POINT GÉNÉRIQUE ET SAUT DU RANG DU GROUPE DE MORDELL-WEIL

par

J.-L. Colliot-Thélène

À la mémoire d'André Néron

Résumé. — Soient k un corps de nombres et U une k-variété lisse intègre. Soit $X \to U$ une famille de variétés abéliennes. On établit les énoncés suivants. Si la k-variété X est dominée par une k-variété qui satisfait l'approximation faible faible, par exemple si X est k-unirationnelle, alors l'ensemble $\mathcal{R}$ des k-points de U dont la fibre a un rang de Mordell-Weil strictement plus grand que celui de la fibre générique est dense dans U pour la topologie de Zariski. Si X est k-rationnelle, alors $\mathcal{R}$ n'est pas mince dans U. Ceci généralise des résultats de Billard et de Salgado. L'idée principale de la démonstration, idée qui remonte à la thèse de Néron [**15**], est d'utiliser le point générique de la fibre générique de la famille, et d'appliquer ensuite le théorème de spécialisation de Néron. Dans l'appendice, on voit comment la méthode du point générique donne des résultats de Billing, de Néron, et de Holmes et Pannekoek.

Abstract. — Let k be a number field and U a smooth integral k-variety. Let $X \to U$ be an abelian scheme. We consider the set $\mathcal{R}$ of rational points $m \in U(k)$ such that the Mordell-Weil rank of the fibre U_m is strictly bigger than the Mordell-Weil rank of the generic fibre. We prove the following results. If the k-variety X is k-unirational, then $\mathcal{R}$ is dense for the Zariski topology on U. If X is k-rational, then $\mathcal{R}$ is not thin in U.

1. Introduction

Soient k un corps de nombres, U une k-variété lisse géométriquement intègre, et $\pi : X \to U$ une famille de variétés abéliennes, c'est-à-dire un U-schéma abélien. Soit $F = k(U)$ le corps des fonctions rationnelles de U, et soit X_η/F la F-variété abélienne donnée par la fibre générique de π. Soit r

le rang générique, c'est-à-dire le rang du groupe $X_\eta(F)$, groupe de type fini d'après Mordell, Weil et Néron.

On renvoie au pagrapraphe 1 pour les rappels sur la définition d'un sous-ensemble mince de l'ensemble $W(k)$ des points k-rationnels d'une k-variété W.

Un des théorèmes principaux de la thèse de Néron [**15**] assure, sans hypothèse sur U, que l'ensemble des points $m \in U(k)$ dont la fibre X_m a son groupe de Mordell-Weil $X_m(k)$ de rang strictement plus petit que r est un ensemble mince dans U (voir le théorème 2.4 ci-dessous). L'énoncé plus connu, et qui en est une conséquence, est que si la k-variété U est k-rationnelle, i.e. k-birationnelle à un espace projectif, alors l'ensemble des points $m \in U(k)$ dont la fibre X_m a rang de Mordell-Weil au moins égal à r n'est pas mince dans U, et en particulier est dense dans U pour la topologie de Zariski.

Dans le présent article, on s'intéresse à l'ensemble des points $m \in U(k)$ dont la fibre X_m a rang de Mordell-Weil au moins égal à $r+1$.

Commençons par rappeler que, pour une k-variété lisse géométriquement intègre W, chacun des énoncés ci-dessous implique le suivant (les définitions des diverses propriétés sont rappelées au paragraphe 2).

- La k-variété W est k-rationnelle.
- La k-variété W satisfait l'approximation faible faible.
- L'ensemble $W(k)$ n'est pas mince dans W.
- L'ensemble $W(k)$ est dense dans W pour la topologie de Zariski.

Le théorème principal de cet article est le théorème 3.3, dont l'énoncé couvre un grand nombre d'implications. Voici deux cas particuliers.

Théorème 1.1. — *Soient k un corps de nombres, U une k-variété lisse géométriquement intègre, et $\pi : X \to U$ une famille de variétés abéliennes de dimension relative au moins 1. Soit r le rang de Mordell-Weil de la fibre générique. Soit $\mathcal{R} \subset U(k)$ l'ensemble des points de $U(k)$ dont la fibre X_m/k a rang de Mordell-Weil au moins égal à $r+1$.*

Chacun des énoncés ci-dessous implique le suivant.

(a) X est k-rationnelle,
(b) X satisfait l'approximation faible faible,
(c) $X(k)$ n'est pas mince dans X,
(d) $\mathcal{R}$ n'est pas mince dans U.
(e) $\mathcal{R}$ est dense dans U pour la topologie de Zariski.

Ce théorème s'applique par exemple à la surface cubique X donnée par l'équation homogène $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$, qui est k-rationnelle (Euler), qu'on fibre (rationnellement) en coupant par $z = \lambda t$, ce qui donne la famille de courbes elliptiques

$$x^3 + y^3 + (\lambda^3 + 1)t^3 = 0$$

sur (un ouvert de) $\mathrm{Spec}(k[\lambda])$, avec section nulle donnée par $(x, y, t) = (1, -1, 0)$.

Théorème 1.2. — *Soient k un corps de nombres, U une k-variété lisse géométriquement intègre, et $\pi : X \to U$ une famille de variétés abéliennes de dimension relative au moins 1. Soit r le rang de Mordell-Weil de la fibre générique. Soit $\mathcal{R} \subset U(k)$ l'ensemble des points de $U(k)$ dont la fibre X_m/k a rang de Mordell-Weil au moins égal à $r+1$.*

1) Si la k-variété X est k-unirationnelle, l'ensemble $\mathcal{R}$ est dense dans U pour la topologie de Zariski.

2) S'il existe une k-variété lisse W dont l'ensemble $W(k)$ des k-points n'est pas mince dans W, ce qui est le cas si W est stablement k-rationnelle, ou si elle satisfait l'approximation faible fabile, et s'il existe un k-morphisme $W \to X$ dominant tel que la fibre générique de l'application composée $W \to X \to U$ est géométriquement intègre, alors $\mathcal{R}$ n'est pas mince dans U.

