Surfaces de del Pezzo sans point rationnel sur un corps de dimension cohomologique un

Jean-Louis Colliot-Thélène et David A. Madore

17 mai 2003

Résumé : Pour chaque entier $d = 2, 3, 4$, il existe un corps F de dimension cohomologique 1 et une surface de del Pezzo de degré d sur F sans zéro-cycle de degré 1, en particulier sans point rationnel. Les démonstrations utilisent le théorème de Merkur'ev et Suslin, le théorème de Riemann-Roch sur une surface et la formule du degré de Rost.

Mots-clés : points rationnels, surfaces de del Pezzo, corps de dimension cohomologique 1, théorème de Riemann-Roch, formule du degré de Rost

Mathematical Subject Classification (MSC 2000) Primary : 14G05, 12G10, 14C35 ; Secondary : 14J26, 11E76

1 Introduction

Soit F un corps. D'après Enriques, Manin, Iskovskikh, Mori (voir [13] III.2.1), toute F-surface projective, lisse, géométriquement connexe qui est (géométriquement) *rationnelle*, i.e. devient birationnelle au plan projectif après extension finie convenable de F, est, sur F, birationnelle à une surface de l'un des types suivants :

(1) surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique ;

(2) surface de del Pezzo[1] de degré d, avec $1 \leq d \leq 9$.

Une inspection de cette classification avait ainsi permis d'observer que lorsque le corps F est un corps C_1 au sens de Lang (cf. [23] II.§3.2) toute telle surface possède un point rationnel (voir par exemple [13] IV.6.8). Un

[1]Pour ce qui est des propriétés générales des surfaces de del Pezzo, nous renvoyons le lecteur à [13] III.3 et [15] III et IV.

corps C_1 est de dimension cohomologique ≤ 1 au sens de Tate et Serre (c'est-à-dire que $\mathrm{Br}\, L = 0$ pour toute extension L/F finie, cf. [23] II.§3). On peut se demander si plus généralement toute surface rationnelle sur un corps de dimension cohomologique 1 possède un point rationnel. C'est le cas pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une conique. C'est le cas pour les surfaces de del Pezzo de degré au moins égal à 5. C'est aussi le cas pour le degré 1, car sur tout corps toute telle surface possède un point rationnel évident (le point base du système anticanonique).

Le but de cet article est d'établir qu'il n'en est pas de même en les autres degrés :

Théorème 1.1. *Il existe une surface cubique lisse X sur $\mathbb{Q}$ et un corps F de dimension cohomologique* 1 *et de caractéristique zéro, tels que X n'ait pas de point rationnel sur F.*

Plus précisément, X ne possède de point dans aucune extension de degré premier à 3 *de F.*

Théorème 1.2. *Il existe une intersection complète lisse X de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ et un corps F de dimension cohomologique* 1 *et de caractéristique zéro, tels que X n'ait pas de point rationnel sur F.*

Plus précisément, X ne possède de point dans aucune extension de degré impair de F.

Partant de ce dernier théorème, il est facile de donner un exemple de surface de del Pezzo de degré 2 sur F sans point rationnel. Pour une autre approche, on se reportera au paragraphe 5 ci-dessous.

Le théorème 1.2 fournit un contre-exemple au théorème 2 de [3], dont il était connu depuis 1981 que la démonstration est incorrecte[2].

Sur un corps parfait de dimension cohomologique 1, tout espace homogène non vide (non nécessairement principal) d'un groupe linéaire connexe possède un point rationnel ([23], III.2.4). On a donc :

Corollaire 1.3. *Pour chacune des surfaces X des théorèmes 1.1 et 1.2, il n'existe aucune application rationnelle définie*[3] *sur $\mathbb{Q}$ d'un espace homogène d'un $\mathbb{Q}$-groupe linéaire connexe vers X.*

---

[2]L'erreur se trouve dans le dernier lemme, p. 681 de l'article : un élément du groupe de Brauer du corps des fractions de la droite projective qui est non ramifié en toute place sauf peut-être en une place de degré 2 peut ne pas être constant.

[3]Pour les surfaces cubiques, la démonstration donne encore ceci sur un corps p-adique.

Ceci ôte l'espoir immédiat de ramener l'arithmétique de telles surfaces à celle des groupes algébriques linéaires.

Soit K un corps algébriquement clos. Une K-variété séparablement rationnellement connexe est une K-variété pour laquelle il existe un K-morphisme $f\colon \mathbb{P}^1_K \to X$ tel que l'image inverse f^*T_X du fibré tangent T_X soit un fibré ample sur $\mathbb{P}^1_K$. En dimension un, on trouve la droite projective. En dimension deux, la classe de ces variétés coïncide avec la classe des surfaces (projectives lisses) rationnelles. Soit F un corps quelconque. Une F-variété projective lisse géométriquement connexe est dite séparablement rationnellement connexe si elle l'est après passage à une clôture algébrique de F.

Les théorèmes 1.1 et 1.2 sont à mettre en perspective avec plusieurs résultats récents.

Soit $F = k(C)$ le corps des fonctions d'une courbe projective et lisse sur un corps k algébriquement clos. Graber, Harris et Starr ([10], en caractéristique zéro) et de Jong et Starr ([7], en toute caractéristique) ont établi que toute F-variété projective, lisse, (géométriquement) séparablement rationnellement connexe possède un point rationnel.

Soit $F = \mathbb{F}$ un corps fini. H. Esnault a établi dans [9] que toute $\mathbb{F}$-variété projective, lisse, (géométriquement) rationnellement connexe par chaînes (sur un corps assez grand) possède un point $\mathbb{F}$-rationnel.

C'est une question ouverte de savoir si ces résultats sont chacun un cas particulier d'un énoncé sur les corps C_1.

Rappelons que tout corps C_1 est de dimension cohomologique ≤ 1. La réciproque n'est pas vraie, comme l'a montré J. Ax. Dans [2] il a donné un exemple d'hypersurface quintique lisse dans $\mathbb{P}^9_F$, sans point rationnel, sur un corps F de caractéristique zéro de dimension cohomologique 1. Une telle hypersurface est une variété de Fano, donc rationnellement connexe ([13], V.2.13).

Un zéro-cycle sur une F-variété X est une combinaison linéaire à coefficients entiers de points fermés de X. Le degré d'un tel zéro-cycle $\sum_i n_i P_i$ est l'entier $\sum_i n_i [F(P_i) : F] \in \mathbb{Z}$.

L'hypersurface quintique d'Ax possède (de façon évidente) un zéro-cycle de degré 1 (il en est de même des autres hypersurfaces construites par Ax dans le même article, et qui établissent que pour $r > 0$, un corps peut être de dimension cohomologique 1 sans être C_r).

Kato et Kuzumaki [12] ont posé la question de savoir si, sur un corps F de dimension cohomologique 1, toute hypersurface dans $\mathbb{P}^n_F$ de degré $d \leq n$

possède un zéro-cycle de degré 1. Le théorème 1.1 montre qu'il n'en est rien[4].

On comparera les théorèmes 1.1 et 1.2 avec le résultat suivant ([4], théorème A (iv)) : pour X une surface (géométriquement) rationnelle sur un corps k de caractéristique 0 et de dimension cohomologique ≤ 1, tout zéro-cycle de degré 0 est rationnellement équivalent à 0.

