ZÉRO-CYCLES SUR LES SURFACES DE DEL PEZZO (VARIATIONS SUR UN THÈME DE DANIEL CORAY)

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

1. Introduction

Dans sa thèse (Cambridge, 1974) [C1], Daniel Coray montra que si une surface cubique lisse X définie sur un corps k parfait possède un point rationnel dans une extension finie de corps K/k de degré premier à 3, alors elle possède un point rationnel dans une extension de corps K/k de degré soit 1, soit 4, soit 10. Voici le principe de sa démonstration. On considère un point fermé P de degré premier à 3 aussi petit que possible, on fait passer par ce point et par un point de degré 3 une surface de $\mathbf{P}^3$ de degré aussi petit que possible, pour que le genre arithmétique p_a de la courbe intersection Γ soit aussi petit que posssible. Si cette courbe est lisse et géométriquement connexe de genre $g = p_a$, on applique le théorème de Riemann-Roch sur la courbe Γ à un zéro-cycle de degré au moins égal à g, premier à 3, et de degré aussi petit que possible. Dans les bons cas, on établit ainsi l'existence sur Γ et donc sur X d'un zéro-cycle effectif, et donc d'un point fermé, de degré premier à 3 plus petit que celui que l'on avait au début, et on recommence le procédé. Le processus a ses limites : on n'arrive pas à résoudre les cas 4 et 10, dont la possibilité à ce jour n'est pas exclue.

La méthode fut ensuite appliquée par Coray [C2] aux surfaces de del Pezzo de degré 4, et une variante fut appliquée par Coray et moi [CTC] aux surfaces fibrées en coniques sur la droite projective.

Une *difficulté technique* dans ces articles est que les courbes obtenues dans un système linéaire donné ne sont pas a priori lisses ni même géométriquement irréductibles : on doit donc discuter les dégénérescences possibles.

Voici le contenu du présent article.

Au §2, on donne un argument général, combinant théorème de Bertini, déformation et spécialisation, qui dans ce type d'argument peut permettre de ne considérer que le cas des courbes lisses. Aux paragraphes suivants, on utilise systématiquement cette simplification de la méthode de Coray.

Au §3 on reprend l'argument de Coray [C1] pour les surfaces cubiques.

Au §4, on montre que si une surface cubique lisse possède un point rationnel, alors le groupe de Chow des zéro-cycles est engendré par les points rationnels et les points fermés de degré 3, et que tout zéro-cycle de degré au moins 10 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Au §5 on traite le cas des surfaces de del Pezzo de degré 2. On montre ici que s'il y a un point dans une extension de corps de degré impair, alors il y a un point dans une extension de degré 1, 3 ou 7.

Date: 14 mai 2020.

Au §6, on note que ceci achève la démonstration de l'énoncé suivant : pour toute k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, k-minimale X, il existe un entier $N(X)$ qui ne dépend que de la géométrie de X tel que, si X possède un zéro-cycle de degré 1, alors X possède des points fermés de degrés premiers entre eux et plus petits que $N(X)$.

Au §7, logiquement indépendant du reste de l'article, on revient aux surfaces cubiques. On s'intéresse à une question soulevée par Qixiao Ma [QM] : sur une surface cubique lisse sans point rationnel, existe-t-il un point fermé de degré 3 non découpé par une droite ? On relie ce problème à la question (ouverte) de la densité des points rationnels sur une surface de del Pezzo de degré 1.

Pour ne pas alourdir ce texte, on se limite aux corps de caractéristique nulle. On laisse au lecteur le soin de voir ce qui subsiste sur un corps quelconque. Des résultats dans cette direction sont obtenus dans [C1] et [QM].

On utilise librement dans cet article la théorie des surfaces cubiques et plus généralement des surfaces de del Pezzo comme on peut la trouver dans les livres [Ma] et [Kol].

2. Bertini et corps fertiles

Rappelons l'une des versions des théorèmes de Bertini.

Théorème 2.1. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_k$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2 et engendrant l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Il existe un ouvert non vide de l'espace projectif dual de $\mathbf{P}^n_k$ tel que pour tout hyperplan h de $\mathbf{P}^n_k$ correspondant à un point de cet ouvert, la k-variété $f^{-1}(h) \subset X$ soit projective, lisse, géométriquement connexe.*

Référence : Jouanolou [J, Chap. I, Théorème 6.3]. Sur un corps algébriquement clos : Hartshorne [H, Cor. III.10.9 et Ex. III.11.3]

Lemme 2.2. *Soit k un corps. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_k$ un k-morphisme dont l'image engendre l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Soit $r \leq n+1$ un entier. Il existe un ouvert de Zariski non vide de X^r dont les points géométriques sont les r-uples $(P_1, \dots, P_r) \in X^r$ dont les images sont des points projectivement indépendants dans $\mathbf{P}^n$.*

Démonstration. C'est clair. □

Proposition 2.3. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_k$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2, engendrant l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Soit $r \leq n$ un entier. Il existe un ouvert non vide $U \subset X^r$ tel que, pour tout corps L contenant k et pour tout L-point $(P_1, \dots, P_r) \in U(L)$, il existe un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^n_L$ tel que l'image réciproque $f^{-1}(h) \subset X_L$ soit une L-variété lisse et géométriquement intègre contenant les points $\{P_1, \dots, P_r\}$.*

Démonstration. Soit d la dimension de X. Notons $\mathbf{P}^*$ le projectif des hyperplans de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^n$. On note indifféremment h un point de $\mathbf{P}^*$ ou l'hyperplan de $\mathbf{P}$ qu'il définit. Pour $h \in \mathbf{P}^*$, on note $X_h = f^{-1}(h)$. Par hypothèse, chaque X_h est de dimension $d-1$. Par le théorème 2.1, il existe un ouvert non vide $W_0 \subset \mathbf{P}^*$ tel que pour tout $h \in W_0$, la variété X_h soit lisse et géométriquement connexe.

Soit $Z \subset X^r \times \mathbf{P}^*$ le fermé dont les points géométriques sont les $(P_1, \ldots, P_r; h)$ avec $h \in \mathbf{P}^*$ et $P_i \in f^{-1}(h)$. Soient $p : Z \to \mathbf{P}^*$ et $q : Z \to X^r$ les deux projections.

Soit $U_1 \subset X^r$ un ouvert donné par le lemme 2.2. La restriction $V_1 = q^{-1}(U_1) \to U_1$ de $q : Z \to X^r$ au-dessus de U_1 est une fibration en espaces projectifs de dimension $N - r$. La fibre au-dessus d'un point $(P_1, \ldots, P_r)$ consiste en les hyperplans de $\mathbf{P}^n$ qui contiennent $(P_1, \ldots, P_r)$. Cette fibration est localement scindée pour la topologie de Zariski, localement c'est un espace projectif. La variété V_1 est donc lisse, géométriquement intègre, de dimension $rd + N - r$. Au-dessus de tout point $h \in \mathbf{P}^*$, la fibre de la projection $Z \to \mathbf{P}^*$ est le produit $(X_h)^r$, qui est de dimension $r(d-1)$. Si l'image de $V_1 \subset Z$ via la projection $p : Z \to \mathbf{P}^*$ n'était pas Zariski-dense dans $\mathbf{P}^*$, alors la dimension de V_1 serait au plus $r(d-1) + N - 1$. Ainsi le morphisme composé $V_1 \subset Z \to \mathbf{P}^*$ est dominant. Soit $W_1 \subset \mathbf{P}^*$ un ouvert non vide contenu dans son image. Soit $W = W_0 \cap W_1 \subset \mathbf{P}^*$. Soit $V = p^{-1}(W) \cap V_1 \subset Z$. Soit $U := q(V) \subset X^r$. C'est un ouvert de $U_1 \subset X^r$, puisque $q : V_1 \to U_1$ est un fibré projectif, en particulier est lisse. Comme $q : V_1 \to U_1$ est un fibré projectif localement scindé pour la topologie de Zariski, et que le corps de base k est infini, pour tout corps L contenant k, la flèche induite $V(L) \to U(L)$ est surjective.

Pour tout point $h \in W \subset \mathbf{P}^*$, l'image réciproque V_h via $V \to W$ est non vide, et c'est un ouvert de $p^{-1}(h) \subset X^r$. Par ailleurs $p^{-1}(h) = (X_h)^r$, qui est lisse et géométriquement connexe car on a $W \subset W_0$.