Ce théorème s'applique aux familles de courbes elliptiques d'équation affine

$$d(\lambda)y^2 = p(x)$$

au-dessus de (un ouvert de) $\mathrm{Spec}(k[\lambda])$, avec $d(\lambda)$ polynôme séparable de degré 2 et $p(x)$ polynôme séparable de degré 3. Une telle surface est k-birationnelle à une surface de Châtelet [**6**]. On prend pour $W \to X$ un torseur universel sur un modèle projectif et lisse de la surface, de fibre triviale en un point k-rationnel. D'après [**6**, Thm. 8.1], un tel torseur est une variété stablement k-rationnelle.

Pour $\pi : X \to U$ une famille de variétés abéliennes de dimension relative au moins 1, on dispose de l'inclusion de corps de fonctions $k(U) \subset k(X)$. La démonstration du théorème 3.3 et en particulier des deux théorèmes ci-dessus repose sur un lemme très simple, le lemme 3.1, dont l'esprit remonte à la thèse de Néron : le rang du groupe de type fini $X_\eta(k(X))$ est strictement supérieur au rang du groupe de Mordell-Weil-Néron $X_\eta(k(U))$ de la fibre générique de π, car le point générique de X définit un point de $X_\eta(k(X))$ dont aucun multiple n'appartient à $X_\eta(k(U))$.

La méthode proposée ici permet de retrouver, et de généraliser, divers résultats sur le saut du rang :

• Certains résultats de Billard [**1**], Salgado [**18**], Hindry-Salgado [**8**], Loughran-Salgado [**11**] (voir les remarques 3.6).

• Un résultat de Rohrlich [**16**] (voir la Proposition 4.2),

• Un ancien résultat de Billing et Néron, et un résultat de Holmes–Pannekoek [**8**] (voir le §5).

Il convient cependant de remarquer que les méthodes de Salgado, Hindry-Salgado, Loughran-Salgado sur les surfaces elliptiques géométriquement rationnelles, qui utilisent des systèmes linéaires de coniques sur ces surfaces, permettent sous certaines hypothèses d'établir pour ces surfaces des sauts du rang d'au moins 2 par rapport à la fibre générique, ce que ne donne pas la présente méthode.

Je dédie ce texte à la mémoire d'André Néron, qui fut mon directeur de thèse.

2. Rappels

Soit k un corps. Par définition, une k-variété est un k-schéma séparé de type fini. On note $X(k)$ l'ensemble des points k-rationnels de X. Une k-variété lisse intègre qui possède un point k-rationnel est géométriquement intègre.

Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété intègre de dimension au moins 1. Suivant Serre [**19, 20**], un sous-ensemble $E \subset X(k)$ est dit mince s'il existe une k-variété réduite Y et un k-morphisme $f : Y \to X$ tels que :

(a) $E \subset f(Y(k))$.

(b) La fibre générique de f est finie et n'admet pas de section rationnelle.

Une union finie de sous-ensembles minces de $X(k)$ est mince. En particulier, si $X(k)$ n'est pas mince dans X, alors le complémentaire d'un sous-ensemble mince de $X(k)$ n'est pas mince dans X. Si $E \subset X(k)$ n'est pas mince dans X, alors E est dense dans X pour la topologie de Zariski. La réciproque est clairement fausse.

Lemme 2.1. — *Soient k un corps de caractéristique zéro et $\pi : Z \to X$ un k-morphisme dominant de k-variétés intègres. Supposons la fibre générique de π géométriquement intègre. Soit $E \subset Z(k)$. Si $\pi(E) \subset X(k)$ est mince dans X, alors E est mince dans Z.*

Démonstration. — Soit $f : Y \to X$ comme ci-dessus, avec $\pi(E) \subset f(Y(k))$. Pour établir l'énoncé, on peut remplacer Z par un un ouvert non vide. On peut donc supposer que la k-variété $Y \times_X Z$ est réduite. Sous les hypothèses du lemme, la fibre générique de $g : W := Y \times_X Z \to Z$ est finie et n'admet pas de section rationnelle. On a $E \subset g(W(k))$. □. □

Soit k un corps de nombres. Soit Ω l'ensemble de ses places. Soit X une k-variété lisse intègre possédant un point k-rationnel. On considère l'application diagonale

$$\rho : X(k) \to \prod_{v \in \Omega} X(k_v)$$

de $X(k)$ dans le produit topologique des ensembles $X(k_v)$ munis de la topologie induite par celle de k_v, et, pour tout ensemble S de places, l'application diagonale

$$\rho_S : X(k) \to \prod_{v \in S} X(k_v).$$

Si X est projective, l'espace topologique $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ coïncide avec l'espace des adèles $X(\mathbb{A}_k)$.

On va s'intéresser aux propriétés suivantes.

(AF) (Approximation faible) L'ensemble $X(k)$ est dense dans le produit topologique $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$. Ceci équivaut à dire que, pour tout ensemble fini S de places, l'application ρ_S a son image dense.

(AFO) (Approximation faible ouverte) L'adhérence de l'image de ρ est ouverte. Ceci équivaut à dire que, pour tout ensemble fini S de places, l'adhérence de ρ_S est ouverte, et qu'il existe un ensemble fini S_0 de places tel que, pour $S \subset \Omega$ fini avec $S \cap S_0 = \emptyset$, l'image de ρ_S est dense.

(AFF) (Approximation faible faible) Il existe un ensemble fini S_1 de places tel que, pour $S \subset \Omega$ fini avec $S \cap S_1 = \emptyset$, l'image de ρ_S est dense.

(BMF) (Brauer–Manin) La k-variété X est projective et le quotient de groupes de Brauer $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini, ce qui assure que le fermé de Brauer-Manin $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)} \subset X(\mathbb{A}_k)$ est ouvert, et l'image de ρ coïncide avec cet ouvert-fermé.

Pour X projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps k de caractéristique zéro, l'hypothèse que le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini est satisfaite si X est géométriquement unirationnelle, et plus généralement si X est géométriquement rationnellement connexe. Sur k un corps de nombres, elle est satisfaite pour les surfaces $K3$ [**21**] et les variétés de Kummer [**9**].

