Ronald van Luijk, qui me décrivait des résultats de Rosa Winter et Julie Desjardins m'a indiqué l'énoncé suivant.

Proposition. *Soit k un corps de nombres, soit C/k une courbe elliptique lisse contenant un nombre infini de points k-rationnels, et soit E/C une famille de courbes elliptiques avec une section d'ordre infini. Alors les points k-rationnels sur la surface E sont Zariski-denses.*

La démonstration repose sur le théorème de Merel (1994) bornant la torsion des courbes elliptiques sur un corps de nombres donné. Le théorème de Merel borne la torsion de façon uniforme en fonction du degré des corps de nombres. On va voir comment ceci permet d'étendre l'énoncé ci-dessus à tout corps de caractéristique zéro.

Lemme. *Soit $X \to Y$ une famille lisse de variétés abéliennes au-dessus de Y une variété sur un corps de caractéristique zéro. Si la fibre générique possède un point exactement de n-torsion, alors pour tout point (schématique) P du schéma Y, la fibre $X_P/\kappa(P)$ possède un point exactement de n-torsion.*

Démonstration. Pour tout entier n, le schéma des points de n-torsion est fini étale sur Y. En particullier le sous-schéma formé des sections d'ordre n moins les sections d'ordre divisant proprement n est une union disjointe d'images de sections de $X \to Y$. CQFD

Théorème *Soit k un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, soit C/k une k-variété intègre, et soit E/C une famille lisse de courbes elliptiques. Alors il existe un entier N (dépendant de k) tel que pour tout point $P \in C(k)$ l'ordre d'un élément de torsion de $E_P(k)$ est au plus N.*

Démonstration. Le corps k s'écrit comme le corps des fractions d'une $\mathbf{Q}$-variété intègre $U = Spec(A)$ qu'on peut donner comme un revêtement fini, de degré disons d, d'un ouvert d'un espace affine $\mathbf{A}^r_{\mathbf{Q}}$. On peut étendre la situation $E/C/k$ à un modèle $F/D/U$. Quitte à restreindre U, on peut supposer que F/D est une famille de courbes elliptiques sur D.

Un point k-rationnel P de C s'étend en une section $\tau_P : V \to D$ sur un ouvert $V \subset U$ non vide. L'image réciproque de $F \to D$ au-dessus de V via τ_P est une famille de courbes elliptiques dont la fibre générique est E_P. L'ensemble des points fermés de V de degré au plus d est Zariski dense dans V (considérer les images réciproques des points de $\mathbf{A}^r(\mathbf{Q})$), en particulier est non vide. Le théorème de Merel (1994) assure que l'ordre des points de torsion des courbes elliptiques sur un corps de nombres de degré au plus d est borné par un entier $N(d)$. Le lemme permet alors de conclure. CQFD

Proposition. *Soit k un corps de car. zéro, soit C/k une courbe lisse, connexe, dont la compactification lisse est de genre au plus 1, contenant un nombre infini de points k-rationnels, et soit E/C une famille lisse de courbes elliptiques avec une section d'ordre infini. Alors les points k-rationnels sur la surface E sont Zariski-denses.*

Démonstration. Il existe un corps $L \subset k$ de type fini sur $\mathbf{Q}$ sur lequel C, E, $E \to C$ sont définis, E/C est une fibration en courbes elliptiques, sur lequel $C(L)$ est infini et sur lequel E/C possède une section d'ordre infini. Pour établir la conclusion il suffit donc de le faire lorsque k est de type fini sur $\mathbf{Q}$. On prend $N = N(k)$ comme ci-dessus. Pour la famille E/C, on a un nombre fini de multisections correspondant aux points de torsion d'ordre au plus N. On a la section d'ordre infini, elle ne rencontre les sections de torsion au plus N qu'en un nombre fini de points. CQFD

JLCT, 29 août 2020