Les théorèmes fournissent des exemples de surfaces rationnelles X sur un corps de dimension cohomologique 1 telles que $H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{H}^3(\boldsymbol{\mu}_p^{\otimes 2})) \neq 0$, où $\boldsymbol{\mu}_p$ est le groupe des racines p-ièmes de l'unité et $\mathscr{H}^3(\boldsymbol{\mu}_p^{\otimes 2})$ est le faisceau de Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto H^3_{\text{ét}}(U, \boldsymbol{\mu}_p^{\otimes 2})$ (pour $p = 3$, resp. $p = 2$).

Dans [8], Ducros montre que pour toute courbe de genre 0 sans point rationnel sur un corps k il existe un corps F, contenant k, de dimension cohomologique 2, sur lequel la courbe n'a pas de point. Il utilise pour cela les théorèmes de Merkur'ev et Suslin ([20]). Nous utilisons aussi les résultats de Merkur'ev et Suslin, mais nous avons également recours à d'autres ingrédients. Pour les surfaces cubiques, nous utilisons la cohomologie galoisienne et faisons appel à la formule du degré de Rost (cf. [17]). Pour les surfaces de del Pezzo de degré 4, nous utilisons le théorème de Riemann-Roch pour les faisceaux inversibles et un théorème d'Amer ([1]) et Brumer ([3]) — théorème 4.1 ci-dessous. Les paragraphes 3 et 4 de cette note (constituant respectivement la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2) sont indépendants. Au paragraphe 5, nous donnons une variante de la démonstration du théorème 1.2) qui nous a été communiquée par J. Kollár, et s'applique à d'autres situations ; on utilise ici le théorème de Riemann-Roch pour les fibrés vectoriels sur une courbe.

Nous remercions vivement D. Coray, P. Gille, A. Merkur'ev, J-P. Serre, B. Totaro et tout particulièrement J. Kollár pour diverses remarques sur des versions antérieures de ce texte.

2 Construction de corps de dimension cohomologique 1

Pour construire un corps de dimension cohomologique 1, la technique utilisée consiste, pour un certain nombre premier p (ici, p vaut 2 ou 3 selon

[4] L'article [16] de Merkur'ev, sur le u-invariant des formes quadratiques, fournit déjà une réponse négative à une question plus générale de [12].

le cas), à partir d'un corps k_0 quelconque et à ajouter successivement (et de façon transfinie, s'il le faut) une extension algébrique de corps maximale de degré premier à p et les corps de fonctions de toutes les variétés de Severi-Brauer d'indice p. Nous présentons dans ce paragraphe les résultats relatifs à cette construction.

On a le résultat classique suivant ([23] I.§4.1, prop. 21) :

Proposition 2.1. *Soient p un nombre premier et E un corps de caractéristique différente de p. On suppose satisfaites les deux hypothèses :*

(1) E n'a pas d'extension finie de degré premier à p.

(2) Le groupe de p-torsion de $\operatorname{Br} E$ *est nul, ce qui équivaut (grâce à (1)) à l'hypothèse $H^2(E, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$.*

Alors il en est de même de celui de toute extension finie de E, et la dimension cohomologique de E est au plus 1.

L'énoncé suivant est un peu moins classique :

Théorème 2.2. *Soient p un nombre premier et E un corps de caractéristique différente de p. Si E ne satisfait pas les hypothèses de la proposition précédente, alors soit E possède une extension finie de corps de degré premier à p, soit E contient une racine primitive p-ième ζ_p de* 1, *et il existe une algèbre cyclique $(a, b)_{\zeta_p}$ non triviale sur E, ce qui définit une variété de Severi-Brauer non triviale d'indice p sur E.*

Cet énoncé résulte du théorème de Merkur'ev-Suslin, qui implique que pour E contenant ζ_p, le groupe $H^2(E, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est engendré par les cup-produits d'éléments de $H^1(E, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Le fait ci-dessus, moins difficile, est établi à un cran intermédiaire de la démonstration de Merkur'ev-Suslin (cf. [20], (10.6) et (10.7)).

Le corps de dimension cohomologique 1 sera donné par le résultat suivant, qui découle des deux précédents :

Théorème 2.3. *Soient p un nombre premier, k_0 un corps de caractéristique différente de p, et $\boldsymbol{P}$ une propriété, stable par isomorphisme, des extensions de k_0. On suppose que*

(0) la propriété $\boldsymbol{P}(k_0)$ est satisfaite,

(1) si $\boldsymbol{P}(k)$ est satisfaite, alors $\boldsymbol{P}(k')$ est satisfaite pour toute extension algébrique k' de k de degré premier à p,

(2) si $\boldsymbol{P}(k)$ est satisfaite, alors, pour toute variété de Severi-Brauer Y associée à une algèbre simple centrale d'indice p sur k, la propriété $\boldsymbol{P}(k(Y))$ est satisfaite pour le corps des fonctions $k(Y)$ de Y.

(3) si $\boldsymbol{P}(k_\iota)$ est satisfaite pour tout membre k_ι d'un système inductif filtrant $(k_\iota)_{\iota\in I}$, alors $\boldsymbol{P}(\varinjlim k_\iota)$ est satisfaite.

Dans ces conditions, il existe un corps F, extension de k_0, de dimension cohomologique ≤ 1, de groupe de Galois absolu un pro-p-groupe, tel que la propriété $\boldsymbol{P}(F)$ soit satisfaite.

Ce théorème est assez connu. Cependant, faute de démonstration satisfaisante dans le cadre général, nous en donnons une ci-dessous pour la commodité du lecteur.

Démonstration du théorème 2.3. Partant du corps k_0, on construit par induction transfinie sur α parcourant la classe des ordinaux (en fait on va donner ci-dessous une borne supérieure sur les α qui nous intéressent) des corps k_α, extensions de k_0, vérifiant $\boldsymbol{P}(k_\alpha)$ pour tout α, et avec $k_0 \subseteq k_\beta \subseteq k_\alpha$ lorsque $\beta \leq \alpha$.

Lorsque δ est un ordinal limite, on définit k_δ comme la limite inductive (ou, abusivement, la réunion) des k_α pour $\alpha < \delta$: comme chacun des k_α vérifie $\boldsymbol{P}(k_\alpha)$, la propriété $\boldsymbol{P}(k_\delta)$ est également vérifiée (d'après (3) ci-dessus). Reste à expliquer comment on construit $k_{\alpha+1}$ à partir de k_α.

Soit α un ordinal pour lequel k_α a été construit. Si k_α vérifie les hypothèses de la proposition 2.1, c'est-à-dire s'il n'existe pas d'extension k'/k_α de degré premier à p et que $H^2(k_\alpha, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$, alors la dimension cohomologique de k_α est ≤ 1 d'après la proposition en question : on pose $k_{\alpha+1} = k_\alpha$; dans ce cas $F = k_\alpha$ et on a fini. Si ces hypothèses ne sont pas satisfaites, d'après le théorème 2.2, on peut trouver soit une extension k'/k_α finie de degré premier à p, soit une variété de Severi-Brauer Y d'indice p sur k_α associée à un symbole $(a, b)_\zeta$ (avec ζ racine p-ième de l'unité dans k_α) : on choisit pour $k_{\alpha+1}$ l'un ou l'autre corps k' ou $k(Y)$ (indifféremment, si les deux conviennent), et les propriétés (1) et (2) ci-dessus assurent que $\boldsymbol{P}(k_{\alpha+1})$ est encore satisfaite.