On a les implications : (AF) implique (AFO) qui implique (AFF) ; sous l'hypothèse de (BMF), on a (AFO) et donc (AFF).

Si X est une k-variété lisse intègre et $U \subset X$ un ouvert non vide possédant un k-point, chacune des propriétés (AF), (AFO), (AFF) vaut pour X si et seulement si elle vaut pour U. Si X est de plus projective et $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini, la propriété (BMF) pour X implique les propriétés (AFO) et (AFF) pour U.

Serre [**20**, §3, Thm. 3.5.3] a établi :

Théorème 2.2. — *Soit k un corps de nombres. Soit X une k-variété lisse et géométriquement intègre. Soit $E \subset X(k)$ un ensemble mince. Soit S_0 un ensemble fini de places. Il existe un ensemble fini S de places avec $S \cap S_0 = \emptyset$ tel que l'image de E dans $\prod_{v\in S} X(k_v)$ n'est pas dense.*

On en déduit l'énoncé suivant (cf. [**20**, Cor. 3.5.4]).

Théorème 2.3. — *Soit k un corps de nombres. Soit X une k-variété lisse et géométriquement intègre. Supposons $X(k) \neq \emptyset$. Soit $E \subset X(k)$ un ensemble mince.*

(i) Si X satisfait (AF), alors l'image de $X(k) \setminus E$ dans $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ est dense.

(ii) Si X satisfait (AFO), alors l'adhérence de l'image de $X(k) \setminus E$ dans $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ coïncide avec celle de X(k), et est ouverte.

(iii) Si X satisfait (AFF), alors il existe un ensemble fini S_1 de places tel que $X(k) \setminus E$ est dense dans $\prod_{v\notin S_1} X(k_v)$.

(iv) Si X est projectif et satisfait (BMF), alors l'adhérence de $X(k)\setminus E$ dans $X(\mathbb{A}_k)$ coïncide avec celle de $X(k)$, à savoir $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$, et elle est ouverte dans $X(\mathbb{A}_k)$.

(v) Dans tous ces cas, $X(k) \setminus E$ n'est pas mince, et est dense dans X pour la topologie de Zariski.

Démonstration. — (i) Soit S_0 un ensemble fini de places et $U_0 \subset \prod_{v\in S_0} X(k_v)$ un ouvert non vide. D'après le théorème 2.2, il existe un ensemble fini S de places avec $S \cap S_0 = \emptyset$ et $\prod_{v\in S} U_v \subset \prod_{v\in S} X(k_v)$ un ouvert qui ne rencontre pas l'image diagonale de E. Alors $U_0 \times \prod_{v\in S} U_v$ ne rencontre pas l'image diagonale de E.

Si X satisfait (AF), pour tout ensemble S_0 et tout ouvert non vide $U_0 \subset \prod_{v\in S_0} X(k_v)$ l'image diagonale de $X(k)$ est dense dans

$$U_0 \times \prod_{v\in S} U_v \subset \prod_{v\in S\cup S_0} X(k_v),$$

et donc il en est de même de $X(k) \setminus E$. Ceci implique que l'image diagonale de $X(k) \setminus E$ est dense dans $U_0 \subset \prod_{v\in S_0} X(k_v)$.

Si X satisfait (AFO), il existe un ensemble fini S_0 de places et un ouvert non vide $U_0 \subset \prod_{v\in S_0} X(k_v)$ tel que l'adhérence de l'image diagonale de $X(k)$ dans $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ soit $U_0 \times \prod_{v\notin S_0} X(k_v)$. On conclut avec le même argument que ci-dessus.

Si X satisfait (AFF), il existe un ensemble fini S_1 de places tel que l'image diagonale de $X(k)$ dans $\prod_{v\notin S_1} X(k_v)$ est dense. On raisonne comme en (i) en remplaçant $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ par $\prod_{v\notin S_1} X(k_v)$.

Sous l'hypothèse (BM) pour X, on a (AFO). □

Le cas des k-variétés k-rationnelles, i.e. k-birationnelles à un espace projectif sur k, est le cas classique.

Sur un corps de nombres k, la propriété (BMF) pour une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre X avec $X(k) \neq \emptyset$, et donc aussi les propriétés (AFO), (AFF) pour les ouverts non vides de X, sont conjecturées pour toutes les variétés X géométriquement rationnellement connexes. L'énoncé

(BMF), et donc aussi les énoncés (AFO) et (AFF), ont été établis pour les compactifications lisses d'un certain nombre de variétés :

(1) Espaces homogènes de k-groupes linéaires connexes lorsque les stabilisateurs sont connexes (Sansuc, Borovoi).

(2) Surfaces de Châtelet, données par une équation affine $y^2 - az^2 = P(x)$ avec $a \in k^\times$ et $P(x)$ polynôme séparable de degré 3 ou 4 [**6**, Thm. 8.7].

(3) Surfaces fibrées en coniques sur $\mathbf{P}^1_k$ avec un k-point et avec au plus 4 fibres géométriques singulières [**4**, Thm. 2].

(4) Surfaces de del Pezzo de 4 avec un k-point (Salberger et Skorobogatov [**17**, Thm. (0.1)]).

(5) Surfaces fibrées en coniques sur $\mathbf{P}^1_k$ avec 5 fibres géométriques singulières. La démonstration de [**17**] procède par réduction à ce cas. On peut aussi déduire le résultat formellement de l'énoncé [**17**, Thm. (0.1)] en utilisant le théorème d'Iskovskikh [**10**, Thm. 4] que sur un corps quelconque, une telle surface n'est pas k-minimale.

(6) Pour $k = \mathbb{Q}$ le corps des rationnels, les familles de variétés obtenues par Browning, Matthiesen et Skorobogatov [**3**] et Harpaz et Wittenberg [**7**], par exemple les variétés sur $\mathbb{Q}$ données par une équation $\mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(\Xi) = P(x)$ avec $K/\mathbb{Q}$ une extension finie et $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme de degré quelconque ayant toutes ses racines dans $\mathbb{Q}$.

