathrm{Br}L_w$ sont des isomorphismes. La théorie du corps de classes montre que l'application $\mathrm{Br}L \to \mathrm{Br}L_w$ est surjective. Il en est donc de même de l'application de restriction $\mathrm{Br}L \to \mathrm{Br}L_w^h$. La flèche verticale de gauche dans le diagramme commutatif ci-dessus est donc surjective.

Il en résulte que la flèche verticale médiane est surjective. □

Pour traiter les problèmes liés à la place v_0, nous aurons besoin d'une version fine du théorème d'approximation forte, qui est la proposition 3.4 ci-dessous.

Nous utiliserons une version du théorème d'irréductibilité de Hilbert établie par Serre [**25**, p. 135/136] comme une conséquence du théorème de Siegel sur la finitude des points entiers des courbes.

Proposition 3.3. — *Soit k un corps de nombres. Soit $\alpha \in k$ et T un ensemble fini de places de k. Soit $k_{\alpha,T}$ l'ensemble des $t \in k$ tels que $t - \alpha$ soit une unité en dehors de T. Soit $\mathcal{M} \subset k$ un ensemble mince dans k. Pour α en dehors d'un ensemble fini (dépendant de $\mathcal{M}$), l'ensemble $\mathcal{M} \cap k_{\alpha,T}$ est fini.*

Serre établit cette proposition dans le cas $k = \mathbb{Q}$, et laisse l'énoncé sur un corps de nombres quelconque au lecteur (op. cit., Exercice 1 p. 136). Pour la définition et les propriétés des ensembles minces, voir le paragraphe 9.1. de [**25**].

Proposition 3.4. — *Soient k un corps de nombres, k_i/k, $i = 1, \ldots, n$ des extensions finies, et pour chaque i, $e_i \in k_i$. Soit $N > 0$ un entier.*

On se donne un ensemble fini S de places de k et une place v_0 hors de S. On suppose qu'il existe au moins une place non archimédienne dans $S \cup \{v_0\}$.

On se donne des $\lambda_v \in k_v$ pour $v \in S$, et des polynômes irréductibles $P_j(z,t) \in k[z,t]$.

Alors il existe $\theta \in k$ arbitrairement proche de chaque λ_v pour $v \in S$, avec les propriétés suivantes :

– θ est entier hors de $S \cup \{v_0\}$;

– chaque $\theta - e_i$ est une puissance N-ième dans tout complété de k_i en une place au-dessus de v_0 ;

– chaque $P_j(z,\theta)$ est irréductible dans $k[t]$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble mince formé des $\theta \in k$ pour lesquels l'un des $P_j(z,\theta)$ est réductible. Notons S_{fini} l'ensemble des places finies de S.

On commence par appliquer l'approximation forte usuelle à l'ensemble des λ_v pour $v \in S$, ce qui donne un $\theta_1 \in k$, entier hors de S et v_0, et qui est très proche de λ_v pour $v \in S$.

Soit $T = S_{fini} \cup \{v_0\}$. D'après la proposition 3.3 on peut de plus choisir θ_1 tel que $\mathcal{M} \cap k_{\theta_1,T}$ est fini.

Si v_0 est une place archimédienne et k contient $s-1$ autres places archimédiennes $v_1, ..., v_{s-1}$ (avec $s > 1$), on note u une unité de l'anneau des entiers de k de valeur absolue strictement plus petite que 1 en les places archimédiennes autres que v_0 ; l'existence d'une telle unité est assurée par le fait que l'image des unités de $\mathcal{O}_k$ dans $\mathbf{R}^s$ via l'application

$$x \mapsto (\log(\mid x \mid_{v_0}), ..., \log(\mid x \mid_{v_{s-1}}))$$

est un réseau L tel que le $\mathbf{R}$-espace vectoriel engendré par L est l'hyperplan $\sum_{i=0}^{s-1} x_i = 0$ dans $\mathbf{R}^s$, via le théorème des unités de Dirichlet (cf. [**5**], exposé II, paragraphe 18). On peut de plus choisir u positive en v_0 si v_0 est une place réelle. On cherche θ de la forme

$$\theta = \theta_1 + u^{Ns}.(\prod_{l \in S_{fini}} l)^{Nr},$$

où l est le premier de $\mathbb{Q}$ induit par $v \in S_{fini}$, avec $r > 0$ suffisamment grand, *puis* $s > 0$ suffisamment grand, pour que les approximations des λ_v pour $v \in S$ soient respectées, et que pour tout i, $\theta - e_i$ soit positif aux complétés réels de k_i au-dessus de la place v_0 (noter que comme $s > 1$, on a $\mid u \mid_{v_0} > 1$ par la formule du produit). Il existe une infinité de tels θ.

Si v_0 est l'unique place archimédienne de k, alors S_{fini} est non vide par hypothèse, et on prend θ de la forme

$$\theta = \theta_1 + (\prod_{l \in S_{fini}} l)^{Nr},$$

avec $r > 0$ suffisamment grand comme ci-dessus, ce qui donne encore une infinité de θ.

Si enfin v_0 est une place non archimédienne de k, induisant le premier p sur $\mathbb{Q}$, on cherche θ de la forme

$$\theta = \theta_1 + (\prod_{l \in S_{fini}} l)^{Nr}/p^{Ns}$$

avec $r > 0$ suffisamment grand pour que les approximations des λ_v pour $v \in S_{fini}$ soient respectées, *puis* $s > 0$ suffisamment grand pour que :

– l'approximation des λ_v pour les places v archimédiennes soit respectée ;

– pour chaque i la valuation p-adique de

$$(\theta_1 - e_i)p^{Ns}$$

soit suffisamment grande pour que

$$(\theta_1 - e_i)p^{Ns} + (\prod_{l \in S_{fini}} l)^{Nr}$$

soit une puissance N-ième dans tout complété de k_i en une place au-dessus de la place v_0, ce qui entraîne que

$$\theta - e_i = \theta_1 - e_i + (\prod_{l \in S_{fini}} l)^{Nr}/p^{Ns}$$

l'est aussi. Il existe une infinité de tels θ.