On a bien montré : Pour tout L-point $M = (P_1, \ldots, P_r)$ de U, il existe un L-hyperplan h de $\mathbf{P}^n_L$, contenant chacun des $f(P_i)$, et tel que $f^{-1}(h) \subset X_L$ soit une L-hypersurface lisse et géométriquement intègre. □

Etant donnés une variété quasiprojective lisse intègre X sur le corps k (de caractéristique zéro) et un entier naturel $m \geq 1$, on note $\mathrm{Sym}^m X$ le quotient de X^m par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$. Il y a une bijection naturelle entre les k-points de $\mathrm{Sym}^m X$ et les zéro-cycles effectifs sur S de degré m. Le groupe $\mathfrak{S}_m$ agit librement sur le complémentaire dans X^m des diagonales partielles. Le quotient de ce complémentaire par $\mathfrak{S}_m$ est un ouvert lisse de $\mathrm{Sym}^m X$ qu'on notera $\mathrm{Sym}^m_{sep} X$. Les k-points de $\mathrm{Sym}^m_{sep} X$ correspondent aux zéro-cycles effectifs de la forme $\sum_j P_j$ avec P_j des points fermés distincts sur X (un tel zéro-cycle effectif, sans multiplicités, sera appelé séparable) dont les corps résiduels $k(P_j)$ satisfont $\sum_j [k(P_j) : k] = m$.

La proposition 2.3 admet la généralisation suivante.

Proposition 2.4. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_k$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2, engendrant l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Soient $s_1, \ldots, s_t$ des entiers naturels tels que $\sum_i s_i \leq n$. Il existe un ouvert lisse non vide U du produit $\mathrm{Sym}^{s_1}_{sep} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t}_{sep} X$ tel que, pour tout corps L contenant k et tout L-point de U, correspondant à une famille de zéro-cycles effectifs séparables z_i sur X_L, avec z_i de degré s_i, il existe un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^n_L$ tel que l'image réciproque $f^{-1}(h) \subset X_L$ soit une L-variété lisse et géométriquement intègre contenant les points du support du zéro-cycle $\sum_i z_i$.*

Démonstration. On utilise la proposition précédente et les notations de sa démonstration. On introduit le fermé

$$Z_1 \subset \mathrm{Sym}^{s_1} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t} X \times \mathbf{P}^*$$

qui est l'image schématique de $Z \subset X^r \times \mathbf{P}^*$ par le morphisme fini

$$X^r \times \mathbf{P}^* \to \mathrm{Sym}^{s_1} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t} X \times \mathbf{P}^*.$$

La projection $Z \to X^r$ se quotiente par l'action du groupe fini $G = \mathfrak{S}_{s_1} \times \ldots \mathfrak{S}_{s_t}$, donnant la projection $Z_1 \to \mathrm{Sym}^{s_1} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t} X$. On peut supposer que l'ouvert $U_1 \subset X^r$ dans la proposition précédente est contenu dans le complémentaire des diagonales partielles de X^r. On a $V_1 \subset Z$. Le morphisme $V_1 \to U_1$ définit un fibré projectif localement trivial sur U_1 pour la topologie de Zariski, et cette projection est compatible avec l'action fidèle de G sur V_1 et U_1. Il en résulte que le quotient $V_1/G \to U_1/G$ est un fibré projectif localement trivial pour la topologie de Zariski sur U_1/G. Soit $V' \subset V_1/G$ l'ouvert qui est l'image de l'ouvert $V \subset V_1$ par la projection $V_1 \to V_1/G$, puis $U' \subset U_1/G$ l'ouvert image de V' par le morphisme $V_1/G \to U_1/G$. Il résulte de ce qui précède que, pour tout corps L contenant k, la flèche induite $V'(L) \to U'(L)$ est surjective. Tout point géométrique de $\mathbf{P}^*$ qui est dans l'image de $V' \subset Z_1$ par la projection $Z_1 \to \mathbf{P}^*$ est dans l'image de V, et donc correspond à un hyperplan dont l'intersection avec X est lisse et connexe. L'ouvert U' convient pour l'énoncé de la proposition. □

Un corps F est dit fertile (terminologie due à Moret-Bailly ; en anglais on dit « large field ») s'il satisfait la propriété suivante : si une F-variété X intègre possède un F-point lisse, alors l'ensemble $X(F)$ de ses points F-rationnels est dense dans X pour la topologie de Zariski. On consultera [P] pour un rapport récent sur le sujet. Une extension finie d'un corps fertile est fertile. Pour tout corps k, le corps $k((t))$ des séries formelles sur k est fertile.

Théorème 2.5. *Soit F un corps de caractéristique zéro. Soit X une F-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_F$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2, engendrant l'espace projectif $\mathbf{P}^n_F$. Soient $P_1, \ldots, P_t$ des points fermés de X de degrés respectifs s_i sur k, tels que la somme des s_i soit au plus égale à n. Si le corps F est fertile, alors il existe un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^n_F$ défini sur F tel que $X_h \subset X$ soit lisse, géométriquement intègre, et contienne des zéro-cycles effectifs $z_1, \ldots, z_t$ de degrés respectifs $s_1, \ldots, s_t$.*

Démonstration. La famille $(P_1, \ldots, P_t)$ définit un k-point de la k-variété lisse géométriquement connexe $\mathrm{Sym}^{s_1}_{sep} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t}_{sep} X$. Soit $U \subset \mathrm{Sym}^{s_1}_{sep} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t}_{sep} X$ un ouvert donné par la proposition 2.4. Comme F est fertile, on a $U(F) \neq \emptyset$. Tout F-point de U définit un zéro-cycle $\sum_j z_j$ sur X_F, avec chaque z_j effectif de degré s_j, tel qu'il existe un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^n_F$ avec $X_h = f^{-1}(h)$ lisse et géométriquement connexe, et contenant les points fermés dans le support des z_j. □

On a l'énoncé bien connu suivant.

Lemme 2.6. *Soit R un anneau de valuation discrète excellent, F son corps des fractions et k son corps résiduel. Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma propre. Si la F-variété $\mathcal{X} \times_R F$ possède un point fermé P de degré d, alors il existe un zéro-cycle effectif z de degré d sur la k-variété $\mathcal{X} \times_R k$.*

Démonstration. La fermeture intégrale de R dans l'extension $F(P)/F$ est un anneau de Dedekind S semi-local, fini et plat sur R, de degré d. Comme le R-schéma $\mathcal{X}$ est propre, le point $P \in X(F)$ définit un point de $\mathcal{X}(S)$. La fibre de ce point au-dessus de $\mathrm{Spec}(k) \subset \mathrm{Spec}(R)$ est un sous k-schéma de dimension zéro de $\mathcal{X} \times_R k$, dont le zéro-cycle associé est de degré d. □

Proposition 2.7. *Soient k un corps et $F = k((t))$ le corps des séries formelles sur k. Soit X une k-variété propre.*

(a) Le pgcd des degrés des points fermés a la même valeur sur X et sur X_F.

(b) Pour tout entier $r \geq 1$, le plus petit degré d'un point fermé de degré premier à r, qui est aussi le plus petit degré d'un zéro-cycle effectif de degré premier à r, a la même valeur sur X et sur X_F.

(c) Soit I un ensemble d'entiers naturels. Si le groupe de Chow des zéro-cycles sur X_F est engendré par les classes de cycles de degré $d \in I$, alors il en est de même sur X.

(d) Soit $d \geq 0$ un entier. Si tout zéro-cycle sur X_F de degré au moins d est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif, alors il en de même sur X.

Démonstration. Si $P \in X$ est un point fermé de X, alors $P \times_k F$ est un point fermé de X_F de même degré. Si M est un point fermé de X_F de degré d, d'après le lemme 2.6, il existe un zéro-cycle sur X de degré d, et si d est premier à r, il existe sur X un point fermé de degré premier à r et au plus égal à d. Les énoncés (c) et (d) sont des conséquences de l'existence et des propriétés de l'homomorphisme de spécialisation sur les groupes de Chow [F, §20.3]. □

3. Surfaces cubiques lisses avec un zéro-cycle de degré 1

Le théorème suivant est dû à Coray [C1]. Nous en reproduisons les différents pas, avec la simplification apportée par l'utilisation du théorème 2.5 : il n' y a plus de discussion des cas possibles où les courbes utilisées dans la démonstration sont réductibles ou singulières.