On consultera le rapport récent [**23**]. L'énoncé (AFO), et donc aussi (AFF), a été établi pour les surfaces cubiques lisses par Swinnerton-Dyer [**22**]. Ceci implique que pour une telle surface X avec $X(k) \neq \emptyset$, l'ensemble $X(k)$ n'est pas mince dans X. Ce dernier résultat avait été établi par un argument de hauteurs par Manin [**12**] [**13**, Chap. VI, Thm 46.1].

Soient k un corps, X une k-variété lisse géométriquement intègre, et $Y \to X$ un schéma abélien. Soit $K = k(X)$ le corps des fonctions de X. Soit Y_η/K la fibre générique. Pour tout k-point m de X, de fibre Y_m, on dispose de l'application de spécialisation

$$sp_m : Y_\eta(K) = Y(X) \to Y_m(k).$$

Dans [**19**, §11], Serre établit le théorème suivant, qui a pour conséquence le théorème de spécialisation de Néron [**15**, Thm. 6] :

Théorème 2.4. — *Avec les notations ci-dessus, si k est un corps de nombres, l'ensemble des points $m \in X(k)$ tels que l'application de spécialisation sp_m n'est pas injective est mince.*

Serre énonce le résultat pour X une variété k-rationnelle, mais cette hypothèse ne joue aucun rôle dans la démonstration, seul importe le fait que le groupe des points rationnels de la fibre générique sur le corps de type fini

K est un groupe de type fini (théorème de Mordell-Weil-Néron [**15**]). La k-rationalité de X est appliquée ensuite pour voir que le complémentaire dans $X(k)$ d'un ensemble mince est dense.

On peut combiner les théorèmes 2.3 et 2.4 pour obtenir des énoncés dont l'un des plus simples est le suivant : dans le théorème 2.3, si $X(k) \neq \emptyset$ et X satisfait l'approximation faible faible, par exemple si X est k-birationnelle à un espace projectif, alors il existe un ensemble fini S_0 de places de k tel que pour tout ensemble fini S de places avec $S \cap S_0 = \emptyset$, les k-points de X pour lesquels sp_m est injective sont denses dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$.

3. Saut du rang

Nos résultats reposent sur le lemme-clé suivant.

Lemme 3.1. — *Soient F un corps et A/F une variété abélienne. Soit $x \in A$ un point schématique de A qui n'est pas un point fermé. Soit $F(x)$ le corps résiduel. Alors le quotient $A(F(x))/A(F)$ n'est pas un groupe de torsion.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où F est algébriquement clos, auquel cas le groupe $A(F)$ est divisible. Soit $z \in A(F(x))$ un point qui n'est pas dans $A(F)$. Supposons qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $mz \in A(F)$. Alors il existe $z_0 \in A(F)$ avec $mz = mz_0$, et donc $m(z - z_0) = 0$. Comme la m-torsion de $A(F)$ coïncide avec celle de $A(F(x))$, ceci donne $z \in A(F)$, ce qui est une contradiction. $\square$

Remarque 3.2. — Ce lemme s'applique en particulier au point générique de A si $\dim(A) \geq 1$. Citons ici l'énoncé de Néron [**15**, Prop. 7, p. 156]) *verbatim. Soient C une courbe de genre $g \geq 1$ définie sur un corps k et $A = (A_1, \ldots, A_m)$ un système de m points génériques indépendants sur C. Alors C est de rang réduit $\geq m$ dans $k(A) = k(A_1, \ldots, A_m)$.*

Soient k un corps de nombres, U une k-variété lisse géométriquement intègre de dimension au moins 1 possédant un k-point, et $\pi : X \to U$ un schéma abélien de dimension relative au moins 1. Soit W une k-variété lisse géométriquement intègre avec un k-point et $g : W \to X$ un k-morphisme.

Soit r le rang de Mordell-Weil de la fibre générique X_η sur le corps $K = k(U)$. Soit $\mathcal{R} \subset U(k)$ l'ensemble des points $m \in U(k)$ tels que le rang r_m de la fibre X_m sur k soit au moins égal à $r + 1$.

Considérons les hypothèses :

(1) La k-variété W est k-rationnelle.
(2) La k-variété W satisfait l'approximation faible.
(3) La k-variété W satisfait l'approximation faible ouverte.
(4) La k-variété W satisfait l'approximation faible faible.

(5) L'ensemble $W(k)$ n'est pas mince dans la k-variété W.
(6) La k-variété X satisfait l'approximation faible.
(7) La k-variété X satisfait l'approximation faible ouverte.
(8) La k-variété X satisfait l'approximation faible faible.
(9) L'ensemble $X(k)$ n'est pas mince dans la k-variété X.

et les énoncés :

(a) L'ensemble $\mathcal{R}$ est dense dans $\prod_{v\in\Omega} U(k_v)$, c'est-à-dire que, pour tout ensemble fini S de places, $\mathcal{R}$ est dense dans $\prod_{v\in S} U(k_v)$.
(b) L'adhérence de $\mathcal{R}$ dans $\prod_{v\in\Omega} U(k_v)$ est ouverte, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini S_0 de places de k tel que, pour tout ensemble fini S de places, l'adhérence de $\mathcal{R}$ dans $\prod_{v\in S} U(k_v)$ est ouverte, et qu'elle est égale à $\prod_{v\in S} U(k_v)$ quand on a $S \cap S_0 = \emptyset$.
(c) Il existe un ensemble fini S_0 de places tel que $\mathcal{R}$ est dense dans $\prod_{v\notin S_0} U(k_v)$.
(d) Pour tout ensemble fini non vide S de places de k, l'adhérence de $\mathcal{R}$ dans $\prod_{v\in S} U(k_v)$ contient un ouvert non vide.
(e) Il existe un ensemble fini S_0 de places de k tel que, pour tout ensemble fini non vide S de places de k avec $S \cap S_0 = \emptyset$, l'adhérence de $\mathcal{R}$ dans $\prod_{v\in S} U(k_v)$ contient un ouvert non vide.
(f) L'ensemble $\mathcal{R}$ n'est pas mince dans U.
(g) L'ensemble $\mathcal{R} \subset U(k)$ est dense dans U pour la topologie de Zariski.