On choisit alors θ qui ne soit pas dans l'ensemble fini $\mathcal{M} \cap k_{\theta_1,T}$, donc pas dans $\mathcal{M}$, si bien que chaque $P_j(z,\theta)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[t]$.

$\square$

Sur un corps k quelconque, un k-groupe réductif G est dit isotrope s'il existe un k-homomorphisme non constant $\mathbb{G}_{m,k} \to G$. Sur un corps local k, un k-groupe réductif G est isotrope si et seulement si l'espace topologique $G(k)$ est non compact (critère de Godement, Bruhat et Tits, cf. Prasad [**22**]).

Nous sommes maintenant à pied d'oeuvre pour établir le théorème principal de cet article.

Théorème 3.5. — *Soit k un corps de nombres. Soient X une k-variété lisse et géométriquement intègre et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un k-morphisme. Supposons $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. Soit $K = k(\mathbb{A}^1)$ et soit G un K-groupe semisimple simplement connexe, absolument presque K-simple.*

On suppose :

(i) La fibre générique X_η/K de f est un espace homogène de G à stabilisateurs réductifs connexes.

(ii) Toutes les fibres de f sont scindées.

(iii) Il existe une place v_0 de k telle que : la fibre générique X_η possède un $k_{v_0}(t)$-point et il existe un ouvert de Zariski V de $\mathbb{A}^1_k$ tel que la spécialisation G_x/k_{v_0} du $k(t)$-groupe G en tout point $x \in V(k_{v_0})$ soit définie et soit semi-simple, simplement connexe, isotrope.

(iv) Pour tout élément $\alpha \in \mathrm{Br}X$, l'application d'évaluation $\mathrm{ev}_\alpha : X(k_{v_0}) \to \mathrm{Br}k_{v_0}$ est constante.

Alors l'image diagonale de $X(k)$ dans la projection de $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}X}$ sur $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$ est dense.

Démonstration. — Commençons par établir le lemme suivant.

Lemme 3.6. — *Sous les hypothèses du théorème, les groupes $\mathrm{Br}X_\eta/\mathrm{Br}K$ et $\mathrm{Br}X/\mathrm{Br}k$ sont finis.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.4, sous l'hypothèse (i), d'une part le module galoisien $\mathrm{Pic}\, X_{\overline{K}}$ est un réseau, donc $H^1(K, \mathrm{Pic}\, X_{\overline{K}})$ est fini, d'autre part le groupe $\mathrm{Br}X_{\overline{K}}$ est fini. D'après la proposition 2.3 et la remarque 2.1, ceci implique que le groupe $\mathrm{Br}X_\eta/\mathrm{Br}K$ est fini. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}K$ dont l'image β dans $\mathrm{Br}X_\eta$ appartient au sous-groupe $\mathrm{Br}X$. Les résidus de β aux points de codimension 1 de X sont nuls. L'hypothèse (ii) assure alors que les résidus de α aux points de codimension 1 de $\mathbb{A}^1_k$ sont nuls. Ceci implique que α appartient à l'image de $\mathrm{Br}k$ dans $\mathrm{Br}K$. Comme $\mathrm{Br}X_\eta/\mathrm{Br}K$ est fini, on en déduit que $\mathrm{Br}X/\mathrm{Br}k$ est fini. □

Il existe un ensemble fini S de places de k contenant v_0 et les places archimédiennes et un $\mathcal{O}_S$-schéma lisse de type fini $\mathcal{X}$ équipé d'un $\mathcal{O}_S$-morphisme $\mathcal{X} \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{O}_S}$ qui étend $f : X \to \mathbb{A}^1_k$.

Pour chaque place $v \in S \setminus \{v_0\}$, on se donne un ouvert $W_v \subset X(k_v)$. On suppose que l'ensemble

$$E := [X(k_{v_0}) \times \prod_{v \in S \setminus \{v_0\}} W_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{X}(O_v)]^{\mathrm{Br}X}$$

est non vide. On veut montrer que l'ensemble

$$X(k_{v_0}) \times \prod_{v \in S\setminus\{v_0\}} W_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{X}(O_v)$$

contient un point de $X(k)$.

Notons que chaque $\mathcal{X}(O_v) \subset X(k_v)$ est un ouvert non vide pour la topologie v-adique. Pour établir l'énoncé ci-dessus, on peut donc remplacer S par tout ensemble fini de places le contenant.

Choisissons un sous-ensemble fini Γ de $\mathrm{Br} X_\eta$ dont l'image modulo $\mathrm{Br} K$ est le groupe fini $\mathrm{Br} X_\eta/\mathrm{Br} K$.

Par hypothèse, on dispose ici d'un $k_{v_0}(t)$-point de la K-variété X_η, et donc (Lemme 3.1) d'un $k^h_{v_0}(t)$-point $s_{v_0}(t)$ de la K-variété X_η. D'après le lemme 3.2, quitte à modifier chaque élément de Γ par un élément de $\mathrm{Br} K$, on peut imposer

$$\alpha(s_{v_0}(t)) = 0 \in \mathrm{Br} k_{v_0}(t)$$

pour tout $\alpha \in \Gamma$. Ceci vaut encore si on remplace $\Gamma \subset \mathrm{Br} X_\eta$ par le sous-groupe qu'il engendre, sous-groupe qui est fini puisque $\mathrm{Br} X_\eta$ est de torsion. On note ce sous-groupe désormais B.

Une fois fixé le groupe fini B, il existe un ouvert non vide $U_0 \subset \mathbb{A}^1_k$ tel que les éléments de B soient non ramifiés sur $U := f^{-1}(U_0)$. En d'autres termes, on a $B \subset \mathrm{Br} U$. Quitte à restreindre U_0, on peut supposer que $f : U \to U_0$ est lisse à fibres géométriquement intègres, que le groupe G/K s'étend en un U_0-schéma en groupes semisimples G_0, que $U \to U_0$ est un G_0-espace homogène, et que de plus $s_{v_0}(t)$ définit une section de la restriction de f au-dessus de $U_0 \times_k k^h_{v_0}$.