Théorème 3.1. *(Coray) Soit k un corps de caractéristique zéro. Si une k-surface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^3_k$ contient un zéro-cycle de degré 1, alors elle possède un point fermé de degré 1, ou 4, ou 10.*

Démonstration. L'énoncé peut se reformuler ainsi : si la k-surface cubique lisse possède un point fermé de degré d premier à 3, alors le degré minimal d'un tel point est 1, ou 4, ou 10.

D'après la proposition 2.7, il suffit de le démontrer lorsque le corps k est fertile, ce que nous supposons désormais.

On note K le faisceau canonique sur X. Le système linéaire complet $|-K|$ associé au faisceau inversible $-K$ définit le plongement de X dans $\mathbf{P}^3_k$. Pour tout entier $n > 0$, le système linéaire $|-nK|$ définit un plongement dans un espace projectif, d'image de dimension 2, engendrant cet espace projectif. Pour un fibré inversible $\mathcal{L}$, notons $h^i(X, \mathcal{L})$ la dimension sur k du groupe de cohomologie cohérente $H^i(X, \mathcal{L})$. Pour la surface cubique lisse X comme pour toute surface projective et lisse géométriquement rationnelle, on a $H^1(X, O_X) = 0$ et $H^2(X, O_X) = 0$, et donc $\chi(X, O_X) = 1$.

Soit $n \geq 1$. Par dualité de Serre [AK, Chap. IV, Prop. 4.1] on a $h^2(-nK) = h^0((n+1)K)$ et $h^1(-nK) = h^1((n+1)K))$. On a $h^0((n+1)K) = 0$ car $-K$ est ample. On a aussi $h^1((n+1)K)) = 0$ par le théorème d'annulation de Kodaira, puisque $-K$ est ample.

Pour $n \geq 1$, le théorème de Riemann-Roch sur la surface X [Mu, Lecture 12, Prop. 3] donne donc

$$h^0(-nK) = 3n(n+1)/2 + 1.$$

Si Γ est une courbe projective, lisse, géométriquement connexe dans le système linéaire $|-nK|$, on a la formule

$$g(\Gamma) = p_a(\Gamma) = 3n(n-1)/2 + 1.$$

Une telle courbe contient un zéro-cycle de degré $3n = (-K.-nK)$, découpé par un plan de $\mathbf{P}^3_k$.

Soit $d > 0$ le degré minimum d'un zéro-cycle effectif de degré premier à 3 sur X. C'est donc aussi le degré minimum d'un point fermé de degré premier à 3 sur X. Si $d = 1$, on a fini. Supposons $d \geq 2$. Si la surface cubique possède un point sur une extension quadratique de k, une construction bien connue montre qu'elle possède un point rationnel. On se limite donc dorénavant au cas $d \geq 4$. La surface X contient un point fermé de degré 3, découpé par une droite quelconque de $\mathbf{P}^3_k$.

Il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que

$$g = 3n(n-1)/2 + 1 \leq d < 3n(n+1)/2 + 1.$$

Comme on a $d \geq 4$, on a $n \geq 2$.

Supposons d'abord $g = 3n(n-1)/2 + 1 < d \leq 3n(n+1)/2 - 3$. Comme d est premier à 3 et $d + 3 \leq 3n(n+1)/2$, le théorème 2.5 assure l'existence d'une courbe Γ projective, lisse, géométriquement connexe dans le système $|-nK|$, contenant la réunion d'un point fermé de degré d et d'un point de degré 3, donc contenant un zéro-cycle de degré 1, et donc aussi un zéro-cycle de degré $g = 3n(n-1)/2+1$. Par le théorème de Riemann-Roch, la courbe Γ possède donc un zéro-cycle effectif de degré $3n(n-1)/2 + 1 < d$, ce qui contredit l'hypothèse que d est minimal.

Il reste donc les possibilités suivantes :

$$d = 3n(n+1)/2,$$
$$d = 3n(n+1)/2 - 1,$$
$$d = 3n(n+1)/2 - 2,$$
$$d = 3n(n-1)/2 + 1.$$

Le cas $d = 3n(n+1)/2$ est exclu, car d est premier à 3.

Dans chacun des trois autres cas, toute courbe lisse Γ dans le système $|-nK|$ contenant un point de degré d contient un zéro-cycle de degré 4, car, comme on l'a déjà indiqué, elle contient un zéro-cycle de degré $3n$.

Supposons $d = 3n(n+1)/2 - 1$. Par le théorème 2.5, il existe une courbe Γ lisse géométriquement connexe dans le système linéaire $|-nK|$ contenant un point fermé de degré d, degré qui est congru à 2 mod. 3. Comme la courbe Γ contient un zéro-cycle de degré 4, elle contient donc aussi un zéro-cycle de degré $d-4$, degré qui est premier à 3. Comme on a $n \geq 2$, on a

$$g = 3n(n-1)/2 + 1 \leq 3n(n+1)/2 - 1 - 4 = d - 4.$$

Le théorème de Riemann-Roch sur la courbe Γ assure alors l'existence d'un zéro-cycle effectif de degré $d-4$, premier à 3, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d minimal.

Supposons $d = 3n(n+1)/2 - 2$ et n impair. Par le théorème 2.5, il existe une courbe Γ lisse géométriquement connexe dans le système $|-nK|$ contenant un point fermé de degré d, degré qui est congru à 1 mod. 3. Comme 2 est combinaison linéaire de $3n(n+1)/2-2$ et $3n$, il existe alors un zéro-cycle de degré 2 sur Γ. La courbe Γ contient donc un zéro-cycle de degré $d-2$. Comme on a $n \geq 2$, on a

$$g = 3n(n-1)/2 + 1 \leq 3n(n+1)/2 - 2 - 2 = d - 2.$$

Par le théorème de Riemann-Roch, sur la courbe Γ, il existe un zéro-cycle effectif de degré $d-2$, qui est premier à 3. Ainsi X possède un zéro-cycle effectif de degré $d-2$ premier à 3, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d minimal.

Supposons donc $d = 3n(n+1)/2 - 2$ et n pair, donc $n \geq 2$. Par le théorème 2.5, il existe une courbe Γ lisse dans le système $|-nK|$ contenant un point fermé de degré d, degré qui est congru à 1 mod. 3.

Dans le cas $n = 2$, on a $g = 4$ et $d = 7$. Comme Γ contient un zéro-cycle de degré 4, le théorème de Riemann-Roch sur une courbe montre l'existence d'un zéro-cycle effectif de degré 4 sur une telle courbe, et donc aussi sur X, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d minimal.

On peut donc supposer n pair, $n \geq 4$. Dans ce cas, on a

$$g = 3n(n-1)/2 + 1 \leq 3n(n+1)/2 - 2 - 8 = d - 8.$$

Comme Γ contient un zéro-cycle de degré 4, le théorème de Riemann-Roch sur une courbe montre l'existence d'un zéro-cycle effectif contient un zéro-cycle effectif de degré $d-8$, et $d-8$ est congru à 2 modulo 3, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d minimal.

Il reste à examiner le cas $d = 3n(n-1)/2 + 1$, où l'on a $n \geq 2$ et $d \geq 4$.

On a donc une k-surface X avec un point fermé P de degré d premier à 3 minimal, au moins égal à 4. L'unique entier n tel que

$$3n(n-1)/2 + 1 \leq d < 3n(n+1)/2 + 1$$

satisfait $3n(n-1)/2 + 1 = d$.

On prend un point fermé M de degré 3 sur X découpé par une droite D définie sur k, qu'on peut choisir générale car le corps k est infini. Soit $p : Y \to X$ l'éclatement de X en le point fermé M. On note $E \subset Y$ le diviseur exceptionnel et K le faisceau canonique sur X.

Le système linéaire $|p^*(-K) - E|$ définit un morphisme $Y \to D = \mathbf{P}^1_k$, dont les fibres sont les sections de X par les plans contenant D. On a un plongement $Y \subset \mathbf{P}^1_k \times \mathbf{P}^3_k$ dont la projection sur le premier facteur est définie par le système linéaire $|p^*(-K) - E|$ et la projection sur le second facteur est définie sur le second facteur par $|p^*(-K)|$. Il s'en suit que pour tout couple d'entiers $a \geq 1, b \geq 1$ le faisceau inversible $a(p^*(-K) - E) + bp^*(-K)$ est très ample. En particulier, pour $n \geq 3$, le faisceau $p^*(-nK) - 2E$ est très ample. Le fait que ces faisceaux inversibles soient très amples peut aussi s'établir en utilisant [R, Thm. 1].