Il reste maintenant à expliquer pourquoi cette construction transfinie se termine avant un ordinal que nous allons expliciter (κ ci-dessous), c'est-à-dire qu'on ne construit pas une classe propre de corps de plus en plus gros, mais qu'au contraire on a bien $k_\alpha = k_\beta$ pour $\beta \leq \alpha$ lorsque β est assez grand (donc k_α de dimension cohomologique ≤ 1 par construction). Remarquons que le foncteur $H^2(\cdot, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ commute aux limites inductives filtrantes : ainsi, lorsque δ est un ordinal limite, $H^2(k_\delta, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est bien la limite des $H^2(k_\alpha, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ pour $\alpha < \delta$.

Soit κ le cardinal successeur de $\operatorname{card} k_0 + \aleph_0$ (c'est donc un cardinal régulier indénombrable). Effectuons une fois pour toutes un choix d'une clôture algébrique $\bar{k}_\alpha$ de k_α pour chaque α, de façon compatible aux inclusions $k_\alpha \subseteq k_\beta$. Appelons E_α l'ensemble produit cartésien d'ensembles $(H^2(k_\alpha, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) \times (\bar{k}_\alpha/k_\alpha)$ (où $\bar{k}_\alpha/k_\alpha$ est le k_α-espace vectoriel quotient de $\bar{k}_\alpha$ par k_α), et $*$ l'élément $(0,0)$ de ce produit. On voit alors (par induction sur α) que $\operatorname{card} E_\alpha < \kappa$ pour tout $\alpha < \kappa$ (puisque c'est le cas évidemment pour $H^2(k_\alpha, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et pour $\bar{k}_\alpha$). Supposons par l'absurde que k_α n'est jamais de dimension cohomologique ≤ 1 pour $\alpha < \kappa$, c'est-à-dire que $k_{\alpha+1}$ est toujours une extension propre de k_α ; alors il existe un élément différent de $*$ dans E_α qui s'envoie sur $*$ dans $E_{\alpha+1}$. Une contradiction résulte directement du lemme 2.4 ci-dessous. □

Lemme 2.4. *Soit κ un cardinal régulier indénombrable, et pour chaque $\alpha < \kappa$ soit E_α un ensemble pointé par un élément $* \in E_\alpha$, et $\varphi_\alpha \colon E_\alpha \to E_{\alpha+1}$ tel que $\varphi_\alpha(*) = *$, et tel que pour δ ordinal limite E_δ soit la limite du système inductif des E_α pour $\alpha < \delta$ (comme ensembles pointés, avec les φ_α pour morphismes). On suppose de plus que (1) $\operatorname{card} E_\alpha < \kappa$ pour tout $\alpha < \kappa$, et que (2) pour tout $\alpha < \kappa$ il existe $x \in E_\alpha$ différent de $*$ tel que $\varphi_\alpha(x) = *$. Alors il y a une contradiction.*

Démonstration. Appelons $N_\alpha \subseteq E_\alpha$ l'ensemble des éléments de E_α qui s'envoient sur $*$ dans la limite inductive E_κ de tous les E_α avec $\alpha < \kappa$. Manifestement les N_α vérifient les mêmes hypothèses que les E_α. Soit maintenant $\gamma_0 = 0$, et par récurrence sur le naturel k, soit γ_{k+1} le plus petit ordinal $\alpha < \kappa$ tel que tous les éléments de N_{γ_k} aient pour image $*$ dans N_α (un tel α existe puisque chaque élément donné de N_{γ_k} s'envoie sur $*$ dans N_κ, donc aussi dans un N_β avec $\beta < \kappa$, et en prenant la borne supérieure de ces β-là, qui porte sur un ensemble de cardinal $< \kappa$, on obtient le $\gamma_{k+1} < \kappa$ recherché, l'inégalité stricte provenant de ce que κ est régulier). Soit maintenant γ la borne supérieure des γ_k pour $k \in \mathbb{N}$: on a $\gamma < \kappa$ car κ est indénombrable régulier. Or si x est un élément de N_γ, il appartient à un N_{γ_k} pour $k \in \mathbb{N}$, donc s'envoie sur $*$ dans $N_{\gamma_{k+1}}$, donc dans N_γ, ce qui prouve que $N_\gamma = \{*\}$. Mais ceci constitue une contradiction, car il existe par hypothèse un $x \neq *$ dans E_γ qui s'envoie sur $*$ dans $E_{\gamma+1}$, donc $x \in N_\gamma$, contredisant $N_\gamma = \{*\}$. □

Remarques : Pour résumer cet épisode combinatoire, disons que si on part du corps $k = k_0$ et qu'on itère de façon transfinie l'opération de passer à une extension finie de degré premier à p ou celle de passer au corps des fonctions d'une variété de Severi-Brauer, tant que l'une d'elles au moins est possible, n'importe quel choix de ces extensions finira par donner, en moins de κ étapes, un corps F comme souhaité. Notons que si on se contente de prendre des extensions de degré premier à p, on obtient le corps fixe d'un pro-p-Sylow dans le groupe de Galois : on peut donc présenter différemment la construction transfinie (c'est sans doute plus classique et évite d'utiliser la notion d'ordinaux, mais l'argument semble plus *ad hoc* donc moins agréable) en effectuant alternativement l'opération de prendre le corps fixe d'un pro-p-Sylow et celle de passer au corps des fonctions de toutes les variétés de Severi-Brauer (à isomorphisme près) sur le corps précédent (comparer avec la construction utilisée dans [20] (11.4) et avec celle utilisée dans [8]). Notons que le corps F finalement obtenu a un cardinal inférieur à κ, c'est-à-dire, au plus égal au cardinal de k si k est infini, au plus dénombrable sinon ; avec l'utilisation que nous ferons ci-dessous de ce théorème, F est de cardinal $\leq 2^{\aleph_0}$, mais un argument simple permet de voir qu'un sous-corps dénombrable suffit déjà.

Nous terminons ce paragraphe avec un résultat qui, s'il n'est pas directement utile dans ce qui suit, sert au moins à motiver certaines conditions introduites :

Proposition 2.5. *Soient k un corps de caractéristique 0 et X une variété sur k projective, lisse, géométriquement connexe, telle que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (hypothèse satisfaite, par exemple, si X est $\bar{k}$-rationnelle). Alors pour toute extension K de k dans laquelle k est algébriquement fermé, la flèche naturelle $(\operatorname{Pic} X_{\bar{k}})^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)} \to (\operatorname{Pic} X_{\bar{K}})^{\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Pour alléger les notations, soit $G_k = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k, et $G_K = \operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ celui de K, et soit de plus $H = \operatorname{Gal}(\bar{K}/\bar{k}K)$, de sorte que $G_k = \operatorname{Gal}(\bar{k}K/K) = G_K/H$. Sous l'hypothèse $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, on sait (cf. [11], chapitre III exercice 12.6 p. 192) que les flèches naturelles $\operatorname{Pic} X_{\bar{k}} \to \operatorname{Pic} X_{\bar{k}K} \to \operatorname{Pic} X_{\bar{K}}$ sont des isomorphismes. Ainsi H agit trivialement sur $\operatorname{Pic} X_{\bar{K}}$. Ainsi, $(\operatorname{Pic} X_{\bar{k}})^{G_k} \to (\operatorname{Pic} X_{\bar{K}})^{G_K}$ est un isomorphisme. □

3 Surfaces de del Pezzo de degré 3

Pour démontrer le théorème 1.1, nous aurons besoin de certains faits connus sur les surfaces cubiques, qui sont résumés dans le théorème suivant, dû pour l'essentiel à B. Segre :

Théorème 3.1. *Soit X une surface cubique lisse sur un corps k parfait. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, soit $\bar{X} = X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \bar{k}$ et soit $G = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k. Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

(a) La surface X est k-minimale.