D'après le théorème 2.2, on a (4) $\Longrightarrow$ (5) et (8) $\Longrightarrow$ (9). D'après le théorème 2.3, chacune des hypothèses (a), (b), (c) implique (f). Comme remarqué au début du §2, (f) implique (g).

Les implications suivantes sont évidentes : (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) et (6) $\Longrightarrow$ (7) $\Longrightarrow$ (8). Il en est de même de : $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (e)$ et $(c) \Longrightarrow (e)$.

Si X est k-unirationnelle, dans ce qui suit on peut supposer (1) pour W. Si X est k-rationnelle, on a (6).

Voici le théorème principal de cette note.

Théorème 3.3. — *Soient k un corps de nombres, U une k-variété lisse géométriquement intègre de dimension au moins* 1 *possédant un k-point, et $\pi : X \to U$ un schéma abélien de dimension relative au moins 1. Soit W une k-variété lisse géométriquement intègre avec un k-point et $g : W \to X$ un k-morphisme. Soit $g(W)_{ad} \subset X$ l'image schématique du morphisme $W \to X$. Supposons que le morphisme $g(W)_{ad} \to U$ induit par $\pi : X \to U$ est dominant et que sa fibre générique est de dimension au moins 1. Alors, avec les notations ci-dessus :*

(i) Sous l'une des hypothèses (1), (2), (3) sur W, on a (d).
(ii) Sous l'une des hypothèses (1), (2), (3), (4) sur W, on a (e).

(iii) Sous l'hypothèse (6) sur X, par exemple si X est k-rationnelle, on a (a), (b) et (d).

(iv) Sous l'une des hypothèses (6), (7) sur X, on a (b) et (d).

(v) Sous l'une des hypothèses (6), (7), (8) sur X, on a (c) et (e).

(vi) Sous l'hypothèse (5), on a (g).

(vii) Sous l'hypothèse (5), si la fibre générique de $W \to U$ est géométriquement intègre, on a (f).

(viii) Sous l'hypothèse (9), on a (f) et (g).

Démonstration. — Pour établir l'énoncé, on peut remplacer W par un ouvert de Zariski et supposer que $\psi := \pi \circ g : W \to U$ est lisse. Pour les énoncés impliquant les hypothèses (6), (7), (8) ou (9), on prend $W = X$ et $g : X \to X$ l'identité.

On considère le produit fibré $Y = X \times_U W$ de X et W au-dessus de U. Via la projection $q : Y \to W$ sur le second facteur, c'est un W-schéma abélien obtenu par changement de base à partir de $X \to U$. L'image du point générique de W dans la fibre générique X_η de π par hypothèse n'est pas un point fermé de cette fibre générique. D'après le lemme 3.1, ceci implique que la fibre générique de $q : Y \to W$ a son rang de Mordell-Weil au moins égal à $r + 1$. Pour $t \in W(k)$, la k-variété abélienne Y_t est isomorphe à la variété abélienne $X_{\psi(t)}$. Ces deux k-variétés abéliennes ont en particulier même rang de Mordell-Weil sur k. Notons $\mathcal{S} \subset W(k)$ l'ensemble des k-points $t \in W(k)$ dont la fibre Y_t a un rang de Mordell-Weil au moins égal à $r + 1$. Pour $t \in W(k)$, on a $t \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\psi(t) \in \mathcal{R} \subset U(k)$.

D'après le théorème 2.4, le complémentaire de $\mathcal{S}$ dans $W(k)$ est mince. Sous l'hypothèse (3) sur W, le théorème 2.3 appliqué à W implique que l'adhérence de $\mathcal{S}$ dans $\prod_{v \in \Omega} W(k_v)$ est ouverte. Sous l'hypothèse (4) sur W, le théorème 2.3 appliqué à W assure au moins l'existence d'un ensemble fini S_0 de places tel que l'adhérence de $\mathcal{S}$ dans $\prod_{v \notin S_0} W(k_v)$ est ouverte. Comme on a supposé $W \to X$ lisse, pour tout ensemble fini T de places de k, les applications

$$\prod_{v \in T} W(k_v) \to \prod_{v \in T} U(k_v)$$

sont ouvertes. Ainsi (3) implique (d), et (4) implique (e).

Considérons le cas particulier où le morphisme $g : W \to X$ est l'identité de X et $\psi = \pi : X \to U$. Dans ce cas, on dispose de la section nulle $\sigma : U \to X$ de $\psi = \pi : X \to U$. On a $t \in \mathcal{S} \subset X(k)$ si et seulement si $\pi(t) \in \mathcal{R} \subset U(k)$. Sous l'hypothèse (6), resp. (7), resp. (8) sur X, le théorème 2.3 (i), resp. (ii), resp. (iii) donne les résultats de densité sur X, qui induisent les résultats voulus via les surjections données par π.

Montrons (vi), (vii) et (viii). Sous l'hypothèse (5) sur W (ou (9), avec $W = X$), l'ensemble $\mathcal{S} \subset W(k)$ n'est pas mince dans W, donc est dense dans W

pour la topologie de Zariski, donc $\mathcal{R} \subset U(k)$ qui contient son image par le morphisme dominant ψ est dense dans U pour la topologie de Zariski. Si la fibre générique de $W \to U$ est géométriquement intègre, le lemme 2.1 implique que l'image de $\mathcal{S}$ dans $U(k)$ n'est pas mince dans U. L'ensemble $\mathcal{R} \subset U(k)$ qui contient cette image n'est donc pas mince dans U.

L'énoncé (viii) est un cas particulier de (vi) et (vii). □

Remarque 3.4. — Supposons que X_η est une variété abélienne simple. Soit $\rho \geq 1$ le rang du groupe abélien de type fini $\mathrm{Hom}_{k(U)-\mathrm{gp}}(X_\eta, X_\eta)$. On a alors $r = \rho.s$. Sous les hypothèses ci-dessus, on conclut à la densité (en les divers sens) des k-points dont la fibre est de rang au moins $\rho.(s+1)$. Sous l'hypothèse d'approximation faible faible pour X, ceci s'applique par exemple au cas d'une famille de courbes elliptiques $X \to \mathbf{P}^1_k$ dont la fibre générique a multiplication complexe définie sur le corps $k(\mathbf{P}^1)$. Dans ce cas, $\rho = 2$.