On considère sur Y les systèmes linéaires $|p^*(-nK) - 2E|$ pour $n \geq 1$. Ceci correspond aux sections de X par des surfaces de degré $n \geq 3$ dans $\mathbf{P}^3$, avec une singularité au point fermé M, qui est de degré 3. Imposer une telle singularité correspond à 9 conditions linéaires.

Lemme 3.2. *Soit $n \geq 3$. On a $h^0(Y, p^*(-nK) - 2E) = 3n(n+1)/2 - 8$, le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E|$ définit un plongement de la surface Y dans un espace projectif de dimension $3n(n+1)/2 - 9$. Les courbes projectives et lisses sur Y dans le système linéaire associé satisfont*

$$g = 3n(n-1)/2 - 2.$$

Démonstration. Le faisceau canonique sur Y est $p^*(K)+E$. Par dualité de Serre, on a

$$h^2(p^*(-nK)-2E) = h^0(p^*(K)+E+p^*(nK)+2E) = h^0(p^*((n+1)K)+3E)$$

et

$$h^1(p^*(-nK)-2E) = h^1(p^*((n+1)K)+3E).$$

L'opposé de $p^*((n+1)K)+3E$ est $p^*(-(n+1)K)-3E$ qui est la somme de $3(p^*(-K)-E)$ et de $p^*(-mK)$ avec $m \geq 1$, et donc est très ample. Ceci implique d'une part $h^0(p^*((n+1)K)+3E)=0$, d'autre part d'après le théorème d'annulation de Kodaira, $h^1(p^*((n+1)K)+3E)=0$. En utilisant le théorème de Riemann-Roch sur la surface Y, ceci donne

$$h^0(Y, p^*(-nK)-2E) \ = 3n(n+1)/2-8.$$

□

Pour appliquer le théorème 2.5, on a besoin de l'inégalité

$$3n(n-1)/2+1 = d \leq 3n(n+1)/2-9$$

soit $n \geq 20/6$ et donc $n > 3$. On se restreint donc maintenant à $n \geq 4$. Comme on a $d = 3n(n-1)/2+1$, ceci équivaut à ignorer les cas $d=1$, $d=4$ et $d=10$.

Le théorème 2.5 assure l'existence sur Y d'une k-courbe Γ lisse et géométriquement connexe sur Y, de genre $g = 3n(n-1)/2-2$, contenant un zéro-cycle effectif de degré $d = 3n(n-1)/2+1$.

La courbe Γ contient aussi un zéro-cycle de degré $3n$, découpé par l'image réciproque d'une section plane de $X \subset \mathbf{P}^3_k$. La courbe Γ possède donc un zéro-cycle de degré 2. Elle contient donc un zéro-cycle de degré $d-2 = 3n(n-1)/2-1$, de degré premier à 3, et satisfaisant $d-2 \geq g$. Le théorème de Riemann-Roch sur une courbe assure qu'il existe sur Γ, et donc sur Y, et donc sur X, un zéro-cycle effectif de degré $d-2$, premier à 3, ce qui contredit l'hypothèse d minimal.

On voit donc que l'on a soit $d=1$, soit $d=4$, soit $d=10$. □

4. Surfaces cubiques avec un point rationnel

Soit k un corps de caractéristique zéro. Toute surface cubique lisse X sur k avec un point k-rationnel est k-unirationnelle, les k-points sont denses pour la topologie de Zariski.

Théorème 4.1. *Soit $X \subset \mathbf{P}^3_k$ une surface cubique lisse possédant un point rationnel.*

(a) Soit $Q \in X(k)$ un point rationnel. Tout zéro-cycle effectif de degré au moins 4 sur X est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif $z_1 + rQ$ avec $r \geq 0$ et z_1 effectif de degré au plus 3.

(b) Tout zéro-cycle de degré positif ou nul est rationnellement équivalent à une différence $z_1 - z_2$ avec z_1 effectif et z_2 efffectif de degré au plus 3.

(c) Tout zéro-cycle de degré zéro est rationnellement équivalent à la différence de deux cycles effectifs de degré 3.

(d) Tout zéro-cycle de degré au moins 3 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif ou à la différence d'un zéro-cycle effectif et d'un point fermé de degré 3.

(e) Le groupe de Chow des zéro-cycles sur X est engendré par les classes des points rationnels et des points fermés de degré 3.

(f) Tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à 10 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Démonstration. D'après la proposition 2.7, pour établir (a), il suffit de le faire sur un corps fertile. On suppose désormais k fertile.

Soit z un zéro-cycle effectif de degré $d \geq 1$. Soit n le plus petit entier tel que $d + 2 \leq 3n(n + 1)/2 + 1$. On a donc

$$3n(n-1)/2 + 1 < d + 2$$

soit encore

$$3n(n-1)/2 \leq d.$$

D'après le théorème 2.5, il existe une courbe lisse Γ dans le système linéaire $|-nK|$ contenant le support de z et le point rationnel Q. On a $g(\Gamma) = p_a(\Gamma) = 3n(n-1)/2 + 1$. Si l'on a

$$d - 1 \geq 3n(n-1)/2 + 1,$$

alors le zéro-cycle $P - Q$ est rationnellement équivalent sur Γ, donc sur X, à un zéro-cycle effectif de degré $d - 1$.

La condition est satisfaite sauf si

$$3n(n-1)/2 \leq d \leq 3n(n-1)/2 + 1.$$

Considérons le cas $d = 3n(n-1)/2 + 1$. Ici $p_a(\Gamma) = d$. Dans ce cas, on fixe un autre point rationnel $R \in X(k)$, distinct de Q, non dans le support de z, et non situé sur une des droites de X, et on exige

$$d + 1 + 3 + 1 \leq 3n(n+1)/2 + 1.$$

Ceci est possible si

$$3n(n-1)/2 + 6 \leq 3n(n+1)/2 + 1$$

soit encore $n \geq 2$.

On considère l'éclatement $p : Y \to X$ en le point R, $E \subset Y$ la courbe exceptionnelle, et le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E$ sur Y. La surface Y est une surface de del Pezzo de degré 2. Le faisceau anticanonique sur Y est donné par $p^*(-K) - E$. Il est ample, son double $p^*(-2K) - 2E$ est très ample. Le système linéaire $|p^*(-K)|$ sur Y correspond au morphisme $Y \to X$, ceci implique que pour tous entiers $a \geq 0$ et $b \geq 1$, le faisceau inversible $ap^*(-K) + b(p^*(-K) - E)$ est ample, et que le faisceau inversible $ap^*(-K) + 2b(p^*(-K) - E)$ est très ample. On peut aussi établir ces divers énoncés de très-amplitude par une application de [R, Thm. 1].

Sur la surface Y, le théorème de Riemann-Roch pour le faisceau

$$L = p^*(-nK) - 2E = -nK_Y + (n-2)E,$$

le théorème de dualité de Serre et le théorème d'annulation de Kodaira donnent alors, pour $n \geq 2$,

$$h^0(Y, p^*(-nK) - 2E) = 3n(n+1)/2 - 2.$$

Pour $n \geq 2$, le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E|$ définit donc un plongement de la surface Y dans un espace projectif $\mathbf{P}^N$ avec $N = 3n(n+1)/2 - 3$, espace projectif qu'elle engendre. Comme on a $d+1 = 3n(n-1)/2+2 \leq 3n(n+1)/2-3$, le théorème 2.5 assure l'existence dans le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E|$ d'une courbe $\Gamma \subset Y$ projective, lisse et géométriquement intègre, et qui contient le support de $p^*(z)$ et le point R. Le genre de cette courbe est $3n(n-1)/2$. Le zéro-cycle $p^*(z) - p^*(P)$ est de degré $3n(n-1)/2$. Il est donc rationnellement équivalent, sur Γ, à un zéro-cycle effectif de degré $d-1$, et il en est de même de son image $z-P$ sur X.

Considérons le cas $d = 3n(n-1)/2$ et $p_a = d+1$. On s'intéresse au cas $d \geq 4$ et donc $n \geq 3$.

Dans ce cas on va fixer un couple de points rationnels R et S suffisamment général, et imposer un point double en chacun de ces points, ce qui impose 6 conditions linéaires pour le système linéaire $|-nK|$. Voici comment faire cela formellement.