(b) Le groupe $(\operatorname{Pic} \bar{X})^G$ des invariants par G du groupe de Picard $\operatorname{Pic} \bar{X}$ de $\bar{X}$ est (libre) de rang 1.

Lorsqu'elles sont satisfaites, l'injection naturelle $\operatorname{Pic} X \hookrightarrow (\operatorname{Pic} \bar{X})^G$ est une bijection, ces deux groupes sont engendrés par la classe du fibré canonique K_X (classe dont l'opposée est induite par le plongement naturel de la surface cubique X dans $\mathbb{P}^3_k$), et l'application naturelle $\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} k(X)$ est injective.

De plus, si X est diagonale, c'est-à-dire donnée par une équation de la forme $a_0T_0^3 + a_1T_1^3 + a_2T_2^3 + a_3T_3^3 = 0$, alors ces conditions sont satisfaites dès que la suivante l'est :

(ii) aucun des rapports $a_m a_n / a_p a_q$, avec (m, n, p, q) permutation de $(0, 1, 2, 3)$, n'est dans $k^{\times 3}$.

Démonstration. L'équivalence de (a) et (b) est un théorème de B. Segre (voir [15], théorème IV.28.1, page 151). On a les inclusions naturelles de groupes abéliens libres de rang un $\mathbb{Z}\mathrm{K}_X \hookrightarrow \operatorname{Pic}(X) \hookrightarrow (\operatorname{Pic} \bar{X})^G$, et la classe de K_X n'est pas divisible dans $\operatorname{Pic} \bar{X}$ (son nombre d'intersection avec une des droites tracées sur $\bar{X}$ vaut -1) : ces inclusions sont donc des égalités.

Pour toute k-variété projective, lisse, géométriquement intègre X, de corps des fractions $k(X)$, la cohomologie galoisienne de la suite exacte naturelle $1 \to \bar{k}(X)^\times / \bar{k}^\times \to \operatorname{Div} \bar{X} \to \operatorname{Pic} \bar{X} \to 0$ donne la suite exacte classique

$$0 \to \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} \bar{X}^G \to \operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} k(X)$$

Ceci établit l'injectivité de la flèche $\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} k(X)$ lorsque les conditions (a) et (b) sont satisfaites.

Enfin, le fait que la condition (ii) garantisse la k-minimalité de X est de nouveau un résultat de B. Segre (voir [15] exercice III.21.10). □

Le fait suivant, qui énonce un résultat tout à fait parallèle au théorème 3.3 plus bas, pour une autre sorte d'extension (cf. (1) du théorème 2.3), est évident :

Lemme 3.2. *Soient k un corps de caractéristique 0 et X la surface cubique lisse dans $\mathbb{P}^3_k$ définie par l'équation $a_0T_0^3 + a_1T_1^3 + a_2T_2^3 + a_3T_3^3 = 0$, où $a_0, a_1, a_2, a_3 \in k^\times$. On suppose que* *(i) X n'admet de point dans aucune extension de corps k'/k de degré premier à 3,*

(ii) aucun des rapports $a_m a_n / a_p a_q$, avec (m, n, p, q) permutation de $(0, 1, 2, 3)$, n'est dans $k^{\times 3}$.

Alors, si k' est une extension finie de k de degré non multiple de 3, la surface X étendue au corps k' vérifie toujours les propriétés (i) et (ii).

En combinant ces divers résultats et la formule du degré de Rost, nous établissons maintenant le résultat technique principal (qui vise le (2) du théorème 2.3).

Théorème 3.3. *Soient, comme dans le lemme 3.2, k un corps de caractéristique 0 et X la surface cubique lisse dans $\mathbb{P}^3_k$ définie par l'équation $a_0T_0^3 + a_1T_1^3 + a_2T_2^3 + a_3T_3^3 = 0$, où $a_0, a_1, a_2, a_3 \in k^\times$. Supposons les deux conditions suivantes satisfaites*

(i) X n'admet de point dans aucune extension de corps k'/k de degré premier à 3,

(ii) aucun des rapports $a_m a_n / a_p a_q$, avec (m, n, p, q) permutation de $(0, 1, 2, 3)$, n'est dans $k^{\times 3}$.

Soient D une algèbre simple centrale sur k d'indice 3, Y la surface de Severi-Brauer associée à D et $k(Y)$ son corps des fonctions.

Alors la $k(Y)$-surface $X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(Y)$ vérifie encore les propriétés (i) et (ii).

(En particulier, elle n'a pas de point sur $k(Y)$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'application rationnelle $Y \dashrightarrow X$ définie sur k.)

Démonstration. Nous utiliserons les notations et les résultats du rapport de Merkur'ev [17] sur la formule du degré de Rost, que nous rappelons brièvement ici ; voir aussi [18], [19] et [21].

A toute variété Z sur un corps k on attache un entier naturel n_Z, appelé l'indice de Z sur k : c'est par définition le plus grand commun diviseur des degrés, sur k, des corps résiduels $k(P)$ des points fermés P de Z ; c'est aussi le p.g.c.d. des degrés des extensions finies K/k telles que $X(K) \neq \varnothing$. De plus, pour p un nombre premier et Z projective, on définit un invariant $\eta_p(Z) \in \mathbb{Z}/n_Z\mathbb{Z}$ (tué par p). Cet invariant vérifie la formule du degré ([17], théorème 4.1) : si Y et X sont des k-variétés projectives intègres de même dimension, et si $f\colon Y \to X$ est un k-morphisme et $\deg f$ désigne le degré de f (qui vaut 0 si f n'est pas dominant, et $[k(Y) : k(X)]$ si f l'est), alors n_X divise n_Y et $\eta_p(Y) = \deg f \cdot \eta_p(X) \in \mathbb{Z}/n_X\mathbb{Z}$. Par ailleurs, on sait calculer

$n_Y = p^n$ et $\eta_p(Y) = p^{n-1} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ lorsque Y est la variété de Severi-Brauer d'une algèbre simple centrale d'indice p^n : cf. [18] §7.2 et [17] remarque 7.5.

Dans la situation qui nous intéresse, l'hypothèse (i) faite sur X se traduit par $n_X = 3$; par ailleurs on a $n_Y = 3$ puisque l'algèbre D est d'indice 3, et de plus $\eta_3(Y) = 1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (ce qui nous intéresse est que cet invariant ne soit pas nul).

Soit $K/k(Y)$ une extension finie de corps de degré premier à 3. Soit Y' la normalisation (projective, intègre) de Y dans K. On dispose donc du k-morphisme fini de k-variétés intègres $p\colon Y' \to Y$. Si $X \times_k k(Y)$ possède un point dans K, alors il existe une application rationnelle h, définie sur k de Y' vers X. Soit $Y'' \subseteq Y' \times_k X$ l'adhérence du graphe de l'application rationnelle h. C'est une k-variété projective, intègre. On dispose alors du k-morphisme composé $q\colon Y'' \to Y$, de degré premier à 3, et du k-morphisme $r\colon Y'' \to X$ donné par la seconde projection. En appliquant la formule du degré régulier ([17], théorème 4.1) au morphisme q, on obtient $\eta_p(Y'') = \deg q \cdot \eta_p(Y) \in \mathbb{Z}/n_Y\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. En appliquant la même formule au morphisme $Y'' \to X$, on obtient $\eta_p(Y'') = \deg r \cdot \eta_p(X) \in \mathbb{Z}/n_X\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. De la première formule on déduit $\eta_p(Y'') \neq 0 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, de la seconde on déduit alors que le degré de r est premier à 3. Ainsi l'application naturelle $r^*\colon {}_3\operatorname{Br} k(X) \to {}_3\operatorname{Br} k(Y'')$ induite sur la 3-torsion des groupes de Brauer est injective. Mais par ailleurs la condition (ii) implique, d'après le théorème 3.1, que la flèche $\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} k(X)$ est injective, donc la flèche naturelle ${}_3\operatorname{Br} k \to {}_3\operatorname{Br} k(Y'')$ l'est aussi. Mais ceci contredit le fait que la classe de D dans ${}_3\operatorname{Br} k$, qui n'est pas nulle, s'envoie sur la classe nulle dans $\operatorname{Br} k(Y)$, et donc aussi sur la classe nulle dans $\operatorname{Br} k(Y'')$. Ceci prouve qu'il n'existe pas d'application k-rationnelle $f\colon Y' \dashrightarrow X$: la $k(Y)$-surface $X \times_k k(Y)$ satisfait l'analogue de la condition (i).