L'énoncé suivant est motivé par des questions discutées dans [**14**] et [**16**] (voir la proposition 4.2 et la remarque 4.3 ci-dessous).

Théorème 3.5. — *Soient k un corps de nombres, U une k-variété lisse géométriquement intègre possédant un k-point, et $\pi : X \to U$ un schéma abélien. Soit r le rang de Mordell-Weil de la fibre générique X_η sur le corps $K = k(U)$. Soit $\mathcal{R} \subset U(k)$ l'ensemble des points $m \in U(k)$ tels que le rang r_m de la fibre $X_m(k)$ soit au moins égal à $r+1$. Soit $U \subset U_c$ une k-compactification lisse de U et $\pi_c : X_c \to U_c$ un k-morphisme de k-variétés projectives lisses connexes étendant le morphisme $\pi = X \to U$ et équipé d'une section $\sigma_c : U_c \to X_c$ étendant la section nulle du schéma abélien $X \to U$. Supposons que la k-variété X_c satisfait (BMF). Soit S_∞ l'ensemble des places archimédiennes de k. L'ensemble $\mathcal{R}$ a une adhérence ouverte dans $\prod_{v\in\Omega} U_c(k_v)$, et son adhérence dans $\prod_{v\in S_\infty} U_c(k_v)$ est une union finie de composantes connexes de ce produit.*

Démonstration. — On garde les notations de la démonstration précédente, dans le cas particulier où le morphisme $g : W \to X$ est l'identité de X. On a les morphismes $\psi = \pi : X \to U$ et $q : Y \to X$. Rappelons que pour $t \in X(k)$, on a $t \in \mathcal{S} \subset X(k)$ si et seulement si $q(t) \in \mathcal{R} \subset U(k)$. D'après le théorème 2.3 (iv), l'adhérence de $\mathcal{S} \subset X(k)$ dans $X_c(\mathbb{A}_k)$ coïncide avec l'ouvert $X_c(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X_c)}$.

Comme l'évaluation d'un élément du groupe de Brauer de X_c est localement constante sur chaque $X_c(k_v)$ et donc constante sur chaque composante connexe de $X_c(k_v)$ pour v place archimédienne, ceci implique que l'adhérence de $\mathcal{S}$ dans le produit $\prod_{v\in S_\infty} X_c(k_v)$ est une union finie de composantes connexes.

L'image par $\sigma_c = U_c \to X_c$ d'une composante connexe V de $\prod_{v\in S_\infty} U_c(k_v)$ est un ensemble connexe et contient $\sigma_c(U_c(k))$, et en particulier au moins l'image d'un k-point de $\mathcal{R} \subset U(k)$. Cette image est donc contenue dans une composante connexe Z de $\prod_{v \in S_\infty} X_c(k_v)$ qui contient un point de $\mathcal{S} \subset X(k)$. Tout point de cette composante connexe Z, et en particulier tout point de $\sigma_c(\prod_{v \in S_\infty} U_c(k_v))$ est donc dans l'adhérence de $\mathcal{S}$. L'adhérence de $\mathcal{R} = \pi_c(\mathcal{S})$ est donc dense dans V. $\square$

Remarques 3.6. — Soient U un ouvert de la droite projective sur un corps de nombres k et $\pi : X \to U$ une famille de courbes elliptiques, avec $X(k) \neq \emptyset$.

(i) Pour $k = \mathbb{Q}$ le corps des rationnels, supposant la surface X $\mathbb{Q}$-rationnelle et la famille non isotriviale, H. Billard ([B], Théorème 4.1) par un argument impliquant une comparaison de hauteurs globales sur X avec les hauteurs de Tate sur les fibres de $X \to U$ avait établi que l'ensemble des $\mathbb{Q}$-points m avec $r_m \geq r + 1$ est infini.

(ii) C. Salgado [**18**, Cor. 1.2] a étendu ce résultat sur tout corps de nombres k sous la simple hypothèse que la surface X est k-unirationnelle. C'est une conséquence de [**18**, Thm. 1.1], selon lequel, sous cette hypothèse, on peut après un changement de base quasi-fini convenable $V \to U$, avec V ouvert de $\mathbf{P}^1_k$, faire grandir d'au moins une unité le rang de Mordell-Weil de la fibre générique. Le théorème 3.3 ci-dessus généralise [**18**, Cor. 1.2]. La démonstration du théorème 3.3 et un argument de spécialisation à la Néron doivent permettre d'étendre [**18**, Thm. 1.1] au cas d'une famille de variétés abéliennes au-dessus d'un ouvert de $\mathbf{P}^1_k$.

(iii) Lorsque la surface X est k-rationnelle, sous certaines hypothèses supplémentaires sur X, C. Salgado [**18**] montre que l'ensemble des k-points $m \in U(k)$ avec $r_m \geq r + 2$ est infini. Un énoncé plus général est obtenu par Loughran et Salgado [**11**] : il porte sur les surfaces elliptiques géométriquement rationnelles.

(iv) Dans [**8**], M. Hindry et C. Salgado étendent un certain nombre des résultats de [**18**] au cas des familles de variétés abéliennes sur la droite projective. Leur théorème 1.4 est maintenant un cas particulier du théorème 3.3 ci-dessus. Ils établissent aussi la généralisation de [**18**, Thm. 1.1] suggérée dans (ii) ci-dessus. Dans la version initiale du présent article, je m'étais limité à supposer $W \to X$ dominant. La généralisation au cas où $\pi : g(W)_{ad} \to U$ est dominant de dimension relative au moins égale à 1 a été suggérée par une remarque dans [**8**].

4. Applications

A la suite d'un article de B. Mazur [**14**], la variation du rang dans les tordues quadratiques d'une courbe elliptique donnée a fait l'objet de plusieurs travaux.

Le résultat suivant est sans doute bien connu.

