

Équations sous-elliptiques : contrôle, singularités et théorie spectrale

Cyril Letrouit

Laboratoire Jacques-Louis Lions

Soutenance de thèse
4 octobre 2021

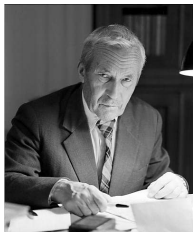


Introduction

Objectif - Étudier des phénomènes de propagation dans les équations sous-elliptiques : propagation de l'énergie, des singularités, des mesures de défaut, ... et établir des liens avec la géométrie sous-Riemannienne (correspondance classique/quantique).

Motivation - L'étude des équations sous-elliptiques s'est faite principalement de 1960 à 1990 et elle n'a pas suffisamment bénéficié du développement de la géométrie sous-Riemannienne (de 1990 à aujourd'hui). Exemple de question : les minimiseurs anormaux, découverts au début des années 1990, jouent-ils un rôle dans les phénomènes de propagation des équations sous-elliptiques ?

Plan de l'exposé - 1. Sous-Laplaciens. 2. Propagation de l'énergie. 3. Propagation des singularités. 4. Théorie spectrale de sous-Laplaciens.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} = f$$



Pour définir un sous-Laplacien, on a besoin de :

- M une **variété** lisse, compacte, connexe de dimension n
- $X_1, \dots, X_m$ des **champs de vecteurs** lisses sur M (pas nécessairement indépendants) tels que

$$\text{Lie}(X_1, \dots, X_m) = TM$$

(condition de Hörmander).

- μ un **volume** lisse sur M .

Alors le **sous-Laplacien** s'écrit

$$\Delta = - \sum_{i=1}^m X_i^* X_i = \sum_{i=1}^m X_i^2 + \text{div}_\mu(X_i) X_i,$$

où l'étoile est la transposition dans $L^2(M, \mu)$.

Il s'agit d'une généralisation du Laplacien Euclidien et de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les variétés Riemanniennes ([Hörmander 1967], [Rothschild-Stein 1976]).

Exemples de sous-Laplaciens

- **Heisenberg.** Champs $X_1 = \partial_x$ et $X_2 = \partial_y - x\partial_z$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\mu = dx dy dz$:

$$\Delta = \partial_x^2 + (\partial_y - x\partial_z)^2$$

$$\text{Ici, } [X_1, X_2] = -\partial_z.$$

- **Martinet.** Champs $X_1 = \partial_x$ et $X_2 = \partial_y + x^2\partial_z$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\mu = dx dy dz$:

$$\Delta = \partial_x^2 + (\partial_y + x^2\partial_z)^2.$$

$$\text{Ici, } [X_1, X_2] = 2x\partial_z \text{ et } [X_1, [X_1, X_2]] = 2\partial_z.$$

- ...

Hypoellipticité et sous-ellipticité

Les sous-Laplaciens sont **hypoelliptiques**, ce qui signifie que si V est un ouvert et $\Delta u \in C^\infty(V)$, alors $u \in C^\infty(V)$.

Les sous-Laplaciens satisfont aussi des inégalités de **sous-ellipticité** :

$$\|u\|_{H^{2/k}} \leq C(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}).$$

Le k qui apparaît est le **degré de non-holonomie**, nous allons le définir tout de suite. C'est une mesure du "degré de sous-ellipticité".

Distribution sous-Riemannienne

On appelle

$$\mathcal{D} = \text{Vect}(X_1, \dots, X_m) \subset TM$$

la **distribution**. Elle n'est pas forcément de rang (dimension) constant.

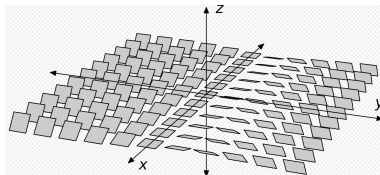
On pose $\mathcal{D}^0 = \{0\}$, $\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}$ et, pour $\ell \geq 2$,

$$\mathcal{D}^\ell = \mathcal{D}^{\ell-1} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}^{\ell-1}].$$

Ceci définit un **drapeau** en tout point $q \in M$

$$\{0\} = \mathcal{D}_q^0 \subseteq \mathcal{D}_q^1 \subset \dots \subsetneq \mathcal{D}_q^{k(q)} = T_q M$$

Sous la condition de Hörmander, le théorème de **Chow-Rashevsky** (1937) stipule que, pour tous $q, q' \in M$, il existe un chemin tangent à $\mathcal{D}$ reliant q à q' .