Pour ce qui est de la condition (ii) pour la $k(Y)$-surface $X \times_k k(Y)$, elle est évidente, car k est algébriquement fermé dans $k(Y)$. On peut également appliquer la proposition 2.5 prouvée plus haut de façon plus générale : pour toute surface cubique lisse sur k, l'hypothèse (b) du théorème 3.1 est donc invariante par passage de k à une extension K dans laquelle k est algébriquement fermé. □

Pour appliquer le théorème 2.3, nous aurons encore besoin du fait suivant (qui vise le (0) de ce théorème) :

Lemme 3.4. *Il existe un corps k de caractéristique 0 et quatre éléments $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}^\times$ tels que la surface cubique lisse X dans $\mathbb{P}^3_k$ définie par* *l'équation* $a_0T_0^3 + a_1T_1^3 + a_2T_2^3 + a_3T_3^3 = 0$ *vérifie les conditions (i) et (ii) du lemme 3.2.*

Démonstration. Prenons p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod 3$, et soit $\tilde{a} \in \mathbb{F}_p^\times$ qui ne soit pas un cube et $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ qui relève $\tilde{a}$ modulo p. Posons $k = \mathbb{Q}$ ou $k = \mathbb{Q}_p$ et considérons la surface cubique X d'équation $T_0^3 + pT_1^3 + p^2T_2^3 - aT_3^3 = 0$. Le fait (ii) est évident. Pour montrer que X n'a pas de point sur $\mathbb{Q}_p$, il suffit de considérer les valuations des trois termes T_0^3, pT_1^3 et $p^2T_2^3$, qui sont distinctes (modulo 3) : on doit avoir $\tilde{T}_0^3 = \tilde{a}\tilde{T}_3^3$ après réduction, mais comme $\tilde{a}$ n'est pas un cube c'est impossible. Plus généralement, si k' est une extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré premier à 3, alors pour la même raison X n'a pas non plus de point sur k' car l'indice de ramification est premier à 3 (ce qui permet de reproduire l'argument sur les valuations) et $\tilde{a}$ n'est toujours pas un cube dans le corps résiduel de k'. □

(Un théorème de Coray [5] affirme que, sur un corps p-adique, une surface cubique X ne possédant pas de point rationnel vérifie toujours $n_X = 3$, c'est-à-dire n'a de point dans aucune extension de degré premier à 3 — notre hypothèse (i). C'est une question ouverte de savoir si ce résultat vaut sur tout corps. Comparer avec le théorème 4.1 plus bas.)

Ces différents ingrédients nous permettent maintenant d'établir le théorème sur les surfaces cubiques :

Théorème 1.1. *Il existe une surface cubique X lisse dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$ et un corps F de caractéristique 0 et de dimension cohomologique 1 tels que $X(F) = \varnothing$.*

Plus précisément, X ne possède de point dans aucune extension de degré premier à 3 de F.

Démonstration. On part d'un corps $k_0 = k$ et d'une surface cubique X lisse diagonale dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$ qui vérifie sur $\mathbb{Q}$ et sur k les hypothèses (i) et (ii) du lemme 3.2, comme le lemme 3.4 en assure l'existence.

Lorsque K est une extension de k_0, on appellera $\boldsymbol{P}(K)$ la propriété suivante : l'extension $X_K = X \times_{\operatorname{Spec} k_0} \operatorname{Spec} K$ de la surface X à K vérifie les hypothèses (i) et (ii) du lemme 3.2.

Le lemme 3.2 garantit la condition (1) du théorème 2.3. Le théorème 3.3 garantit la condition (2). Le lemme 3.4, pris comme point de départ, garantit la condition (0). Enfin, la condition (3) est tout à fait claire. Le résultat voulu découle donc du théorème 2.3. □

4 Surfaces de del Pezzo de degré 4

Pour prouver le théorème 1.2, nous utiliserons un résultat élégant dû à Amer et Brumer ([1] ; [3], théorème 1) :

Théorème 4.1. *Soit k un corps (de caractéristique > 2), et soient Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques en r variables sur k. S'il existe une extension algébrique k'/k de degré impair telle que Q_1 et Q_2 aient un vecteur isotrope commun dans k'^r alors elles en ont un déjà dans k^r.*

(Dans le cas que nous utiliserons, le résultat avait été obtenu par Coray [6].)

En d'autres termes, dès qu'une intersection de deux quadriques possède un zéro-cycle de degré impair, elle possède un point rationnel.

Établissons maintenant que cette propriété de ne pas avoir de zéro-cycle de degré impair est préservée par le passage au corps des fonctions d'une conique. On comparera la démonstration du théorème suivant avec celle du théorème 3.3, laquelle reposait sur la formule du degré de Rost.

Théorème 4.2. *Soient k un corps de caractéristique 0 et X une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_k$. On suppose que $X(k) = \varnothing$ et que le groupe de Picard $\operatorname{Pic} X$ de X est réduit aux multiples de la classe K_X du fibré canonique (classe dont l'opposée est induite par le plongement naturel de la surface X dans $\mathbb{P}^4_k$). Soit C une conique lisse sur k. Alors on a $X(k(C)) = \varnothing$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une application rationnelle $h\colon C \to X$, qui est alors un morphisme. L'image de h ne peut pas être de dimension 0 car elle définirait un point rationnel de X. C'est donc une courbe géométriquement intègre $\varGamma$ définie sur k. La classe $[\varGamma]$ de $\varGamma$ dans $\operatorname{Pic} X$ s'écrit $n\mathrm{K}_X$ pour un certain entier n (noter que $n < 0$). D'après la formule d'adjonction (cf. [11], chapitre V, proposition 1.5 et [22], chapitre IV, n°8, proposition 5), le genre arithmétique $p_{\mathrm{a}}(\varGamma)$ de $\varGamma$ est $2n(n + 1) + 1$ puisque l'auto-intersection de K_X est 4.