Notons $\{m_1, \ldots, m_l\} \in \mathbb{A}^1_k$ les points fermés dans le complémentaire de U_0.

Pour tout tel point m_i, on note k_i le corps résiduel en m_i. Pour tout i, d'après l'hypothèse (ii), il existe au moins une composante géométriquement intègre de multiplicité 1 de la fibre X_{m_i}. On fixe un ouvert lisse non vide W_i d'une telle composante. On note $K_i = k_i(W_i)$. Soit K'_i/K_i une extension abélienne finie telle que tous les résidus des éléments de B au point générique de W_i appartiennent à $H^1(K'_i/K_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Quitte à restreindre W_i, on peut supposer que la fermeture intégrale W'_i de W_i dans K'_i est finie étale sur W_i. Soit k'_i la fermeture intégrale de k_i dans K'_i.

On agrandit S de façon à avoir les propriétés suivantes :

(a) Le k-morphisme $f : U \to U_0$ s'étend en un $\mathcal{O}_S$-morphisme lisse $\mathcal{U} \to \mathcal{U}_0$ de $\mathcal{O}_S$-schémas, avec $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}_{\mathcal{O}_S}$, tel que pour tout point fermé $x \in \mathcal{U}_0$, de corps résiduel le corps fini $F(x)$, la fibre $f^{-1}(x)$ possède un $F(x)$-point. Comme les fibres de $U \to U_0$ sont géométriquement intègres, ceci est possible par les estimées de Lang–Weil (cf. [**26**], théorème 1, étape 3). On peut aussi supposer $\mathcal{U}_0 \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_S$ surjectif, ce qui assure $\mathcal{U}(O_v) \neq \emptyset$ pour $v \notin S$.

(b) Les polynômes unitaires $P_i(t) \in k[t]$ définissant les points m_i sont $\mathcal{O}_S$-entiers, et le produit $\prod_i P_i(t)$ a une réduction séparable en toute place finie $v \notin S$. Notons $\mathbf{m}_i = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_S[t]/P_i(t)$.

(c) Les éléments de B appartiennent à $\mathrm{Br}\,\mathcal{U}$.

(d) Les morphismes $W_i \subset X_{m_i} \subset X$, où la première flèche est une immersion ouverte de k_i-variétés et la seconde une immersion fermée de k-variétés, s'étendent en des morphismes $\mathcal{W}_i \subset \mathcal{X}_{\mathbf{m}_i} \subset \mathcal{X}$, le premier étant une immersion ouverte de $\mathbf{m_i}$-schémas, le second une immersion fermée de $\mathcal{O}_S$-schémas.

(e) Le k_i-morphisme fini étale $W'_i \to W_i$ s'étend en un morphisme fini étale surjectif $\mathcal{W}'_i \to \mathcal{W}_i$ de $\mathbf{m}_i$-schémas lisses, et les résidus des éléments de B sont dans $H^1(\mathcal{W}'_i/\mathcal{W}_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H^1(K'_i/K_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

(f) Pour tout i, toute place w de k_i non au-dessus d'une place de S et totalement décomposée dans k'_i/k_i, et tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K'_i/k'_iK_i)$, la fibre de $\mathcal{W}_i$ en w possède un $F(w)$-point dont le Frobenius (relativement au revêtement $\mathcal{W}'_i/\mathcal{W}_i$) est σ. Ceci est possible via le lemme-clé de [**12**]. En particulier pour toute place v de k non dans S et tout i, la fibre de $\mathcal{W}_i$ au-dessus de tout $F(v)$-point de $\mathbf{m}_i$ possède un $F(v)$-point – mais il se peut que ni $\mathbf{m}_i$ ni a fortiori $\mathcal{W}_i$ n'aient de $F(v)$-point.

(g) Tout élément du groupe fini $B' = B \cap \mathrm{Br}X$ appartient à $\mathrm{Br}\mathcal{X}$.

On va maintenant ajouter à l'ensemble $B \subset \mathrm{Br}U$ de nouveaux éléments. Appelons Λ_1 l'ensemble des éléments de $\mathrm{Br}k(t)$ non ramifiés en dehors de ∞ et des m_i, et dont les résidus en chaque m_i sont dans $H^1(\mathrm{Gal}(k'_i/k_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. D'après la suite exacte de Faddeev, le groupe $\Lambda_1/\mathrm{Br}k$ est fini. Le groupe engendré par les éléments $\mathrm{Cores}_{k_i/k}(t - e_i, \chi_{i,j})$, où e_i est vu dans k_i ($i = 1, \ldots, l$) et $\chi_{i,j}$ parcourt les éléments de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k'_i/k_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, est un sous-groupe fini $\Lambda \subset \Lambda_1$ qui se surjecte sur $\Lambda_1/\mathrm{Br}k$. Posons $C = B \cup \Lambda$ et $C' = C \cap \mathrm{Br}X$. Quitte à agrandir encore S, on peut supposer $C' \subset \mathrm{Br}\mathcal{X}$.

Lemme 3.7. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, il existe un point adélique*

$$(P_v) \in [X(k_{v_0}) \times \prod_{v \in S \setminus \{v_0\}} W_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{U}(O_v)]^{C'} \subset E$$

tel que de plus le point P_{v_0} vérifie

$$\alpha(P_{v_0}) = 0 \tag{3.2}$$

pour tout $\alpha \in B$ et

$$\beta(f(P_{v_0})) = 0 \tag{3.3}$$

pour $\beta \in \Lambda$.

Noter que $\beta(f(P_{v_0})) = \beta(P_{v_0})$ puisque les éléments de Λ sont dans $\mathrm{Br}k(t)$.