Questions abordées dans la thèse

Dans cette thèse, on s'intéresse à

- ❶ la **propagation de l'énergie** dans les équations linéaires suivantes (avec sous-Laplacien) :

$$\partial_{tt}^2 u - \Delta u = 0 \quad (\text{Ondes})$$

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u + Vu = 0. \quad (\text{Schrödinger})$$

On étudie le problème de l'**observabilité** ($\Leftrightarrow$ contrôlabilité) de ces équations.

- ❷ la **propagation des singularités** dans ces mêmes équations.
- ❸ la **propagation** (ou l'invariance) **des mesures de défaut** associées aux fonctions propres des sous-Laplaciens.

→ correspondance entre aspects **classiques** (géométrie sous-Riemannienne) et aspects **quantiques** (opérateurs sous-elliptiques).

→ une même idée : étudier le cône $\{\sigma_P(\Delta) = 0\} \subset T^*M$.

Premier problème - Observabilité

Le problème de l'**observabilité (exacte)** est le suivant : étant donné $\omega \subset M$ mesurable et $T_0 > 0$ un temps, est-ce que toute solution u de l'équation que l'on considère (ondes ou Schrödinger) vérifie

$$\mathcal{E}_{(0,T_0),\omega}(u) \geq C \mathcal{E}_{(0,T_0),M}(u)$$

où $C > 0$ est indépendant de u ? [Lions 1988].

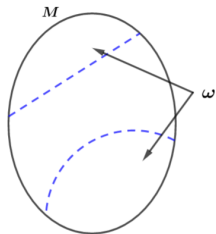
Plan de cette partie :

- 1 Observabilité des ondes sous-elliptiques ;
- 2 Observabilité de Schrödinger sous-elliptique.

Définition.

L'équation des ondes est (exactement) **observable** sur ω en temps T_0 s'il existe une constante $C_{T_0}(\omega) > 0$ telle que toute solution u de l'équation des ondes satisfait

$$\int_0^{T_0} \int_{\omega} |\partial_t u(t, x)|^2 d\mu(x) dt \geq C_{T_0}(\omega) \left(\|\partial_t u|_{t=0}\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^m \|X_j u|_{t=0}\|_{L^2}^2 \right).$$



Les équations d'ondes sous-elliptiques ne sont jamais observables

Théorème ([L. 2020])

Soit $\omega \subset M$ un ensemble mesurable. On suppose que $M \setminus \omega$ contient dans son intérieur un point q tel qu'il existe $1 \leq i, j \leq m$,

$$[X_i, X_j](q) \notin \text{Vect}(X_1(q), \dots, X_m(q)) = \mathcal{D}_q.$$

Alors quel que soit $T_0 > 0$, l'équation des ondes sous-elliptique **n'est pas exactement observable** sur ω en temps T_0 .

Idée : Utiliser des courbes Hamiltoniennes qui ne rencontrent pas ω .

On introduit le **symbole principal** du sous-Laplacien (=le Hamiltonien)

$$g^* = \sigma_P(-\Delta) \in C^\infty(T^*M).$$

Le symbole principal de l'opérateur des ondes $\partial_t^2 - \Delta$ est

$$p = -\tau^2 + g^* \in C^\infty(T^*(\mathbb{R} \times M)).$$

Le champ de vecteurs Hamiltonien associé à g^* (resp. p) est $\vec{g}^*$ (resp. $\vec{p}$).

Définition. Une *géodésique normale* (parcourue à vitesse 1) est la projection d'une courbe intégrale du champ Hamiltonien :

$$t \mapsto x(t) = \pi(e^{t\vec{g}^*} \lambda_0)$$

où $\lambda_0 \in S^*M$, $g^*(\lambda_0) = 1/4$, et $\pi : T^*M \rightarrow M$ est la proj. canonique.

Lemme. Sous les hypothèses du théorème, $\forall T_0 > 0$, il existe une géodésique normale qui ne rencontre pas $\bar{\omega}$ sur l'intervalle $(0, T_0)$.

Autrement dit, la condition de contrôle géométrique de [Bardos-Lebeau-Rauch 1992] n'est pas vérifiée.

Conclusion de la preuve. On choisit une géodésique normale $x(t)$ qui ne rencontre pas $\bar{\omega}$ dans l'intervalle $(0, T_0)$. Puis on construit une suite de solutions v_k dont l'énergie se concentre sur x . Cette construction est une adaptation directe des *Gaussian beams* [Ralston 1982], car on travaille dans $\{g^* \neq 0\}$, la partie du cotangent où Δ est "elliptique". Ceci nie l'observabilité car

$$\frac{\int_0^{T_0} \int_{\omega} |\partial_t v_k(t, x)|^2 d\mu(x) dt}{\|\nabla^{\text{sR}} v_{k,0}\|_{L^2}^2 + \|v_{k,1}\|_{L^2}^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Comment trouver une géodésique qui ne rencontre pas $\bar{\omega}$?