Soit $p : Y \to X$ l'éclaté de X en R et S, et soient $E_R \subset Y$, resp. $E_S \subset Y$ les courbes exceptionnelles. La surface Y est une surface de del Pezzo de degré 1.

Sur Y, le faisceau inversible $-K_Y = p^*(-K) - E_R - E_S$ est ample, le faisceau inversible $-3K_Y$ est très ample.

Pour $n \geq 3$, le faisceau inversible

$$p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S = -nK_Y + (n-2)E_R + (n-2)E_S$$

sur Y est très ample, comme on voit en utilisant [R, Thm. 1].

En utilisant le théorème de Riemann-Roch pour le faisceau $p^*(-nK)-2E_R-2E_S$ sur Y, la dualité de Serre et le théorème d'annulation de Kodaira, pour $n \geq 3$ on obtient

$$h^0(Y, p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S) = 3n(n+1)/2 - 5.$$

Pour $n \geq 3$, le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S|$ définit un plongement de Y dans $\mathbf{P}^N$ avec $N = 3n(n+1)/2 - 6$, dont l'image engendre projectivement $\mathbf{P}^N$.

On a

$$d + 1 + 1 \leq 3n(n+1)/2 - 5$$

c'est-à-dire

$$3n(n-1)/2 \leq 3n(n+1)/2 - 7,$$

puisque l'on a $n \geq 3$.

Il existe donc une courbe Γ géométriquement intègre et lisse sur Y dans le système linéaire $|p^*(-nK)-2E_R-2E_S|$ qui contient le support de $p^*(z)$, le point $p^*(Q)$. Le genre de cette courbe est $d-1$, et le zéro-cycle $p^*(z)-p^*(Q)$ est donc rationnellement équivalent sur Γ à un zéro-cycle effectif, il en est donc de même pour $z-Q$ sur X.

En conclusion, tout zéro-cycle z effectif de degré d au moins égal à 4 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle $z_1 + rQ$, avec z_1 effectif de degré au plus 3.

Ceci établit le point (a). On notera que le choix du point rationnel Q est arbitraire. Les points (b) et (c) sont des conséquences évidentes de (a).

Il y a une classe standard ℓ dans $CH_0(X)$ de degré 3, celle découpée par une droite définie sur k quelconque mais non située sur la surface X. Comme X possède des points rationnels, et que ces points sont denses pour la topologie de Zariski, on peut trouver une telle droite qui découpe sur X trois points rationnels distincts. Si P est un point fermé de degré 2 non situé sur une droite de la surface, alors la droite qu'elle définit découpe sur X une somme $P+p$ avec p point rationnel, et $P+p$ est dans la classe ℓ, donc équivalent à la somme de trois points rationnels alignés. Si P est situé sur une droite D de la surface, alors P est rationnellement équivalent sur D donc sur X à $2Q$ pour tout point rationnel Q de la droite. En résumé, tout point fermé P de degré 2 sur X est rationnellement équivalent à un zéro-cycle $a+b+c-d$ avec a, b, c, d points rationnels. Les résultats (d) et (e) s'obtiennent alors formellement à partir de (a).

Démontrons (f). D'après la proposition 2.7, on peut supposer k fertile. Le plus petit entier d pour lequel il existe un entier naturel n avec $3n(n-1)/2+1 \leq d-3$ et $d+3+1 \leq 3n(n+1)/2+1$ est $d=13$, qui correspond à $n=3$.

Considérons un zéro-cycle $z-P$ avec z effectif de degré $d=13$ et P un point fermé de degré 3. Le théorème 2.5 montre l'existence d'une courbe lisse géométriquement intègre $\Gamma \subset X$ dans le système linéaire $|-3K|$ de genre $g=10$ contenant le support de z et le point fermé P. Le théorème de Riemann-Roch sur Γ assure alors l'existence d'un zéro-cycle effectif de degré 10 rationnellement équivalent sur Γ, donc sur X, à $z-P$.

Soit z un zéro-cycle quelconque sur X de degré au moins 10. D'après (d), soit il est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif, soit il est rationnellement équivalent à une différence z_1-P avec P point fermé de degré 3 et z_1 zéro-cycle effectif de degré au moins 13. D'après (a), le zéro-cycle z_1 est rationnellement équivalent à z_2+rQ avec Q point rationnel, $r \geq 0$, et z_2 zéro-cycle effectif de degré 13. Ainsi z est rationnellement équivalent à $rQ+z_1-P$ avec z_1 effectif de degré 13. Et on a vu ci-dessus que pour un tel z_1, le zéro-cycle z_1-P est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. □

Remarque 4.2. Dans [CTC], pour une surface fibrée en coniques relativement minimale au-dessus de la droite $\mathbf{P}^1_k$, notant r le nombre de fibres géométriques singulières de la fibration $X \to \mathbf{P}^1_k$, nous montrons que tout zéro-cycle sur X de degré au moins $\max(0, \lfloor r/2 \rfloor - 1)$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. Une autre démonstration, plus conceptuelle, fut plus tard obtenue par P. Salberger [S]. La démonstration de [CTC] requiert des discussions sur la décomposition possible des courbes obtenues dans un système linéaire. Il n'est pas clair si on pourrait utiliser la méthode du §2 pour simplifier cette démonstration.

Remarque 4.3. L'analogue du théorème 4.1 est connu pour les surfaces de del Pezzo X de degré 4 avec un point rationnel. Dans ce cas on a mieux. Par éclatement d'un k-point non situé sur les droites de X, on obtient une surface cubique Y fibrée en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$, avec 5 fibres géométriques dégénérées. Le théorème de [CTC] donne alors que tout zéro-cycle sur Y de degré au moins 1 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. Ceci vaut donc aussi pour une surface de del Pezzo X possédant un point rationnel.

Remarque 4.4. Il est vraisemblable qu'on a des énoncés analogues au théorème 4.1 pour les surfaces de del Pezzo de degré 2 et 1. Il resterait aussi à voir si l'on peut, comme dans [CTC], obtenir des versions du théorème 4.1 quand on ne suppose pas l'existence d'un point rationnel. Ceci sera laissé au lecteur.

5. Surfaces de del Pezzo de degré 2 avec un zéro-cycle de degré 1

On suit la méthode de Coray pour les surfaces cubiques [C1], avec la flexibilité donnée par le théorème 2.5.

Théorème 5.1. *Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-surface de del Pezzo de degré 2. Si X possède un zéro-cycle de degré 1, elle possède un point fermé de degré* 1*, ou* 3*, ou* 7*.*

Démonstration. Une telle surface X possède des points dans des extensions quadratiques du corps de base k, puisque c'est un revêtement double de $\mathbf{P}^2_k$, donné par le système linéaire associé à $-K$. Soit Q un point de degré 2 sur X. Supposons donné un point fermé de degré d impair. On peut supposer d minimal avec cette propriété. Si $d=1$, on a un point rationnel. Supposons donc $d \geq 3$.

D'après la proposition 2.7, on peut supposer le corps k fertile. Les seuls faisceaux inversibles évidents sur X sont les faisceaux $-nK$, sont amples pour $n \geq 1$, et très amples pour $n \geq 2$, par exemple par [R, Thm. 1]. Soit $n \geq 2$. On a

$$h^2(nK) = h^0((1+n)K) = 0,$$

car le faisceau inversible $-K$ est ample. Comme $-K$ est ample, on a

$$h^1(nK) = h^1((1+n)K) = 0$$

d'après le théorème d'annulation de Kodaira. Le théorème de Riemann-Roch sur la surface X donne alors

$$h^0(-nK) = (-nK.(-nK-K))/2 + 1 = n^2+n+1.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, le faisceau inversible $-nK$ est ample et ses sections définissent un morphisme $X \to \mathbf{P}_k^{n^2+n}$ d'image de dimension au moins 2 et engendrant projectivement $\mathbf{P}_k^{n^2+n}$.

Pour Γ une courbe projective et lisse dans le sytème linéaire $|-nK|$, on a

$$g(\Gamma) = p_a(\Gamma) = (-nK.-nK+K)/2+1 = n^2-n+1.$$

Une telle courbe Γ contient un zéro-cycle (effectif) de degré $(-nK).(-K) = 2n$ obtenu par intersection avec l'image réciproque d'une droite de $\mathbf{P}_k^2$.