Démonstration. — On commence d'abord par choisir $\lambda_{v_0} \in U_0(k_{v_0})$ tel que $\beta(\lambda_{v_0}) = 0$ pour tout $\beta \in \Lambda$. Pour v_0 complexe, n'importe quel λ_{v_0} convient ; pour v_0 réel, il suffit de prendre λ_{v_0} suffisamment grand ; pour v_0 fini, on cherche λ_{v_0} dans $U_0(k_{v_0}) \subset k_{v_0}$ tel que $\lambda_{v_0} - e_i$ soit une puissance N-ième dans k_{w_0} pour tout i et toute place w_0 de k_i au-dessus de la place v_0, où N est le ppcm des ordres des caractères $\chi_{i,j}$ pour tous les i et j. Pour cela on prend $\lambda_{v_0} = 1/p^{Nm}$ où p est le nombre premier que divise v_0. On prend m sufffisamment grand pour que pour tout i et tout complété de k_i en une place w_0 au-dessus de la place v_0, $1 - e_i p^{Nm}$ soit une puissance N-ième dans k_{i,w_0}.

Posons alors $P_{v_0} = s_{v_0}(\lambda_{v_0})$. Par construction on a alors $\alpha(P_{v_0}) = 0$ pour tout $\alpha \in B$ et $\beta(f(P_{v_0})) = \beta(\lambda_{v_0}) = 0$ pour tout $\beta \in \Lambda$.

Par ailleurs on dispose d'un point adélique (Q_v) dans E, donc a fortiori l'ensemble

$$E' := [X(k_{v_0}) \times \prod_{v \in S \setminus \{v_0\}} W_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{X}(O_v)]^{C'}$$

est non vide. Comme tous les éléments de C s'annulent en P_{v_0}, tout élément du groupe C' s'annule aussi en P_{v_0}. Mais alors, comme tout élément de $\mathrm{Br}X$ est (par l'hypothèse (iv) du théorème) constant quand évalué sur $X(k_{v_0})$, ceci implique que tout élément de C' s'annule sur $X(k_{v_0})$. Pour $v \notin S$, on a $\mathcal{U}(O_v) \neq \emptyset$ et tout élément de C' s'annule sur $\mathcal{X}(O_v)$. Pour toute place v, l'ensemble $U(k_v)$ est dense dans $X(k_v)$ pour la topologie v-adique. Il existe donc une famille $(P_v) \in U(\mathbb{A}_k)^{C'}$ avec $P_v \in U(k_v) \cap W_v$ pour toute place $v \in S \setminus \{v_0\}$, et $P_v \in \mathcal{U}(O_v)$ pour $v \notin S$, donc $(P_v) \in U(\mathbb{A}_k)$. Comme C' s'annule en tout point de $X(k_{v_0})$, on peut prendre pour P_{v_0} le point fixé plus haut.

□

On fixe désormais un point adélique (P_v) comme dans le lemme ci-dessus. Le *lemme formel* [**17**, Lemme 2.6.1] sous la forme donnée dans [**6**, démonstration du Thm. 1.4], appliqué à $U \subset X$, assure alors l'existence d'un ensemble fini T de places, $T \cap S = \emptyset$ et pour $v \in T$ de points $M_v \in U(k_v) \cap \mathcal{X}(O_v)$ tels que

$$\sum_{v \in S} \alpha(P_v) + \sum_{v \in T} \alpha(M_v) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{3.4}$$

pour tout $\alpha \in C = B \cup \Lambda$.

Pour chaque $i = 1, \ldots, l$, on choisit (ce qui est possible par le théorème de Tchebotarev) des places w_i de k_i de degré absolu 1, ne divisant pas de places de $S \cup T$, totalement décomposées dans l'extension k'_i/k_i, et induisant des places v_i de k deux à deux distinctes. On fixe $\theta_i \in O_{v_i}$ tel que $v_i(P_i(\theta_i)) = 1$, ce qui est possible car w_i est de degré 1 sur v_i.

On dispose donc des éléments $\lambda_v = f(P_v) \in k_v$ pour $v \in S \setminus v_0$, $\lambda_v = f(M_v) \in O_v$ pour $v \in T$ et $\theta_i \in O_{v_i}$ pour $i = 1, \ldots, l$.

Le théorème 2.6 combiné avec la proposition 3.4 appliquée à la réunion de $S \setminus \{v_0\}$, T et la réunion des $\{v_i\}$, fournissent alors $\theta \in \mathcal{O}_S$, très proche de $\lambda_v \in k_v$ pour $v \in S \setminus \{v_0\}$, de $\lambda_v \in O_v$ pour $v \in T$ et de $\theta_i \in O_{v_i}$ pour $i = 1, \ldots, l$ (on a donc $v_i(P_i(\theta)) = 1$ pour tout i), avec de plus, en notant θ_{v_0} l'image de θ dans k_{v_0} :

– pour v_0 réelle, θ_{v_0} suffisamment grand pour avoir $\beta(\theta_{v_0}) = 0 \in \mathrm{Br} k_{v_0}$ pour tout $\beta \in \Lambda$.

– Pour v_0 finie, la propriété $\theta_{v_0} - e_i \in k_{i,w_0}^{\times N}$ pour toute place w_0 de k_i au-dessus de v_0 pour $i = 1, \ldots, l$, où N est défini comme le ppcm des ordres des caractères $\chi_{i,j} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k'_i/k_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. En particulier on aura encore

$$\beta(\theta_{v_0}) = 0 \in \mathrm{Br} k_{v_0} \tag{3.5}$$

pour tout $\beta \in \Lambda$.

– $\theta \in U_0(k)$ tel que *par spécialisation* en θ l'image du groupe B soit $\mathrm{Br} X_\theta / \mathrm{Br} k$.

On dispose maintenant du $\mathcal{O}_S$-schéma $\mathcal{X}_\theta$. Soit X_θ sa fibre générique.