Proposition. Soit q tel que $[X_i, X_j](q) \notin \text{Vect}(X_1(q), \dots, X_m(q)) = \mathcal{D}_q$. Alors, $\forall T_0 > 0$ et pour tout voisinage V de q dans M , il existe une géodésique normale $t \mapsto x(t)$ parcourue à vitesse 1 telle que $x(t) \in V$ pour tout $t \in (0, T_0)$.

Remarque. En choisissant un tel q dans l'intérieur de $M \setminus \omega$, et $V \subset M \setminus \bar{\omega}$, on obtient une géodésique normale qui ne rencontre pas $\bar{\omega}$.

Exemple (Heisenberg). $X_1 = \partial_{x_1}$ et $X_2 = \partial_{x_2} - x_1 \partial_{x_3}$, et $\Delta = X_1^2 + X_2^2$. On a $g^* = \xi_1^2 + (\xi_2 - x_1 \xi_3)^2$. On choisit la condition initiale $x(0) = 0$ et $\xi(0) = (1/2, 0, 1/2\varepsilon)$, donc $g^* = \frac{1}{4}$. Pour $\varepsilon > 0$, on trouve une géod.

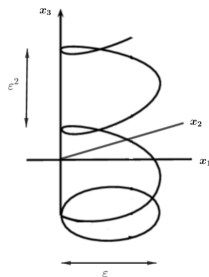
$$x_1(t) = \varepsilon \sin(t/\varepsilon)$$

$$x_2(t) = \varepsilon \cos(t/\varepsilon) - \varepsilon$$

$$x_3(t) = \varepsilon(t/2 - \varepsilon \sin(2t/\varepsilon)/4)$$

Plus ε est petit, plus la géodésique reste proche de son point de départ.

Preuve de la prop. Nilpotentisation, puis restriction au cas où les crochets de longueur ≥ 3 s'annulent, puis preuve dans ce cas simple en "isolant un axe x_3 ".





Des bambous sous-Riemanniens !

Observabilité de Schrödinger sous-elliptique

On met en regard deux phénomènes :

- ① La sous-ellipticité fait “ralentir” la propagation de l'énergie des ondes ;
- ② Pour l'équation de Schrödinger “usuelle” (sur une variété Riemannienne), il y a propagation à vitesse infinie de l'énergie.

Question. Est-ce que dans une équation de Schrödinger sous-elliptique, la propagation pourrait aussi ralentir et se faire à vitesse finie, voire à vitesse nulle ? La réponse est : OUI. [Burq-Sun 2020], [L.-Sun 2020], [Fermanian-L. 2021].

Ces résultats d'observabilité pour l'équation de Schrödinger ne sont valides que dans des variétés particulières.

Dans la suite, nous décrivons la principale idée de [Fermanian-L. 2021], qui peut se résumer ainsi (voir aussi [Bahouri-Gérard-Xu 2000]) :

l'équation de Schrödinger sur un groupe de Heisenberg se décompose en une superposition d'équations de transport avec des vitesses différentes.

Mesures semiclassiques non-commutatives

On considère V un potentiel analytique sur M ($\approx$ quotient du groupe de Heisenberg $G = \mathbb{H}_d$) et l'équation de Schrödinger sur M

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta_M u + Vu = 0. \quad (1)$$

De toute suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(M))$ on peut extraire une sous-suite telle que pour tout $\theta \in L^1(\mathbb{R})$ et tout symbole σ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} \theta(t) (\text{Op}_{\varepsilon_k}(\sigma) u^{\varepsilon_k}(t), u^{\varepsilon_k}(t))_{L^2(M)} dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R} \times M \times \widehat{G}} \theta(t) \text{Tr}(\sigma(x, \lambda) \Gamma_t(x, \lambda)) d\gamma_t(x, \lambda) dt.$$

Si $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille de solutions de (1), on a

$$\Gamma_t(x, \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_{n,t}(x, \lambda)$$

pour $(x, \lambda) \in M \times \mathfrak{z}^*$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\partial_t - \left(n + \frac{d}{2} \right) \mathcal{Z}^{(\lambda)} \right) (\Gamma_{n,t}(x, \lambda) d\gamma_t(x, \lambda)) = 0.$$

[Fermanian-Fischer 2019], [Fermanian-L. 2021]. On peut en déduire un résultat d'observabilité en temps fini. La non-observabilité en temps petit découle d'une construction de paquets d'ondes "non-commutatifs".

Deuxième problème - Propagation des singularités

Étant donnée une solution u de l'équation des ondes, on dit qu'il y a une **singularité** au temps t au point q si $u(t)$ n'est pas C^∞ en q .