Notons $(n+1)^2-(n+1)+1 = n^2+n+1$. Soit $n \geq 1$ l'unique entier tel que

$$g = n^2-n+1 \leq d < n^2+n+1.$$

Supposons d'abord

$$g = n^2-n+1 < d \leq n^2+n-2.$$

Comme on a $d+2 \leq n^2+n$, le théorème 2.5 garantit l'existence d'une courbe Γ projective, lisse, géométriquement connexe dans le système $|-nK|$, passant par un point fermé de degré d et par un point de degré 2. Comme d est impair, on n'a pas $d = n^2-n+2$, donc on a $n^2-n+3 \leq d$ et $d-2 \geq g$. Le théorème de Riemann-Roch sur la courbe Γ assure l'existence d'un zéro-cycle effectif de degré $d-2$ sur Γ, donc sur X, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse d minimal.

On ne peut avoir $d = n^2+n$, car d est impair. Il reste donc à considérer les cas $d = n^2+n-1$ et $d = n^2-n+1 = g$.

Considérons le cas $d = n^2+n-1$. Le théorème 2.5 établit l'existence d'une courbe Γ projective, lisse, géométriquement connexe sur k de genre $g = n^2-n+1$ contenant un point fermé de degré $d = n^2+n-1$. Comme on a remarqué ci-dessus, cette courbe contient aussi un zéro-cycle de degré $2n$. Comme n^2+n-1 et $2n$ sont premiers entre eux, cette courbe possède un zéro-cycle de degré 1. Par le théorème de Riemann-Roch sur la courbe Γ, elle possède un zéro-cycle effectif de degré n^2-n+1. On a $n^2-n+1 < n^2+n-1$ si et seulement si $n > 1$, i.e. $d \geq 5$. Si donc d *n'est pas égal à* 3, on trouve sur Γ et donc sur X un zéro-cycle effectif de degré impair plus petit que d, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse d minimal.

Il reste à considérer le cas $g = n^2-n+1 = d$. On a un point fermé de degré $d \geq 3$. Comme k est fertile, on peut choisir un point k-rationnel général m dans $\mathbf{P}_k^2$ et son image réciproque M par le morphisme $X \to \mathbf{P}_k^2$. C'est un point fermé de degré 2. On considère $p : Y \to X$ l'éclaté de X en le point M, on note $E \subset Y$

le diviseur exceptionnel, et on considère sur Y le système linéaire $|p^*(-nK)-2E|$. Ses sections correspondent aux courbes du système linéaire $|-nK|$ sur X qui ont un point double en le point fermé M, ce qui impose 6 conditions linéaires. On a donc $h^0(Y,p^*(-nK)-2E) \geq n^2+n-5$.

Lemme 5.2. *s Pour $n \geq 3$, le faisceau inversible $p^*(-nK)-2E$ est très ample, et l'on a $h^0(Y,p^*(-nK)-2E) = n^2+n-5$.*

Démonstration. Soit D la droite paramétrant les droites de $\mathbf{P}^2_k$ passant par m. À tout point de X non au-dessus de m on associe sa projection dans $\mathbf{P}^2_k$ puis le point de D correspondant à la droite joignant cette projection à m. L'application rationnelle de X vers D ainsi définie s'étend en un morphisme $Y \to D$ dont le système linéaire associé est donné par le faisceau inversible $p^*(-K)-E$. On sait que le faisceau inversible $-2K$ sur X est très ample, définissant un plongement $X \subset \mathbf{P}^N$. On a un plongement

$$Y \hookrightarrow (\mathbf{P}^1 \times X) \hookrightarrow (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^N)$$

défini par $p^*(-K)-E$ pour la projection vers $\mathbf{P}^1$ et par $p^*(-2K)$ pour la projection vers $X \subset \mathbf{P}^N$. Il s'en suit que pour tout couple d'entiers $a \geq 1, b \geq 1$ le faisceau inversible $a(p^*(-K)-E)+bp^*(-2K)$ est très ample.

En particulier, pour $n=4$, $p^*(-nK)-2E$ est très ample sur Y, et comme $p^*(-K)$ correspond à un morphisme $Y \to X \to \mathbf{P}^2_k$, ceci implique que pour tout $n \geq 4$, le faisceau inversible $p^*(-nK)-2E$ est très ample sur Y.

Procédant comme dans le lemme 3.2, pour $n \geq 4$, on montre

$$h^1(Y,p^*(-nK)-2E)=0,\ h^1(Y,p^*(-nK)-2E)=0,$$

puis $h^0(Y,p^*(-nK)-2E) = n^2+n-5$. □

Si l'on a $d \leq n^2+n-6$, c'est-à-dire $n^2-n+1 \leq n^2+n-6$, c'est-à-dire $n > 3$, c'est-à-dire si *on exclut* $d=3$ *et* $d=7$, le théorème 2.5 assure l'existence d'une courbe Γ lisse dans le système linéaire $|p^*(-nK)-2E|$ sur Y passant par le point fermé de degré $d=n^2-n+1$. Cette courbe satisfait $g(\Gamma)=p_a(\Gamma)=n^2-n-1$. Elle contient un zéro-cycle de degré $2n$. Comme $d=n^2-n+1$ et $2n$ sont premiers entre eux, Γ contient un zéro-cycle de degré 1. Par le théorème de Riemann-Roch sur Γ, elle contient un zéro-cycle effectif de degré n^2-n-1, impair et strictement plus petit que $d=n^2-n+1$, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse d minimal.

N'ont donc été exclus de ce processus de descente des degrés impairs que les degrés 1, 3, ou 7. □

Remarque 5.3. Comme annoncé dans [KM, Remark19], pour une surface de del Pezzo de degré 2, on ne peut exclure la possibilité d'existence d'un point de degré 3 en l'absence de point rationnel. Je détaille dans cette remarque l'argument qui m'a été donné par J. Kollár.

Soit k un corps de caractéristique zéro, admettant des extensions de corps K/k et L/k de degrés respectifs 3 et 5, ainsi qu'une extension quadratique de corps $k(\sqrt{a})/k$. Soit $C=0$ une conique lisse dans $\mathbf{P}^2_k$ avec un k-point. Elle contient alors un point fermé P de corps résiduel K et un point fermé Q de corps résiduel L. On peut trouver une quartique lisse $Q=0$ dans $\mathbf{P}^2_k$ qui contient les points fermés P et Q (ceci n'impose que 8 conditions linéaires sur l'espace des quartiques). L'intersection des deux courbes, de degré 8, est réduite à la réunion du point P de degré 3 et du point Q de degré 5. En particulier cette intersection ne contient pas de point rationnel.

Soit $F = k(t)$ le corps des fonctions rationnelles en une variable. La quartique de $\mathbf{P}^2_F$ définie par $aC(u,v,w)^2 - tQ(u,v,w) = 0$ est lisse, car elle se spécialise en $t = \infty$ en une quartique lisse. On considère la surface de del Pezzo X de degré 2 sur F définie par l'équation multihomogène

$$z^2 - aC(u,v,w)^2 + tQ(u,v,w) = 0.$$

Supposons qu'elle ait un point sur F. Par congruences modulo t, on voit que l'on devrait avoir une solution non triviale pour $C(u,v,w) = 0 = Q(u,v,w)$ dans k, ce qui n'est pas. Ainsi $X(F) = \emptyset$. Il est par contre clair que X possède un $K(t)$-point, resp. un $L(t)$-point, avec $C(u,v,w) = 0 = Q(u,v,w)$ et $z = 0$.

On peut aussi faire des variantes avec $F = k((t))$ le corps des séries formelles, ou avec F un corps p-adique. Dans la situation parallèle des surfaces fibrées en coniques sur $\mathbf{P}^1_F$ avec 6 fibres géométriques dégénérées, des exemples analogues sur un corps p-adique avaient été construits dans [CTC, §5]

6. Surfaces géométriquement rationnelles

Soient k un corps et X une k-surface projective et lisse géométriquement rationnelle. Le théorème d'Enriques-Manin-Iskovskikh [I] et Mori dit qu'une telle surface k-minimale est k-isomorphe soit à une surface projective et lisse fibrée en coniques (génériquement lisses) relativement minimale au-dessus d'une conique lisse, soit à une surface (lisse) de del Pezzo. Une surface de del Pezzo X est une surface dont le faisceau anticanonique $-K$ est ample.

Pour une surface fibrée en coniques relativement minimale $X \to C$ au-dessus d'une conique lisse, les fibres générales sont des coniques lisses. Les fibres singulières X_P sont formées de deux droites conjuguées se rencontrant transversalement au-dessus d'un point fermé séparable P.