Lemme 3.8. — *L'$\mathcal{O}_S$-schéma $\mathcal{X}_\theta$ possède :*

– pour $v \in S$, un k_v-point P'_v, qui est de plus dans W_v si $v \neq v_0$,

– pour $v \in T$, un $\mathcal{O}_v$-point M'_v,

tels que pour tout $\alpha \in C = B \cup \Lambda$ on ait

$$\sum_{v \in S} \alpha(P'_v) + \sum_{v \in T} \alpha(M'_v) = 0. \tag{3.6}$$

De plus $\mathcal{X}_\theta$ possède des points entiers $N_v \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$ pour toute place $v \notin S \cup T$.

Démonstration. — Pour $v \in T \cup S \setminus \{v_0\}$, on utilise le théorème des fonctions implicites. On obtient des points P'_v sur X_θ arbitrairement proche des P_v pour $v \in S \setminus \{v_0\}$ (donc dans W_v) et des points M'_v arbitrairement proche des M_v (donc entiers) pour $v \in T$. De (3.4) on déduit, pour tout $\alpha \in C$,

$$\sum_{v \in S \setminus \{v_0\}} \alpha(P'_v) + \sum_{v \in T} \alpha(M'_v) = 0, \tag{3.7}$$

car $\alpha(P_{v_0}) = 0$ (formule (3.2)) pour tout $\alpha \in B$ et $\beta(P_{v_0}) = 0$ (formule (3.3)) pour tout $\beta \in \Lambda$. Que l'on ait $X_\theta(k_{v_0}) \neq \emptyset$ résulte de l'existence d'une section s_{v_0} de $X \to \mathbb{A}^1_k$ au-dessus de $U_{0,k_{v_0}}$. On note $P'_{v_0} = s_{v_0}(\theta) \in X_\theta(k_{v_0})$ le point donné par la section. Pour $\alpha \in B$, on a

$$\alpha(P'_{v_0}) = 0$$

puisque $\alpha(s_{v_0}(t)) = 0$. Pour $\beta \in \Lambda$, on a

$$\beta(P'_{v_0}) = \beta(\theta_{v_0}) = 0$$

par la formule (3.5).

La k-variété X_θ contient donc les points $P'_v, v \in S$, et les points $M'_v, v \in T$, et pour tout $\alpha \in B$ on a bien la formule (3.6) :

$$\sum_{v \in S} \alpha(P'_v) + \sum_{v \in T} \alpha(M'_v) = 0.$$

Soit maintenant v une place non dans $S \cup T$.

Si l'on a $v(P_i(\theta)) = 0$ pour tout i, alors en v, θ se réduit en un point de $\mathcal{U}_0(F(v))$, qui est image d'un point de $\mathcal{X}_\theta(F(v)) \subset \mathcal{U}(F(v))$. Par lissité et Hensel, ce point se relève en un point $N_v \in \mathcal{X}_\theta(O_v) \subset \mathcal{U}(O_v)$. De plus tout élément de B s'annule sur un tel point, car on a $B \subset \mathrm{Br}\,\mathcal{U}$.

Supposons $v(P_i(\theta)) > 0$ pour un i (unique car les P_i sont premiers entre eux deux à deux en dehors de S). Alors P_i admet un zéro sur $F(v)$, il existe une place w de k_i au-dessus de v avec $F(w) = F(v)$. Soit $x \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{O}_S}$ le point fermé de corps résiduel $F(v)$ associé. On a alors une inclusion ouverte $\mathcal{W}_{i,x} \subset \mathcal{X}_x = \mathcal{X}_{\theta,x}$. La $F(v)$-variété lisse $\mathcal{W}_{i,x}$ possède un $F(v)$-point n_v. Ainsi la $F(v)$-variété $\mathcal{X}_{\theta,x}$ possède le $F(v)$-point lisse n_v, qui se relève en un O_v-point N_v du $\mathcal{O}_S$-schéma lisse $\mathcal{X}_\theta$. $\square$

On appelle Ω_0 (resp. Ω_i) l'ensemble des places $v \notin S \cup T$ telles que $v(P_i(\theta)) = 0$ pour tout i (resp. telles que $v(P_i(\theta)) > 0$). Pour i fixé, l'ensemble Ω_i contient la place v_i. L'ensemble $S \cup T$ (qui contient v_0) et les ensembles $\Omega_i, i = 0, 1, \ldots, l$ réalisent une partition de l'ensemble Ω des places de k.

Pour $\alpha \in B$, $v \notin S \cup T$ et $N_v \in \mathcal{X}_\theta(O_v) \subset X(k_v)$ comme dans la démonstration du lemme 3.8, c'est-à-dire relevé d'un point $n_v \in \mathcal{W}_{i,x}(F(v))$, on a la formule [**17**, Cor. 2.4.3 et pp. 244–245]

$$\alpha(N_v) = d_i(v)\partial_{\alpha,i}(F_{i,n_v}) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \tag{3.8}$$

où $\partial_{\alpha,i} \in H^1(\mathcal{W}'_i/\mathcal{W}_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K'_i/K_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est le résidu de α au point générique de W_i, où $d_i(v) = v(P_i(\theta))$ et $F_{i,n_v} \in \mathrm{Gal}(K'_i/K_i)$ est le Frobenius en n_v pour le revêtement $\mathcal{W}'_i/\mathcal{W}_i$.

Fixons $i \in \{1, ..., l\}$. On a alors le lemme suivant, analogue du lemme 4 de [**19**] :

Lemme 3.9. — *L'élément* $\sum_{v\in\Omega_i} d_i(v)F_{i,n_v}$ *de* $\mathrm{Gal}(K'_i/K_i)$ *est dans le sous-groupe* $\mathrm{Gal}(K'_i/k'_iK_i)$.