Proposition 4.1. — *Soient k un corps de nombres et E une courbe elliptique d'équation $y^2 = p(x)$, avec $p(x)$ polynôme séparable de degré 3. L'ensemble des $t_0 \in k$ tels que le rang de Mordell-Weil de la courbe d'équation $t_0.y^2 = p(x)$ soit au moins égal à 1 est dense dans le produit topologique $\prod_{v\in\Omega} k_v$.*

Démonstration. — La surface d'équation $ty^2 = p(x)$ est clairement k-birationnelle à un plan affine et satisfait en particulier l'approximation faible. Le théorème 3.3 (iii) donne le résultat. □

Proposition 4.2. — *Soit E une courbe elliptique d'équation affine $y^2 = p(x)$ sur un corps de nombres k, avec $p(x)$ un polynôme séparable de degré 3. Soit $d(t)$ un polynôme quadratique séparable. L'adhérence des $t_0 \in k$ avec $d(t_0) \neq 0$ tels que le rang de Mordell-Weil de la courbe d'équation $d(t_0).y^2 = p(x)$ soit au moins égal à 1 contient un ouvert de $\prod_{v\in\Omega} k_v$. L'ensemble de ces t_0 est dense dans le produit $\prod_{v\in S_\infty} k_v$.*

Démonstration. — On peut supposer le polynôme $d(t)$ donné par

$$d(t) = c(t^2 - a)$$

avec $c.a \neq 0$. La surface X d'équation $c(t^2 - a)y^2 = p(x)$ qui via la projection sur t définit une famille de courbes elliptiques, est birationnelle à une surface d'équation affine $u^2 - av^2 = cp(x)$. Comme $p(x)$ est un polynôme de degré 3, on reconnaît là l'équation affine d'une surface de Châtelet, dont de plus tout modèle projectif et lisse possède un point k-rationnel. D'après [**6**, Thm. 8.7], une telle surface satisfait (BMF). L'énoncé suit alors du théorème 3.5 et de la connexité de $\prod_{v\in S_\infty} \mathbf{P}^1(k_v)$. □

Remarque 4.3. — Cet énoncé généralise le théorème de Rohrlich [**16**, Theorem 3] assurant que pour $k = \mathbb{Q}$, sous les hypothèses de la proposition 4.2, s'il existe au moins un $t_0 \in \mathbb{Q}$ à fibre lisse de rang au moins 1, alors l'ensemble de ces points est dense dans $\mathbb{R}$. Pour établir ce résultat, Rohrlich utilise deux fibrations elliptiques différentes sur la surface X.

Le lien entre les tordues quadratiques par un polynôme de degré 2 et les surfaces de Châtelet a été observé récemment par D. Loughran et C. Salgado [**11**].

5. Appendice : Variétés abéliennes de grand rang

Dans toute cette section, k désigne un corps de nombres.

Le théorème suivant est une extension formelle d'un théorème de Néron [**15**, Chap. IV].

Théorème 5.1. — *Soit A une variété abélienne sur k. Soit $r \geq 1$ un entier. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Supposons* *qu'il existe des ouverts non vides $U \subset A^r$, $V \subset X$ et un morphisme fini étale $q = U \to V$ de degré $d \geq 1$. Soit $\mathcal{R} \subset V(k)$ l'ensemble des k-points m dont la fibre $n := q^{-1}(m)$ est un point fermé n de degré d sur k tel que le groupe de Mordell-Weil $A(k(n))$ soit de rang au moins r.*

Si la k-variété X satisfait l'approximation faible faible, alors il existe un ensemble fini S_0 de places de k tel que $\mathcal{R}$ est dense dans $\prod_{v \notin S_0} X(k_v)$ et en particulier est dense dans X pour la topologie de Zariski.

Démonstration. — Soit $L = k(A^r)$ et $K = k(X)$. On considère la fibration $A^{r+1} \to A^r$ donnée par la projection sur les r derniers facteurs. Le rang générique, c'est-à-dire le rang du groupe $A(L)$ est au moins égal à r. On considère la K-variété abélienne $B := R_{L/K}(A)$. Par une variante du lemme 3.1, le rang de $B(K) = A(L)$ est au moins égal à r. On considère le V-schéma abélien $R_{U/V}(A_U)$. Le théorème 2.4 donne que l'ensemble des k-points de V dont la fibre est de rang au moins r est le complémentaire d'un ensemble mince de $V(k)$. L'hypothèse que X satisfait l'approximation faible faible et le théorème 2.3 donnent alors le résultat. □

Corollaire 5.2. — *(Néron) Soit A une variété abélienne sur k. Soit $r \geq 1$ un entier. Soit $d \geq 1$ le degré d'une application rationnelle génériquement finie de A vers un espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Il existe une extension de corps L/k composée de r extensions de degré d telle que le rang de Mordell-Weil de $A(L)$ soit au moins r.*

Démonstration. — Il existe un ouvert V de A, un ouvert non vide $U \subset \mathbf{P}^n_k$, et un morphisme fini étale $V \to U$ de degré d. On considère le morphisme fini étale $V^r \to U^r$. L'image réciproque d'un k-point de U^r est le spectre d'une k-algèbre produit tensoriel de r extensions séparables de k chacune de degré d. L'énoncé résulte donc du théorème 5.1. □

Comme le note Néron, le cas particulier suivant avait déjà été établi par Billing [**2**].

Corollaire 5.3. — *Soit E une courbe elliptique sur k.*

(i) Soit $r \geq 1$ un entier. Il existe une extension multiquadratique L/k de degré 2^r telle que le rang de Mordell-Weil de $E(L)$ soit au moins r.

(ii) Soit k_2 le composé de toutes les extensions quadratiques de k. Le rang de $E(k_2)$ est infini.

La même méthode redonne le théorème de Holmes et Pannekoek [**9**]. En se ramenant au théorème de Skorobogatov et Zarhin [**21**] sur les surfaces $K3$, Holmes et Pannekoek [**9**, Prop. 13] montrent que pour toute variété de Kummer X sur un corps de nombres k, le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini. Ceci implique [**9**, Prop. 14] que si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les points rationnels sur X alors l'approximation faible faible vaut pour X.