Le théorème 5.1 était le cas manquant pour la démonstration du théorème suivant.

Théorème 6.1. *Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, k-minimale. Il existe un entier $N(X)$ qui ne dépend que de la géométrie de X tel que, si X possède un zéro-cycle de degré 1, alors X possède des points fermés de degrés premiers entre eux et plus petits que $N(X)$.*

Démonstration. Soit donc X une k-surface comme dans l'énoncé possédant un zéro-cycle de degré 1.

Considérons d'abord le cas d'une surface de del Pezzo. Soit $d = (K.K)$ son degré. Une telle surface possède un zéro-cycle effectif de degré d. On a $1 \leq d \leq 9$.

Pour $d \geq 5$, c'est un résultat classique qu'alors X possède un point rationnel : pour $d = 5, 7$ il existe toujours un point rationnel. Pour $d = 8$, on se ramène à l'énoncé pour les quadriques de $\mathbf{P}^3_k$, pour lesquelles le résultat est un cas particulier d'un théorème de T.A. Springer pour les quadriques quelconques. Pour $d = 9$, X est une surface de Severi-Brauer. Le cas $d = 6$ est plus subtil. On peut l'établir en utilisant le théorème de Manin [Ma, Chap. IV, Thm.30.3.1] que X contient un ouvert qui est un espace principal homogène sous un k-tore.

Pour $d = 4$, le résultat fut établi par Coray [C2]. On laisse au lecteur le soin de simplifier [C2] suivant la méthode de cet article. Pour $d = 4$, X est une intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$. Par des méthodes élémentaires, M. Amer (non publié) et A. Brumer [B] montrèrent ensuite que toute intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}^m_k$ qui possède un point dans une extension de k de degré impair possède un point rationnel.

Pour $d = 3$, le théorème de Coray [C1] repris au paragraphe 3 ci-dessus donne un point dans une extension de degré 1, 4 ou 10.

Pour $d = 2$, le théorème 5.1 donne un point dans une extension de degré 1, 3 ou 7.

Toute surface de del Pezzo de degré 1 possède un point rationnel canonique, le point fixe du système linéaire anticanonique.

Considérons maintenant le cas d'une surface X fibrée en conique relativement minimale au-dessus d'une conique C lisse. Comme X, la courbe C possède un zéro-cycle de degré 1, et donc $C \simeq \mathbf{P}^1_k$. La surface X possède donc un point fermé de degré 1 ou 2. Si on note r le nombre de fibres géométriques singulières de la fibration $X \to \mathbf{P}^1_k$, on a $r = 8 - (K.K)$. Et dans [CTC], on montre que si X possède un point fermé de degré impair, alors X possède un point fermé de degré impair au plus égal à $\max(1, \lfloor r/2 \rfloor)$. □

7. Surfaces cubiques sans point rationnel

Soient k un corps et $X \subset \mathbf{P}^3_k$ une surface cubique lisse. Si X possède un point rationnel, alors par un théorème de B. Segre, Manin, Kollár la k-surface est k-unirationnelle. Si k est infini, l'ensemble $X(k)$ de ses points k-rationnels est dense dans X pour la topologie de Zariski, il est donc facile de trouver 3 points rationnels sur X qui ne sont pas alignés dans $\mathbf{P}^3_k$. Le théorème suivant est une réponse partielle à la question posée à la fin de l'introduction du récent article [QM].

Théorème 7.1. *Soit $X \subset \mathbf{P}^3_k$ une surface cubique lisse sur un corps k de caractéristique nulle, sans point rationnel. Si tout point fermé de degré 3 sur X est découpé par une droite de $\mathbf{P}^3_k$, alors il existe une surface de del Pezzo de degré 1 sur k dont les points k-rationnels ne sont pas denses pour la topologie de Zariski, et donc qui en particulier n'est pas k-unirationnelle.*

Un point de degré 3 découpé par une droite sera dit “aligné”.

Démonstration. Comme $X(k) = \emptyset$, on n'a pas non plus de point quadratique sur X. Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. On note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Soit $D \subset \mathbf{P}^3_k$ une droite découpant sur X un pinceau de Lefschetz. Le pinceau $L \simeq \mathbf{P}^1_k$ des plans de $\mathbf{P}^3_{\overline{k}}$ contenant D découpe donc sur $\overline{X}$ soit une cubique lisse, soit une cubique avec une unique singularité quadratique.

Soit $Q = X \cap D$. C'est un point fermé de degré 3, qui sur $\overline{k}$ correspond à 3 points dont aucun n'est situé sur une droite de $\overline{X}$. Soit $q = Y \to X$ l'éclaté de X en P. Soit $R \subset Y$ le diviseur exceptionnel. Sur $\overline{k}$, ceci donne naissance à trois courbes R_i, chacune isomorphe à une droite projective sur $\overline{k}$. La famille des plans passant par L définit un morphisme $p : Y \to L$ dont les fibres sont précisément les cubiques mentionnées ci-dessus. En particulier la fibration $Y \times_k \overline{k} \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ est relativement minimale.

Sur $\overline{k}$, le morphisme p admet une section, car le diviseur exceptionnel $q^{-1}(P)$ se découpe en trois courbes isomorphes à $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ que p applique isomorphiquement sur $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$.

Chaque fibre $Y_m = p^{-1}(m)$ au-dessus d'un k-point $m \in L(k)$ contient le point fermé Q. Supposons Y_m lisse. Le théorème de Riemann-Roch sur la courbe Y_m, qui est de genre 1, montre qu'un point fermé $Q \in Y_m$ qui est de degré 3 est aligné sur $Y_m \subset X$ si et seulement si le diviseur $Q - P$, qui est de degré zéro, a une classe nulle dans $\mathrm{Pic}(Y_m)$.

Si donc il existe une classe de degré 3 dans $\mathrm{Pic}(Y_m)$ qui est distincte de la classe de Q, alors il existe sur Y_m, et donc sur X, un point fermé de degré 3 non aligné.

Soit $F = k(L)$, resp. $E = \overline{k}(L)$ le corps des fonctions rationnelles sur L, resp. sur $L_{\overline{k}}$. Soit Y_η/F la fibre générique de p. Soit W_η/F la jacobienne de la courbe Y_η. C'est une courbe elliptique sur F. Soit $W \to \mathbf{P}^1_k$ le modèle propre régulier minimal de W_η/F (existence : [Sha, Chap. 7] ; unicité : [Sha, Chap. 8]).

Je dis qu'alors $W_{\overline{k}} \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ est le modèle propre régulier minimal de la E-courbe elliptique $W_\eta \times_F E$. La minimalité est le point non évident. Faute d'avoir trouvé une référence dans la littérature, je donne une démonstration. Supposons que $W_{\overline{k}}$ contienne une courbe exceptionnelle de première espèce D_1, donc lisse de genre zéro et satisfaisant $(D_1.D_1) = -1$, contenue dans une fibre. Supposons que cette courbe admet une conjuguée D_2 sous Galois qui la rencontre, et donc est contenue dans la même fibre géométrique. Alors

$$(D_1 + D_2)^2 = (D_1)^2 + (D_2)^2 + 2(D_1.D_2) = -2 + 2(D_1.D_2) \geq 0,$$

donc, vu les propriétés de la forme d'intersection sur une fibre, qui est semi-définie négative [Sha, Chap. 6, p. 91], on a $(D_1 + D_2)^2 = 0$, et $D_1 + D_2$ est un multiple rationnel de la fibre contenant D_1 et D_2. Cette fibre contient une composante de multiplicité 1, comme on voit par intersection avec la section nulle de $W_{\overline{k}} \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$. Ainsi la fibre est $D_1 + D_2$, et l'on a $(D_1.D_2) = 1$. Mais ceci n'est pas possible, car le genre géométrique des fibres serait zéro. On voit donc que les divers conjugués de D_1 sont dans des fibres distinctes. Mais alors leur somme définit un diviseur sur la k-variété W que le critère de Castelnuovo [Sha, Chap. 6, p. 102] permet de contracter, contredisant le fait que $W \to \mathbf{P}^1_k$ est minimal.

Comme $Y_\eta \times_F E$ possède les points E-rationnels correspondant aux courbes R_i, le choix d'une de ces courbes R_i définit un E-isomorphisme de courbes : $W_\eta \times_F E \simeq Y_\eta \times_F E$. Vu l'unicité des modèles réguliers propres minimaux pour les courbes lisses de genre au moins 1 [Sha, Chap. 8], on voit qu'il existe un $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$-isomorphisme $W \times_k \overline{k} \to Y \times_k \overline{k}$ induisant l'isomorphisme donné sur les fibres génériques.