Démonstration. — On va utiliser l'égalité (3.4) pour les éléments $\alpha \in \Lambda$ (c'est à cet effet qu'on a rajouté l'ensemble Λ à B pour obtenir l'ensemble C auquel on a appliqué le lemme formel). Soit

$$\chi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k'_i/k_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k'_iK_i/K_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Appliquons (3.4) à l'élément $\alpha_i = \mathrm{Cores}_{k_i/k}(t - e_i, \chi)$ de Λ. D'après la loi de réciprocité du corps de classes global, on a, en notant θ_v l'image de θ dans k_v :

$$\sum_{v\in\Omega_k} \alpha_i(\theta_v) = 0$$

et donc d'après (3.6), comme les points P'_v sont sur la fibre X_θ :

$$\sum_{v\notin(S\cup T)} \alpha_i(\theta_v) = 0.$$

On observe que si une place $v \notin (S \cup T)$ n'est pas dans Ω_i, alors $\alpha_i(\theta_v) = 0$ par définition de Ω_i. Ainsi

$$\sum_{v\in\Omega_i} \alpha_i(\theta_v) = 0$$

ce qui donne, par exemple en utilisant la formule (3.8),

$$\chi(\sum_{v\in\Omega_i} d_i(v)F_{i,n_v}) = 0$$

puisque $\alpha_i(\theta_v) = \alpha_i(N_v)$, l'élément α_i étant dans $\mathrm{Br}k(t)$. Finalement on a montré que $\sum_{v\in\Omega_i} d_i(v)F_{i,n_v}$ était annulé par tous les caractères de $\mathrm{Gal}(k'_iK_i/K_i)$, d'où le lemme.

□

Par définition des places w_i de k_i et de la condition f) définie avant le lemme 3.7, on peut alors grâce au lemme précédent trouver un point $r_i \in \mathcal{W}_i(F(v_i)) = \mathcal{W}_i(F(w_i))$ dont le Frobenius associé est

$$F_{i,r_i} = F_{i,n_{v_i}} - \sum_{v \in \Omega_i} d_i(v) F_{i,n_v} \in \mathrm{Gal}(K_i'/k_i'K_i) \subset \mathrm{Gal}(K_i'/K_i).$$

(Noter que comme w_i est totalement décomposée dans l'extension k_i'/k_i, le Frobenius $F_{i,n_{v_i}}$ est aussi dans $\mathrm{Gal}(K_i'/k_i'K_i)$).

On relève $r_i \in \mathcal{W}_i(F(v_i)) \subset \mathcal{X}_\theta(F(v_i))$ en un point $Q_i \in \mathcal{X}_\theta(O_{v_i})$. On a

$$d_i(v_i) = v_i(P_i(\theta)) = v_i(P(\theta_i)) = 1.$$

On a alors pour tout $\alpha \in B$:

(3.9)

$$\alpha(Q_i) + \sum_{v \in \Omega_i \setminus \{v_i\}} \alpha(N_v) = \partial_{\alpha,i}(F_{i,r_i} - F_{i,n_{v_i}} + \sum_{v \in \Omega_i} d_i(v) F_{i,n_v}) = \partial_{\alpha,i}(0) = 0.$$

Tout adèle de X_θ de composantes P'_{v_0} en v_0, $P'_v, v \in S \setminus v_0$, $M'_v, v \in T$, Q_i en v_i et N_v pour $v \in \Omega_i \setminus \{v_i\}$ $(i = 1, \ldots, l)$, et enfin $N_v \in \mathcal{U}(O_v)$, pour les autres places v est alors dans

$$\prod_{v \in S} X_\theta(k_v) \times \prod_{v \notin S} \mathcal{X}_\theta(O_v)$$

et un tel adèle, d'après (3.6), (3.9), et l'inclusion $B \subset \mathrm{Br}\,\mathcal{U}$, est orthogonal à tout $\alpha \in B$, donc à $\mathrm{Br} X_\theta$ – puisque B se surjecte sur $\mathrm{Br} X_\theta / \mathrm{Br} k$. En outre il appartient à

$$X(k_{v_0}) \times \prod_{v \in S \setminus \{v_0\}} W_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{X}(O_v).$$

L'un des principaux résultats de [**9**], le théorème 3.7, appliqué à l'espace homogène $\mathcal{X}_\theta$, montre alors qu'il existe un point de $X_\theta(k)$ proche de chacun des $P'_v, v \in S \setminus v_0$, donc dans W_v pour $v \in S \setminus v_0$, et entier en dehors de S sur $\mathcal{X}_\theta$, donc sur $\mathcal{X}$. Ceci achève la preuve du théorème. □

Remarque 3.10. — L'hypothèse (iv) est satisfaite dans chacun des cas suivants :

(a) $\mathrm{Br} X / \mathrm{Br} k = 0$; dans ce cas la conclusion du théorème est que X vérifie l'approximation forte en dehors de v_0.

(b) $\mathrm{Br} X_{k_{v_0}} / \mathrm{Br} k_{v_0} = 0$;

(c) La place v_0 est complexe ; dans ce cas l'hypothèse (iii) est toujours satisfaite, car $k_{v_0}(t)$ est alors un corps C_1 par le théorème de Tsen ([**15**], Th. 6.2.8.). Sur un tel corps, c'est un théorème de Springer que tout espace homogène d'un groupe linéaire connexe a un point rationnel [**24**, Chap. III, §2, Thm. 1' et Cor. 2].

Remarque 3.11. — On peut noter que la démonstration ci-dessus est un raffinement de la démonstration du théorème 2 de [**19**]. On a remplacé l'ensemble infini Σ de places de k et la place appelée v_∞ dans [**19**] par l'unique place v_0 de l'énoncé ci-dessus. L'hypothèse d'existence d'une k_{v_0}-section rationnelle permet de contrôler ce qui se passe en la place v_0 ; ceci remplace le travail avec la place v_∞ et l'ensemble infini Σ de [**19**]. On a aussi eu besoin d'une version sophistiquée du théorème d'approximation forte (proposition 3.4)

4. L'équation $\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 = p(t)$.

Soit k un corps de caractéristique zéro, $\overline{k}$ une clôture algébrique. Soient $a_i(t), i = 0, 1, 2, 3$ dans $k[t]$. *On suppose que les $a_i(t)$ sont premiers entre eux deux à deux.*

Soit $Y_0 \subset \mathbb{A}^1_k \times \mathbf{P}^3_k$ la k-variété définie par

$$\sum_{i=0}^{3} a_i(t)x_i^2 = 0.$$

Les points singuliers de Y_0 sont exactement les points dont la coordonnée t est une racine multiple de l'un des $a_i(t)$ et tels que pour cet i, $x_i = 1$ et $x_j = 0$ pour $j \neq i$.