La flèche $C \to \varGamma$ se factorise par la normalisation $\varpi\colon \tilde{\varGamma} \to \varGamma$ de $\varGamma$. La k-courbe $\tilde{\varGamma}$ est géométriquement intègre. Le genre géométrique $p_{\mathrm{g}}(\varGamma)$ de $\varGamma$ est le genre de $\tilde{\varGamma}$ qui est 0 car le genre de C est 0. Ainsi, $p_{\mathrm{g}}(\varGamma) = 0$ (qui est pair). Le genre arithmétique $p_{\mathrm{a}}(\varGamma)$ de $\varGamma$, comme expliqué ci-dessus, est $2n(n+1)+1$ (et il est impair). On a la suite exacte courte de faisceaux cohérents sur $\varGamma$

suivante : $0 \to \mathcal{O}_\Gamma \to \varpi_* \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \to \mathcal{F} \to 0$ (où le faisceau gratte-ciel $\mathcal{F}$ est, par définition, le conoyau ainsi indiqué). De plus, d'après [22], chapitre IV, n°7, proposition 3, le genre arithmétique de Γ s'écrit $p_{\mathrm{a}}(\Gamma) = p_{\mathrm{g}}(\Gamma) + \delta$ où $\delta = \sum_{Q \in \Gamma} \delta_Q$ est la longueur sur k du faisceau $\mathcal{F}$: ainsi, δ est impair. Le cycle $\sum_{Q \in \Gamma} \delta_Q[Q]$ (où δ_Q désigne la longueur de la fibre en Q de $\mathcal{F}$), sur Γ, donc sur X, est alors de degré impair, donc, d'après le théorème 4.1, il y a sur X un point rationnel, une contradiction. $\square$

La propriété $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{K}_X$ est elle-même préservée par passage au corps des fonctions d'une conique : ceci résulte de la proposition 2.5 plus haut. Comme pour le cas des surfaces cubiques, on a $\operatorname{Pic}(X_{\bar{k}})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{K}_X$ si et seulement si $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{K}_X$: on a les inclusions naturelles de groupes abéliens libres de rang un $\mathbb{Z}\mathrm{K}_X \hookrightarrow \operatorname{Pic}(X) \hookrightarrow (\operatorname{Pic} \bar{X})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$, et la classe de K_X n'est pas divisible dans $\operatorname{Pic} \bar{X}$ (son nombre d'intersection avec une droite tracée sur $\bar{X}$ vaut -1), ces inclusions sont donc des égalités.

On peut maintenant expliciter la surface considérée :

Proposition 4.3. *Soit k un corps de caractéristique 0. On suppose que le degré de $k(\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ sur k est 16. L'intersection $X \subset \mathbb{P}^4_k$ des deux quadriques définies par les équations*

$$\begin{gathered} T_0^2 + T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 = 0 \\ 2T_0^2 + 3T_1^2 + 5T_2^2 + 7T_3^2 + 11T_4^2 = 0 \end{gathered}$$

est lisse. Le groupe $(\operatorname{Pic} X_{\bar{k}})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ est réduit aux multiples de la classe K_X du fibré canonique.

Démonstration. La vérification de la lissité de X est immédiate.

Dans $\bar{k}^5$ de coordonnées $(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4)$, les deux vecteurs suivants :

$$\begin{gathered} (\sqrt{-6}, \sqrt{10}, \sqrt{-5}, 1, 0) \\ (2\sqrt{5}, -3\sqrt{-3}, \sqrt{6}, 0, 1) \end{gathered}$$

sont simultanément isotropes et orthogonaux pour les deux formes quadratiques $T_0^2 + T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2$ et $2T_0^2 + 3T_1^2 + 5T_2^2 + 7T_3^2 + 11T_4^2$. La droite qui relie les deux points ainsi définis dans $\mathbb{P}^4_{\bar{k}}$ est donc entièrement contenue dans $X_{\bar{k}}$. Une vérification aisée permet de voir que l'image de cette droite par les seize éléments de $\mathrm{Gal}(k(\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/k) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ donne bien seize droites distinctes sur $X_{\bar{k}}$.

On sait par ailleurs (cf. [15]) que les classes des seize droites tracées sur $X_{\bar{k}}$ engendrent le groupe de Picard. Comme l'action de $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ est transitive sur celles-ci, $(\operatorname{Pic} X_{\bar{k}})^G$ est de rang 1. Comme K_X n'est pas divisible dans $\operatorname{Pic} X_{\bar{k}}$, on a plus précisément $(\operatorname{Pic} X_{\bar{k}})^G = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{K}_X$. □

Remarque : Nous avons donné ici un exemple numérique pour ne pas nous embarrasser de calculs fastidieux. Néanmoins, si les deux formes quadratiques considérées sont $a_0T_0^2 + a_1T_1^2 + a_2T_2^2 + a_3T_3^2 + a_4T_4^2$ et $b_0T_0^2 + b_1T_1^2 + b_2T_2^2 + b_3T_3^2 + b_4T_4^2$ avec les a_i et les b_i tels qu'aucun des $d_{ij} = a_ib_j - a_jb_i$ ne soit nul, alors les seize droites sont données par

$$\begin{gathered}
(\varepsilon_0\sqrt{\tfrac{d_{13}d_{23}d_{04}}{d_{01}d_{20}d_{34}}}, \varepsilon_1\sqrt{\tfrac{d_{23}d_{03}d_{14}}{d_{12}d_{01}d_{34}}}, \varepsilon_2\sqrt{\tfrac{d_{03}d_{13}d_{24}}{d_{20}d_{12}d_{34}}}, 1, 0) \\
(\delta\varepsilon_0\sqrt{\tfrac{d_{14}d_{24}d_{03}}{d_{01}d_{20}d_{43}}}, \delta\varepsilon_1\sqrt{\tfrac{d_{24}d_{04}d_{13}}{d_{12}d_{01}d_{43}}}, \delta\varepsilon_2\sqrt{\tfrac{d_{04}d_{14}d_{23}}{d_{20}d_{12}d_{43}}}, 0, 1)
\end{gathered}$$

(c'est-à-dire que les deux vecteurs en question dans $\bar{k}^5$ sont simultanément isotropes et orthogonaux pour les deux formes quadratiques) en parcourant les choix de signes $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta) \in \{\pm 1\}^4$. Lorsque le groupe de Galois définit une action transitive sur ces choix de signes, la même démonstration que ci-dessus s'applique.

Ces différents ingrédients nous permettent maintenant d'établir le théorème principal sur les surfaces de del Pezzo de degré 4 :

Théorème 1.2. *Il existe une surface X intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ et un corps F de caractéristique* 0 *et de dimension cohomologique* 1 *tels que $X(F) = \varnothing$.*

Plus précisément, X ne possède de point dans aucune extension de degré impair de F.

Démonstration. On part de la surface X donnée par les équations de la proposition 4.3 sur le corps $k_0 = \mathbb{Q}$. Alors $[k_0(\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : k_0] = 16$ et $X(k_0) = \varnothing$.

Lorsque K est une extension de k_0, on appellera $\boldsymbol{P}(K)$ la conjonction des deux propriétés suivantes :

(i) $X_K(K) = \varnothing$,

(ii) $[K(\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : K] = 16$.

Notons d'ores et déjà qu'en vertu de la proposition 4.3, la propriété (ii) permet de conclure que $\operatorname{Pic} X_K = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{K}_X$.

On veut maintenant appliquer le théorème 2.3. La propriété (i) est préservée par extension algébrique de degré impair en vertu du théorème 4.1 ; et la propriété (ii) l'est aussi, de façon évidente : ceci garantit la condition (1) du théorème 2.3. La propriété (i) est préservée, en présence de la propriété (ii), par passage au corps des fonctions d'une conique, d'après le théorème 4.2 ; et la propriété (ii) l'est aussi de façon évidente (comparer avec la proposition 2.5) : ceci garantit la condition (2). La condition (0) est assurée dans notre choix initial. Enfin, la condition (3) est claire. Le théorème 2.3 permet alors de conclure. □

5 Un raffinement, et quelques applications

J. Kollár nous a indiqué un raffinement de la démonstration du théorème 4.2. Avec son accord, nous décrivons son argument. L'idée supplémentaire est d'utiliser le théorème de Riemann-Roch pour les fibrés vectoriels sur une courbe. Cela permet de faire l'économie du théorème 4.1.