Ainsi la $\overline{k}$-variété $W \times_k \overline{k}$ est isomorphe à l'éclaté d'une surface cubique lisse en 3 $\overline{k}$-points alignés. Ceci montre déjà que W est une k-surface projective et lisse géométriquement rationnelle dont le faisceau canonique K satisfait $(K.K) = 0$.

La section nulle M de $W \to L$ correspond sur $\overline{k}$ à l'éclatement d'un $\overline{k}$-point de $\overline{X}$ non situé sur une droite de $\overline{X}$, elle satisfait $(M.M) = -1$. On peut donc la contracter. On obtient une surface W' qui est l'éclatée de la surface $\overline{X}$ en deux $\overline{k}$-points non situés sur les 27 droites, et dont le faisceau canonique satisfait $(K.K) = 1$. Pourvu que l'on ait pris la droite D initiale dans un ouvert de Zariski non vide convenable de la grassmannienne des droites de $\mathbf{P}^3_k$, la surface W' est géométriquement l'éclatée de la surface cubique en un couple général de points de $\overline{X}$, et donc est une surface de del Pezzo de degré 1.

Soit $m \in L(k)$ un point à fibre Y_m lisse. La jacobienne de Y_m est la fibre W_m de $W \to L$ en m.

On a la suite exacte bien connue faisant intervenir groupes de Picard et groupes de Brauer :

$$0 \to \mathrm{Pic}(Y_m) \to \mathrm{Pic}(\overline{Y}_m)^G \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(Y_m).$$

Comme Y_m possède un point dans une extension de degré 3 de k, cette suite induit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(Y_m) \to \mathrm{Pic}(\overline{Y}_m)^G \to \mathrm{Br}(k)[3]$$

où $A[n]$ désigne le sous-groupe de n-torsion d'un groupe abélien A. Sur les classes de degré zéro, cette suite exacte induit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(Y_m) \to \mathrm{Pic}^0(\overline{Y}_m)^G \to \mathrm{Br}(k)[3].$$

Le groupe $\mathrm{Pic}^0(\overline{Y}_m)^G$ est le groupe $W_m(k)$ des k-points de la k-courbe elliptique W_m. Si la flèche induite $W_m(k) \to \mathrm{Br}(k)[3]$ a un noyau non trivial, alors on a $\mathrm{Pic}^0(Y_m) \neq 0$. Si z est un élément non nul dans $\mathrm{Pic}^0(Y_m)$, alors la classe $Q+z$ est une classe de degré 3, rationnellement équivalente à un zéro-cycle effectif de degré 3 par le théorème de Riemann-Roch sur Y_m, définissant un point fermé de degré 3 non rationnellement équivalent à Q sur Y_m, et donc non aligné.

La flèche $W_m(k) \to \mathrm{Br}(k)[3]$ a un noyau non trivial si $W_m(k) \neq W_m(k)[3]$.

Si pour aucun $m \in L(k)$ à fibre lisse cette condition n'est satisfaite, les k-points de W sont contenus dans la réunion des fibres singulières de $W \to \mathbf{P}^1_k$ et du fermé de W qui sur l'ouvert de lissité correspond au schéma défini par la 3-torsion. En particulier, les k-points ne sont pas denses pour la topologie de Zariski sur W, qui est une surface de del Pezzo de degré 1. □

Remarque 7.2. Si le corps k est fertile, par exemple si k est un corps p-adique, alors pour toute surface de del Pezzo de degré 1, l'ensemble $W(k)$, qui est non vide, est dense pour la topologie de Zariski. Dans ce cas on a donc des points fermés de degré 3 non alignés sur toute k-surface cubique lisse.

Ceci est en fait facile à voir directement. Soit $U \subset \mathrm{Gr}(1, \mathbf{P}^3_k)$ l'ouvert formé des droites qui rencontrent X géométriquement en trois point distincts. Soit $V \subset \mathrm{Sym}^3 X$ l'ouvert lisse, intègre, correspondant aux ensembles de 3 points géométriques distincts. On a un k-plongement fermé de U, de dimension 4, dans V, de dimension 6, identifiant $U(\overline{k})$ avec les triplets de points géométriques distincts alignés. L'image de $U(k)$ dans $V(k)$ définit des k-points, lisses, de U. Ainsi $V(k)$ est non vide, et donc, si k est fertile, les points de $V(k)$ sont denses pour la topologie de Zariski sur V, et il en existe hors de U.

Remarque 7.3. C'est une question ouverte si pour toute surface de del Pezzo de degré 1 sur un corps k de caractéristique zéro, les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. On consultera [SvL] pour des résultats partiels. Plus généralement, c'est aussi une question ouverte si, pour une famille lisse non géométriquement isotriviale $W \to \mathbf{P}^1_k$ de fibre générique une courbe elliptique, les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. Ces problèmes sont ouverts déjà pour k le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

La démonstration du théorème suivant est entièrement parallèle à celle du théorème 7.1 et est laissée au lecteur.

Théorème 7.4. *Soit X une surface del Pezzo de degré 2 sur un corps k de caractéristique nulle, sans point rationnel. Si tout point fermé de degré 2 sur X est image réciproque d'un point rationnel de $\mathbf{P}^2_k$ via le morphisme anticanonique*

$X \to \mathbf{P}^2_k$, alors il existe une surface de del Pezzo de degré 1 sur k dont les points k-rationnels ne sont pas denses pour la topologie de Zariski, et donc qui en particulier n'est pas k-unirationnelle.

Références

[AK] A. Altman et S. Kleiman. Introduction to Grothendieck Duality Theory. LNM 146, Springer Verlag (1970). 5

[B] A. Brumer. Remarques sur les couples de formes quadratiques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 286 (1978), no. 16, A679–A681. 15

[CTC] J.-L. Colliot-Thélène et D. F. Coray. L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques. Compositio Math. 39 (1979), no. 3, 301–332. 1, 11, 14, 15

[C1] D. F. Coray. Algebraic points on cubic hypersurfaces, Acta Arith. 30 (1976), no. 3, 267–296. 1, 2, 5, 11, 15

[C2] D. F. Coray. Points algébriques sur les surfaces de del Pezzo. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 284 (1977), no. 24, A1531–A1534. 1, 14

[F] W. Fulton. Intersection Theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2, Springer-Verlag (1984). 5

[H] R. Hartshorne. Algebraic Geometry. GTM 52, Springer Verlag (1977). 2

[I] V. A. Iskovskikh. Modèles minimaux des surfaces rationnelles sur les corps arbitraires (en russe). Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43 (1979), no. 1, 19 ?43, 237. 14

[J] J.-P. Jouanolou. Théorèmes de Bertini et applications. Progress in Mathematics vol. 42, Birkhäuser (1983). 2

[Kol] J. Kollár. Rational Curves on Algebraic Varieties Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32, Springer (1986). 2

[KM] J. Kollár et M. Mella. Quadratic families of elliptic curves and unirationality of degree 1 conic bundles. Amer. J. Math. 139 (2017), no. 4, 915–936. 13

[QM] Qixiao Ma. Closed points on cubic hypersurfaces. arXiv :1908.03139 [math.AG] 2, 15

[Ma] Yu. I. Manin. Cubic forms, Algebra, Geometry, Arithmetic North-Holland, Second Edition, 1986. 2, 14

[Mu] D. Mumford. Lectures on curves on an algebraic surface. Annals of Mathematics Studies, vol. 59, Princeton University Press, 1966. 5

[P] F. Pop. Little survey on large fields – old & new. Valuation theory in interaction, 432–463, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2014. 4

[R] I. Reider. Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces. Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 2, 309–316. 7, 9, 10, 12

[S] P. Salberger. Class groups of orders and Chow groups of their Severi-Brauer schemes. CTH-Math-1985-15 ; ISSN 0347-2809, in Thèse, Univ. Chalmers, Göteborg, 1985. 11

[SvL] C. Salgado et R. van Luijk. Density of rational points on del Pezzo surfaces of degree one. Avd. in Math. 261 (2014) 154-199. 17

[Sha] I. R. Shafarevich. Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes. Tate Institute of Fundamental Research, Bombay, 1966. 16

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.

E-mail address: jlct@math.u-psud.fr