Notons $Y \subset Y_0$ l'ouvert de lissité, complément de ces points.

Soit $Z_0 \subset Y_0$ le fermé défini par $x_3 = 0$. C'est donc la k-variété définie dans $\mathbb{A}^1_k \times \mathbf{P}^2_k$ par

$$\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 = 0.$$

Les point singuliers de Z_0 sont les points dont la coordonnée t est une racine multiple de l'un des $a_i(t)$ et tels que pour cet i, $x_i = 1$ et $x_j = 0$ pour $j \neq i$. Soit $Z \subset Z_0$ le lieu de lissité. Soit $X \subset \mathbb{A}^1_k \times \mathbf{P}^3_k$ le lieu de lissité de la variété définie par

$$\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 + a_3(t) = 0.$$

On a donc $Z \subset Y$, et X est le complémentaire de Z dans Y.

L'énoncé suivant généralise [**10**, Prop. 5.2].

Proposition 4.1. — *Soit X comme ci-dessus. Si l'un au moins des a_i n'est pas un carré dans $\overline{k}[t]$, alors* $\mathrm{Br}X/\mathrm{Br}k = 0$.

Démonstration. — On note $K = \overline{k}(t)$. Comme Y et Z sont lisses, on a la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Br}\overline{Y} \to \mathrm{Br}\overline{X} \to H^1_{\text{ét}}(\overline{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

(cf. [**16**], III, Cor. 6.2.)

En se restreignant au-dessus de $\mathrm{Spec}\, K$ et en utilisant le fait que $Z \to \mathbb{A}^1_{\overline{k}}$ a pour fibre générique une conique lisse et a toutes ses fibres géométriques non vides et de multiplicité 1, on établit

$$H^1_{\text{ét}}(\overline{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0.$$

On a ensuite l'inclusion $\mathrm{Br}\overline{Y} \hookrightarrow \mathrm{Br}Y_K$. La K-variété Y_K est une quadrique projective et lisse de dimension 2 sur $K = \overline{k}(t)$. On conclut $\mathrm{Br}Y_K = 0$. Ainsi $\mathrm{Br}\overline{Y} = 0$ et $\mathrm{Br}\overline{X} = 0$.

Comme le discriminant de la quadrique Y_K n'est pas un carré, on a $\mathrm{Pic}\, Y_K = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Pic}\, X_K = 0$. Comme les fibres de $\overline{X} \to \mathbb{A}^1_{\overline{k}}$ sont intègres, on en déduit $\mathrm{Pic}\, \overline{X} = 0$.

On vérifie facilement que l'on a $\overline{k}^{\times} = \overline{k}[X]^{\times}$. Soit $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. De la suite exacte

$$\mathrm{Pic}\, \overline{X}^g \to H^2(g, \overline{k}[X])^{\times}) \to \ker[\mathrm{Br}X \to \mathrm{Br}\overline{X}] \to H^1(g, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$$

on déduit

$$\mathrm{Br}k \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}X.$$

□

Le théorème suivant couvre les principaux énoncés du théorème 6.7 de [**10**].

Théorème 4.2. — *Soit k un corps de nombres. Soient $a_i(t)$ et $p(t)$ dans $k[t]$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Soit X l'ouvert de lissité de la k-variété affine définie dans $\mathbb{A}^4_k$ par l'équation*

$$\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 = p(t).$$

Supposons $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. Soit v_0 une place de k telle que la forme quadratique diagonale $< a_1(t), a_2(t), a_3(t) >$ ait un zéro sur $k_{v_0}(t)$. Alors :

(a) Si v_0 est complexe, l'image diagonale de $X(k)$ dans la projection de $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}X}$ sur $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$ est dense.

(b) La place v_0 étant à nouveau supposée quelconque, si l'un au moins des polynômes $p(t), a_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ n'est pas un carré dans $\overline{k}[t]$, la k-variété X satisfait l'approximation forte hors de v_0 : l'image diagonale de $X(k)$ dans $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$ (adèles hors de v_0) est dense.

Démonstration. — Montrons que les hypothèses (i) à (iv) du théorème 3.5 sont satisfaites.

La fibre générique de $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ est une quadrique affine, espace homogène sous le groupe G_t des spineurs de la forme quadratique diagonale $< a_1(t), a_2(t), a_3(t) >$, les stabilisateurs géométriques étant des tores de dimension 1 (voir [**9**, §5.6 et §5.8]). On a donc l'hypothèse (i).

L'hypothèse de coprimalité faite sur les $a_i(t)$ et $p(t)$ assure que toutes les fibres de $X \to \mathbb{A}^1_k$ sont géométriquement intègres, et donc scindées, ce qui donne (ii).

L'hypothèse faite sur la place v_0 implique qu'en tout $t_0 \in k_{v_0}$ où le produit $p(t). \prod_{i=0}^{2} a_i(t)$ n'est pas nul, la forme quadratique $< a_1(t_0), a_2(t_0), a_3(t_0) >$ est isotrope, et ceci garantit que le k_{v_0}-groupe G_{t_0} est isotrope, ce qui donne (iii).

Pour v_0 complexe, la condition (iv) est évidente. Pour v_0 quelconque mais avec l'hypothèse supplémentaire faite en (b), on a $\mathrm{Br}X/\mathrm{Br}k = 0$ par la proposition 4.1 donc (iv) est encore vérifiée.

On voit donc que les hypothèses (i) à (iv) du théorème 3.5 sont satisfaites. Ceci établit l'énoncé (a).

L'énoncé (b) résulte alors de loc. cit.