Rappelons qu'on a défini au début de la démonstration du théorème 3.3 l'indice n_Z d'une variété Z sur un corps k comme le p.g.c.d. des degrés des extensions finies K/k telles que $X(K) \neq \varnothing$.

Théorème 5.1. *Soient k un corps de caractérisitique 0 et X une k-surface projective, lisse, géométriquement intègre. Soit $\mathrm{K}_X \in \operatorname{Pic} X$ la classe canonique. Soit ℓ un nombre premier qui divise l'indice n_X de X. Soit C/k une k-courbe projective, lisse, intègre, dont la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_C(\mathcal{O}_C)$ (relative au corps de base k) est première à ℓ. Soient D une k-courbe lisse intègre, $f\colon D \to C$ un k-morphisme fini de degré premier à ℓ, et $g\colon D \to X$ un k-morphisme. Alors l'image de D est une k-courbe intègre $\Gamma \subset X$ telle que ℓ ne divise pas l'entier $(\Gamma \cdot (\Gamma + \mathrm{K}_X))/2$.*

Démonstration. Si C possèdait un point fermé de degré (sur k) non divisible par ℓ, comme le degré de f n'est pas divisible par ℓ, il en serait de même de D, puis de X, ce qui est exclu. Ainsi ℓ divise n_C.

Pour les caractéristiques d'Euler-Poincaré cohérentes (où toutes les dimensions sont prises sur le corps de base k), on a, puisque f est fini, les égalités $\chi_D(\mathcal{O}_D) = \chi_C(f_*\mathcal{O}_D)$. Comme le morphisme f est fini et plat, le faisceau cohérent $f_*\mathcal{O}_D$ est un fibré vectoriel sur C de rang r, où r est le degré de f. Le théorème de Riemann-Roch pour les fibrés vectoriels sur la k-courbe

C donne l'égalité $\chi_C(f_*\mathcal{O}_D) = \deg(\bigwedge^{\max}(f_*\mathcal{O}_D)) + r\chi_C(\mathcal{O}_C)$. Comme le premier ℓ divise n_C, il divise $\deg(\bigwedge^{\max}(f_*\mathcal{O}_D))$. On conclut $\chi_D(\mathcal{O}_D) \equiv r\chi_C(\mathcal{O}_C) \pmod{\ell}$, ce qui d'après les hypothèses implique que $\chi_D(\mathcal{O}_D)$ est premier à ℓ.

Soit k_D le corps extension finie de k qui est la clôture intégrale de k dans le corps des fonctions de D. Le degré de k_D sur k est premier à ℓ, puisqu'il en est ainsi de celui de f. L'image du morphisme propre $g\colon D \to X$ ne saurait être de dimension zéro : ce serait alors un point fermé de X dont le degré sur k diviserait celui de k_D sur k, ce qui contredirait l'hypothèse que ℓ divise n_X. Soit donc $\Gamma \subset X$ la courbe image de g. Soit $\varpi\colon \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ la normalisation de Γ. Le morphisme g se factorise en $g_1\colon D \to \tilde{\Gamma}$ et ϖ. Le morphisme g_1 est fini et plat. Le faisceau $g_{1*}(\mathcal{O}_D)$ est donc un fibré vectoriel sur la k-courbe lisse intègre $\tilde{\Gamma}$. L'indice $n_{\tilde{\Gamma}}$ de $\tilde{\Gamma}$ sur k est divisible par ℓ. En appliquant le théorème de Riemann-Roch au fibré vectoriel $f_{1*}(\mathcal{O}_D)$ sur $\tilde{\Gamma}$, on obtient ici $\chi_D(\mathcal{O}_D) = \chi_{\tilde{\Gamma}}(g_{1*}(\mathcal{O}_D) \equiv s \cdot \chi_{\tilde{\Gamma}}(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}) \pmod{\ell}$, où s est le degré du morphisme g_1. Comme $\chi_D(\mathcal{O}_D)$ est premier à ℓ, on conclut qu'il en est de même de $\chi_{\tilde{\Gamma}}(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}})$. On a la suite exacte courte de faisceaux cohérents sur Γ suivante : $0 \to \mathcal{O}_\Gamma \to \varpi_*\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \to \mathcal{F} \to 0$ (où le faisceau $\mathcal{F}$ est, par définition, le conoyau ainsi indiqué). La caractéristique d'Euler-Poincaré du faisceau gratte-ciel $\mathcal{F}$ est la dimension du k-espace vectoriel $H^0(\Gamma, \mathcal{F})$, elle est donc divisible par ℓ. Comme ϖ est fini, on a $\chi_\Gamma(\varpi_*\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}) = \chi_{\tilde{\Gamma}}(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}})$. On conclut alors que $\chi_\Gamma(\mathcal{O}_\Gamma)$ est premier à ℓ. Sur la surface X, le théorème de Riemann-Roch pour un faisceau inversible $\mathscr{L}$, ou pour sa classe dans $\operatorname{Pic} X$, s'écrit $\chi_X(\mathscr{L}) - \chi_X(\mathcal{O}_X) = (\mathscr{L} \cdot (\mathscr{L} - \mathrm{K}_X))/2$. De la suite exacte de faisceaux cohérents $0 \to \mathcal{O}_X(-\Gamma) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_\Gamma \to 0$ sur X on déduit

$$\chi_\Gamma(\mathcal{O}_\Gamma) = \chi_X(\mathcal{O}_\Gamma) = \chi_X(\mathcal{O}_X) - \chi_X(\mathcal{O}_X(-\Gamma)) = -(\Gamma \cdot (\Gamma + \mathrm{K}_X))/2$$

ce qui établit le théorème. □

On dit qu'une surface de del Pezzo X est déployée sur le corps $L \subseteq \bar{k}$ si $X(L) \neq \varnothing$ et si l'inclusion $\operatorname{Pic}(X_L) \hookrightarrow \operatorname{Pic}(\bar{X})$ est une égalité.

Théorème 5.2. *Soient k un corps de caractéristique 0 et X une surface de del Pezzo de degré 2 ou 4. Supposons que 2 divise l'indice n_X de X sur k, que le groupe de Picard $\operatorname{Pic} X$ de X est réduit aux multiples de la classe K_X du fibré canonique, et que la surface X est déployée par une extension galoisienne L/k de degré une puissance de 2. Il existe alors un corps F contenant k, de dimension cohomologique 1, tel que $n_{X_F} = 2$.*

Démonstration. Pour K une extension de k, on note $\boldsymbol{P}(K)$ la conjonction des deux propriétés suivantes :

(i) 2 divise n_{X_K},

(ii) $K \otimes_k L$ est un corps.

Soit G le groupe de Galois de K sur k. On a les inclusions de groupes abéliens libres de rang un $\mathbb{Z} \cdot \mathrm{K}_X \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\, X_K^G \hookrightarrow (\mathrm{Pic}\, \bar{X})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$, et la classe de K_X n'est pas divisible dans $\mathrm{Pic}\, \bar{X}$, ces inclusions sont donc des égalités. Sous l'hypothèse (ii), on a un isomorphisme de G-modules $\mathrm{Pic}\, X_K \cong \mathrm{Pic}\, X_{K \otimes_k L}$. On en déduit $\mathbb{Z} \cdot \mathrm{K}_X = (\mathrm{Pic}\, X_K)^G = (\mathrm{Pic}\, X_{K\otimes_k L})^G$, donc $\mathbb{Z} \cdot \mathrm{K}_X = \mathrm{Pic}(X_L)$.