Théorème 5.4. — [**9**, Thm. 17]. *Soient k un corps de nombres et A une variété abélienne. Soit $r > 0$ un entier. Soit X_r un modèle projectif et lisse de la variété de Kummer quotient de A^r par l'involution antipodale. Si X_r satisfait l'approximation faible faible, alors il existe une tordue quadratique de A sur k qui est de rang au moins r. En particulier, si la propriété d'approximation faible faible vaut pour toutes les variétés de Kummer X_r, le rang des tordues quadratiques de A n'est pas borné.*

Démonstration. — On considère la famille de variétés abéliennes $\pi : A^{r+1} \to A^r$ donnée par la projection sur les n derniers facteurs. Soit $L = k(A^r)$ et $K = k(X)$. Soit $q : U \to V$ un morphisme fini étale de degré 2, avec $U \subset A^r$ et $V \subset X$ des ouverts de Zariski convenables. Soit ρ le rang de $A(k)$. Le rang du groupe de Mordell-Weil $A(L)$ de la fibre générique A_L est au moins égal à $r + \rho$. Notons B le V-schéma abélien $R_{U/V}(A_U)$.

On a $B(K) = A(L)$. Le rang de $B(K)$ est donc au moins $r + \rho$. Le théorème 5.1 montre que les k-points m de V, de fibre $n = q^{-1}(m)$ un point fermé de degré 2, tels que le rang de la variété B_m sur k et donc de $A(k(n))$ soit au moins égal à $r + \rho$ sont denses dans V pour la topologie de Zariski. Le rang de $A(k(n))$ est la somme de ρ et du rang sur k d'une tordue quadratique de A, dont le rang sur k est donc au moins r. □

Remarque 5.5. — La preuve donnée ici est légèrement différente de celle de [**9**]. En particulier, il n'y a pas de discussion du comportement de la torsion des variétés abéliennes dans la famille, ni d'apparente utilisation de hauteurs.

Remerciements. *Cette note a été a été suscitée par un exposé de C. Salgado. Je remercie D. Loughran pour diverses discussions. L'appendice a été suscité par la remarque de B. Poonen que la méthode du point générique mène au corollaire 5.2. Je remercie le rapporteur ou la rapporteuse de cet article pour sa lecture attentive. Le travail a été réalisé lors du trimestre "A la redécouverte des points rationnels" organisé par D. Harari, E. Peyre et A. Skorobogatov à l'Institut Henri Poincaré à Paris, d'avril à juillet 2019.*

Références

[1] H. Billard, Sur la répartition des points rationnels des surfaces elliptiques, J. reine angew. Math **505** (1998) 45–71.

[2] G. Billing, Vom Range kubischer Kurven vom Geschlecht Eins in algebraischen Rationalitätsbereichen, IXe Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Helsingfors (= Helsinki), 1938.

[3] T. D. Browning, L. Matthiesen and A. Skorobogatov, Rational points on pencils of conics and quadrics with many degenerate fibres, Ann. of Math. **180** (2014) 381–402.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré 4. Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989, 43–55, Progr. Math., 91, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[5] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Principal Homogeneous Spaces under Flasque Tori : Applications, J. of Algebra **106** (1987), 148–205.

[6] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and Sir Peter Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I, J. für die reine und angew. Math. **373** (1987) 37–107 ; II, ibid. **374** (1987) 72–168.

[7] Y. Harpaz and O. Wittenberg, On the fibration method for zero-cycles and rational points, Annals of Mathematics **183** (2016), no. 1, 229–295.

[8] M. Hindry and C. Salgado, Lower bounds for the rank of families of abelian varieties under base change Acta Arith. **189** (2019), no. 3, 263–282.

[9] D. Holmes and R. Pannekoek, The Brauer-Manin obstruction on Kummer varieties and ranks of twists of abelian varieties. Bull. Lond. Math. Soc. **47** (2015), no. 4, 565–574.

[10] V. A. Iskovskikh, Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 19–43, 237.

[11] D. Loughran and C. Salgado, Rank jumps on elliptic surfaces and the Hilbert property, arXiv :1907.01987 [math.NT]

[12] Yu. I. Manin, Two theorems on rational surfaces, in Proc. Symp. Int. Geometria Algebraica (Roma, 1967) 198–207.

[13] Yu. I. Manin, *Cubic Forms*, North Holland Mathematical Library, Second edition (1984).

[14] B. Mazur, The topology of rational points. Experiment. Math. **1** (1992), no. 1, 35–45.

[15] A. Néron, Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps, Bulletin de la S. M. F., tome **80** (1952), 101–166.

[16] D. Rohrlich, Variation of the root number in families of elliptic curves, Compositio Math. **87**, no. 2, 1993), 119–151.

[17] P. Salberger and A. N. Skorobogatov, Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms. Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 517–536.

[18] C. Salgado, On the rank of the fibers of rational elliptic surfaces, Algebra & Number Theory, vol. **6**, no. 7 (2012), 1289–1314.

[19] J-P. Serre, Lectures on the Mordell-Weil theorem. Aspects of Mathematics, **E 15**, Vieweg (1989).

[20] J-P. Serre, Topics in Galois theory. Second edition. With notes by Henri Darmon. Research Notes in Mathematics **1**. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008.

[21] A. N. Skorobogatov and Yu. G. Zarhin, A finiteness theorem for the Brauer group of abelian varieties and K3 surfaces, J. Algebraic Geom. **17** (2008), 481–502.

[22] Sir Peter Swinnerton-Dyer, Weak approximation and R-equivalence on cubic surfaces, in *Rational points on algebraic varieties* (E. Peyre, Y. Tschinkel ed.), Progress in Mathematics vol. **199** (2001), Birkhäuser Verlag, p. 357–404.

[23] O. Wittenberg, Rational points and zero-cycles on rationally connected varieties over number fields, in *Algebraic Geometry : Salt Lake City 2015*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **97.2**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018, p. 597–635.

soumis le 14 août 2019 ; version légèrement révisée soumise le 26 février 2020

J.-L. Colliot-Thélène, Université Paris Sud, Université Paris-Saclay, Mathématiques, Bâtiment 307, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* jlct@math.u-psud.fr