$\square$

Remarque 4.1. — Si v_0 est une place réelle, c'est un théorème de Witt qu'une forme quadratique de rang au moins 3 sur $k_{v_0}(t)$ a un zéro si et seulement si pour presque tout $t_0 \in k_{v_0}$ la forme quadratique spécialisée a un zéro.

Remarque 4.2. — Dans [**10**], on considère la k-variété X_0 donnée par l'équation

$$\sum_{i=0}^{2} a_i x_i^2 = p(t),$$

avec les $a_i \in k^\times$ et $p(t) \in k[t]$ non nul. Soit X son ouvert de lissité. On autorise le polynôme $p(t)$ à être un carré dans $\overline{k}[t]$. Avec les notations ci-dessus, on établit que l'image diagonale de $X(k)$ dans la projection de l'ensemble de Brauer–Manin $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}X}$ sur $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$ (adèles hors de v_0) est dense.

Lorsque $p(t)$ est un carré dans $\overline{k}[t]$, on peut avoir $\mathrm{Br}X/\mathrm{Br}k = \mathbb{Z}/2$. Dans [**10**, Thm. 6.4, Thm. 6.5], on donne aussi des énoncés pour l'approximation forte sur une résolution non singulière de X_0, c'est-à-dire une k-variété lisse Z équipée d'un k-morphisme propre et birationnel $Z \to X_0$. Le théorème principal du présent article permet aussi de traiter ce cas quand v_0 est complexe, mais pas le cas où v_0 est quelconque.

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier chaleureusement Dasheng Wei pour leur avoir signalé une erreur dans la première version de cet article, et de les avoir aidés à la corriger.

Références

[1] E. Artin et J. Tate, *Class Field Theory*, W. A. Benjamin, New York (1967).

[2] M. Auslander et A. Brumer, Brauer groups of discrete valuation rings, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **71**= Indag. Math. **30** (1968) 286–296.

[3] M. Borovoi et C. Demarche, Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces, Comment. Math. Helv. **88**, 2013, no. 1, 1–54.

[4] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, *Néron Models*, Springer-Verlag, Ergebnisse der Math. und ihr. Grenzg., 3. Folge, **21**, 1990.

[5] J.W.S. Cassels et J. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic press, London, 1967.

[6] J.-L. Colliot-Thélène, Böröczky Points rationnels sur les fibrations, in *Higher Dimensional Varieties and Rational Points*, Bolyai Society Mathematical Series, vol. **12**, Springer-Verlag, 2003, edited by K. J. Böröczky, J. Kollár and T. Szamuely, 171–221.

[7] J.-L. Colliot-Thélène, Résolutions flasques des groupes linéaires connexes, J. reine angew. Math. (Crelle) **618**, 2008, 77–133.

[8] J.-L. Colliot-Thélène, R. T. Hoobler et B. Kahn, The Bloch–Ogus–Gabber theorem, in *Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996)*, 31–94, Fields Inst. Commun. **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[9] J.-L. Colliot-Thélène et F. Xu, Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representations by integral quadratic forms, Compositio Math. **145**, 2009, 309–363.

[10] J.-L. Colliot-Thélène et F. Xu, Strong approximation for the total space of certain quadric fibrations Acta Arithmetica **157** (2013), no. 2, 169–199.

[11] J.-L. Colliot-Thélène et O. Wittenberg, Groupe de Brauer et points entiers de deux familles de surfaces cubiques affines, American Journal of Mathematics **134** (2012), no. 5, 1303–1327.

[12] T. Ekedahl, An effective version of Hilbert's irreducibility theorem, in *Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1988-1989*, éd. C. Goldstein, Progress in math. Birkhäuser vol. **91**, 1990, 241–248.

[13] Kazuhiro Fujiwara, A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber), in *Algebraic geometry 2000*, Azumino (Hotaka), Adv. Stud. Pure Math. **36**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, 153–183.

[14] S. Gille, On the Brauer group of a semisimple algebraic group, Adv. Math. **220**, 2009, 913-925.

[15] P. Gille, T. Szamuely, *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, Cambridge University Press, Cambridge Studies in advanced math. **101**, Cambridge, 2006.

[16] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, I, II, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland & Masson, 1968.

[17] D. Harari, Méthode des fibrations et obstruction de Manin, Duke Math. J. **75**, 1994, 221–260.

[18] D. Harari, Flèches de spécialisation en cohomologie étale et applications arithmétiques, Bull. S.M.F. **125**, 1997, 143–166.

[19] D. Harari, Spécialisation des conditions de Manin pour les variétés fibrées au-dessus de l'espace projectif, Compositio Math. **143**, 2007, 603–617.

[20] A. Kresch et Yu. Tschinkel, Two examples of Brauer–Manin obstruction to integral points, Bull. Lond. Math. Soc. **40** (2008), no. 6, 995–1001.

[21] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, Princ. Math. Ser. **33**, Princeton N.J., 1980.

[22] G. Prasad, Elementary proof of a theorem of Bruhat–Tits–Rousseau and a theorem of Tits, Bull. S.M.F. **110**, 1982, 197–202.

[23] J-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres, J. reine angew. Math. (Crelle) **327**, 1981, 12–80.

[24] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Cinquième édition, révisée et complétée, Lecture Notes in Mathematics **5**, Springer-Verlag, 1973,1994.

[25] J-P. Serre, *Lectures on the Mordell–Weil Theorem*, Aspekte der Mathematik, Vieweg, 1989.

[26] A. N. Skorobogatov, On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation, in *Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1988-1989*, éd. C. Goldstein, Progress in math. Birkhäuser vol. **91**, 1990, 205–219.

version initiale soumise le 13 décembre 2012 ; version corrigée soumise le 14 juillet 2013 ; acceptée sous réserve de modifications mineures le 8 septembre 2013 ; version finale envoyée le 12 septembre 2013

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* jlct@math.u-psud.fr

DAVID HARARI, Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* David.Harari@math.u-psud.fr