On veut maintenant appliquer le théorème 2.3, avec $p = 2$. La condition (0) est assurée dans notre choix initial.

La propriété (i) est trivialement préservée par extension algébrique de degré impair. La propriété (ii) l'est aussi, de façon évidente : ceci garantit la condition (1) du théorème 2.3.

Supposons que X_K satisfasse (i) et (ii). Soit C une K-conique lisse sans point rationnel. La caractéristique d'Euler-Poincaré de C est 1. Soit D une K-courbe lisse intègre, équipée d'un K-morphisme dominant $D \to C$ de degré impair. Supposons $X(K(D)) \neq \varnothing$. D'après le théorème 5.1 appliqué à $\ell = 2$, l'image de la courbe D dans X_K est une courbe $\Gamma \subset X_K$ telle que $(\Gamma \cdot (\Gamma + \mathrm{K}_X))/2$ est impair. Sous l'hypothèse $\mathbb{Z} \cdot \mathrm{K}_X = \mathrm{Pic}\, X_K$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\Gamma = n\mathrm{K}_X$, et alors $(\Gamma \cdot (\Gamma + \mathrm{K}_X))/2 = \frac{n(n+1)}{2}(\mathrm{K}_X \cdot \mathrm{K}_X)$ est pair puisque $(\mathrm{K}_X \cdot \mathrm{K}_X)$ est soit 4 soit 2. Cette contradiction montre qu'il n'existe pas d'extension $K(D)/K(C)$ de degré impair avec $X(K(D)) \neq \varnothing$, en d'autres termes 2 divise $n_{X_{K(C)}}$. La propriété (i) est donc préservée, en présence de la propriété (ii), par passage au corps des fonctions d'une conique, et la propriété (ii) l'est aussi de façon évidente : ceci garantit la condition (2).

Enfin, la condition (3) est claire. Le théorème 2.3 permet alors de conclure. □

Remarques :

(1) L'existence de surfaces de del Pezzo de degré 2 sans point rationnel sur un corps de dimension cohomologique 1 résulte déjà du théorème 1.2 : on peut en effet partir d'une surface de del Pezzo de degré 4 avec cette propriété et éclater un point fermé de degré 2 non situé sur les 16 droites.

(2) Au paragraphe précédent, on a vu des exemples de surfaces de del Pezzo de degré 4 sur $\mathbb{Q}$ satisfaisant les hypothèses du théorème 5.2. La condition que 2 divise n_X est trivialement satisfaite pour la surface $X/\mathbb{Q}$

de la proposition 4.3, puisque cette surface n'a pas de point sur le corps des réels. Pour donner un exemple de surface de del Pezzo de degré 2, on partira d'une équation $z^2 + ax^4 + by^4 + cz^4 = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tous positifs et suffisamment généraux. On renvoie au récent article [14] pour le calcul de l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard d'une surface de del Pezzo de degré 2.

(3) Comme le remarque J. Kollár, les raisonnements faits aux théorèmes 4.2 et 5.1 ont d'autres applications. En voici une. Soit X une surface projective et lisse de degré 4 dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Si X est « suffisamment générale » et si X ne possède pas de point réel, alors il n'y a aucune courbe de genre zéro (géométriquement intègre) tracée sur X. En d'autres termes, il n'existe pas de $\mathbb{R}$-morphisme d'une $\mathbb{R}$-conique lisse C vers X. De fait, si X est assez générale, un théorème de Max Noether assure que l'on a $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z} \cdot H$, où H est la classe d'une section hyperplane. Supposons qu'il existe un morphisme $C \to X$ comme évoqué. Soit Γ l'image de C. On a alors $\Gamma = nH \in \operatorname{Pic} X$. On a $\mathrm{K}_X = 0 \in \operatorname{Pic}(X)$. Le théorème 5.1 implique alors que 2 ne divise pas $2n^2$, ce qui est absurde : il n'existe donc pas de tel morphisme. On comparera ce résultat avec le résultat de géométrie complexe assurant que sur toute surface $K3$ sur $\mathbb{C}$ il existe au moins une courbe de genre géométrique zéro.

Références

[1] M. Amer, *Quadratische Formen über Funktionenkörpern*, thèse (sous la direction de A. Pfister), non publiée (1976).

[2] J. Ax, « A field of cohomological dimension 1 which is not C_1 », *Bull. Amer. Math. Soc.* **71** (1965) 717.

[3] A. Brumer, « Remarques sur les couples de formes quadratiques », *C. R. Acad. Sci. Paris* Sér. A-B **286** (1978), n°16, A679–A681.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, « Hilbert's Theorem 90 for K_2, with Application to the Chow Groups of Rational Surfaces », *Invent. math.*, **71** (1983) 1–20.

[5] D. Coray, « Algebraic points on cubic hypersurfaces », *Acta Arithmetica*, **30** (1976), 267–296.

[6] D. Coray, « Points algébriques sur les surfaces de Del Pezzo », *C. R. Acad. Sci. Paris* Sér. A-B **284** (1977), n°24, A1531–A1534.

[7] A. J. de Jong & J. Starr, « Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point », à paraître dans *Amer. J. Math.*

[8] A. Ducros, « Dimension cohomologique et points rationnels sur les courbes », *J. Algebra*, **203** (1998) n°2, 349–354.

[9] H. Esnault, « Varieties over a finite field with trivial Chow group of 0-cycles have a rational point », *Invent. math.*, **151** (2003) 1, 187–191.

[10] T. Graber, J. Harris & J. Starr, « Families of rationally connected varieties », *J. Amer. Math. Soc.*, **16** (2003), 57–67.

[11] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 52.

[12] K. Kato & T. Kuzumaki, « The Dimension of Fields and Algebraic K-Theory », *Journal of Number Theory*, **24** (1986) 229–244.

[13] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32.

[14] A. Kresch & Yu. Tschinkel, « On the arithmetic of del Pezzo surfaces of degree 2 », prépublication (2003).

[15] Yu. I. Manin, *Cubic Forms : Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland (1974, second enlarged edition 1986).

[16] A. S. Merkurjev, « Simple algebras and quadratic forms » (en russe) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem.*,**55** (1991) ; trad. anglaise *Math. USSR Izvestiya* **38** (1992) 215–221.

[17] A. S. Merkurjev, « Rost's Degree Formula », disponible à l'adresse `http://www.math.ucla.edu/~merkurev/papers/lens.dvi`

[18] A. S. Merkurjev, « Steenrod Operations and Degree Formulas », `http://www.math.ucla.edu/~merkurev/papers/new.dvi`

[19] A. S. Merkurjev, « Degree Formula » (annoté par M. Rost), disponible à l'adresse `http://www.math.ohio-state.edu/~rost/data/degree.pdf`

[20] A. S. Merkurjev & A. A. Suslin, « K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et homomorphisme de norme résiduelle » (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem.*, **46** (1982) ; trad. anglaise *Math. USSR Izvestiya* **21** (1983) 307–340.

[21] M. Rost, « Notes on the Degree Formula », disponible à l'adresse `http://www.math.ohio-state.edu/~rost/data/bd.pdf`

[22] J-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Publications mathématiques de l'Université de Nancago (VII), Actualités scientifiques et industrielles **1264**, Hermann, Paris (1959).

[23] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Cinquième édition, révisée et complétée, Springer Lecture Notes in Mathematics **5** (1994)

Jean-Louis Colliot-Thélène
Mathématiques, Bâtiment 425
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay FRANCE
colliot@math.u-psud.fr

David Madore
Mathématiques, Bâtiment 425
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay FRANCE
david.madore@ens.fr