Les singularités des ondes Euclidiennes se **propagent selon des lignes droites** à vitesse 1 (ou c pour $\partial_t^2 - c^2 \Delta$) et se réfléchissent sur les bords.



C'est aussi le cas dans le cadre plus général des variétés Riemanniennes, d'après le théorème de Hörmander [Hörmander 1971] : les lignes droites sont alors remplacées par des **géodesiques**.

Définition. Le **front d'onde** d'une distribution u est l'ensemble des co-directions $(x_0, \xi_0) \in T^*M \setminus 0$ où u n'est pas lisse. Plus précisément, $(x_0, \xi_0) \notin WF(u) \Leftrightarrow \exists A \in \Psi^0(M)$, elliptique en (x_0, ξ_0) , tel que $Au \in C^\infty(M)$.

Théorème de Hörmander. On considère l'EDP $Pu = f$. Si le symbole principal p de P est réel, alors $WF(u) \setminus WF(f) \subset p^{-1}(0)$, et $WF(u) \setminus WF(f)$ est invariant par le flot engendré par le champ Hamiltonien $\vec{p}$. Aux points où ce champ s'annule, le théorème de Hörmander ne dit rien.

Propagation des singularités - Cadre sous-elliptique

On considère $P = \partial_t^2 - \Delta$ où Δ est un sous-Laplacien. Alors

$$\begin{cases} p = 0 \\ \vec{p} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\tau^2 + g^* = 0 \\ -2\tau\partial_t + \vec{g}^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \tau = g^* = 0.$$

Question. Comment se propagent les singularités dans $\Sigma = \{g^* = 0\}$?

Remarque. Σ ne dépend en fait que de la distribution : $\Sigma = \mathcal{D}^\perp$.

Remarque. Dans $\{g^* \neq 0\}$, la propagation des singularités est décrite par le théorème de Hörmander.

Soit $\omega_{\mathcal{D}^\perp}$ la restriction à $\mathcal{D}^\perp$ de la forme symp. canonique sur T^*M .

Définition. Un relevé anormal extrémal est une courbe absolument continue $t \mapsto \lambda(t) \in \mathcal{D}^\perp \setminus 0$ qui satisfait $\dot{\lambda}(t) \in \ker(\omega_{\mathcal{D}^\perp}(\lambda(t)))$ pour presque tout t . La projection de $\lambda(t)$ sur M , qui est presque partout tangente à la distribution, est appelée courbe singulière.

Théorème ([Melrose 1986], [L. 2021])

Les singularités dans $\Sigma = \mathcal{D}^\perp$ se propagent seulement le long des relevés anormaux extrémaux. Le support singulier se propage le long des courbes singulières à n'importe quelle vitesse choisie entre 0 et 1.

Idée de preuve

Qu'est-ce que la vitesse dans le théorème précédent ? Il y a une métrique g "sous-Riemannienne" associée aux champs X_j :

$$g_q(v) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m u_j^2, \quad v = \sum_{j=1}^m u_j X_j(q) \right\}.$$

La vitesse instantanée d'une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ tangente à $\mathcal{D}$ est $(g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)))^{\frac{1}{2}}$.

Idée de preuve. Comment dégénèrent les bicaractéristiques de p quand $\tau^2 = g^* \rightarrow 0$? En chaque point de Σ , elles dégénèrent en un cône convexe contenu dans $(T\Sigma)^{\perp_\omega}$. De plus, les singularités se propagent nécessairement dans $T\Sigma$ (par préservation de τ et g^*). On conclut que les singularités se propagent dans

$$T\Sigma \cap (T\Sigma)^{\perp_\omega} = T\mathcal{D}^{\perp} \cap (T\mathcal{D}^{\perp})^{\perp_\omega} = \ker(\omega_{\mathcal{D}^{\perp}})$$

c'est-à-dire le long des relevés anormaux extrémaux.



Propagation des singularités
dans les ondes avec
sous-Laplacien de
Heisenberg

Le cas Martinet

On considère l'équation des (demi-)ondes Martinet

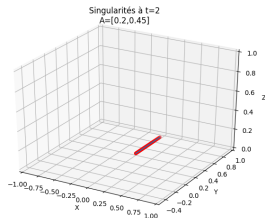
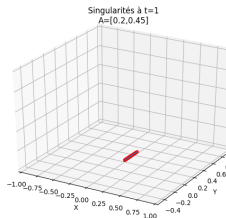
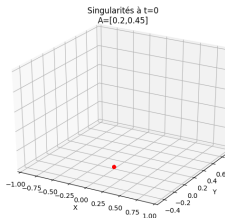
$$i\partial_t u - \sqrt{-\Delta} u = 0, \quad \Delta = \partial_x^2 + (\partial_y + x^2 \partial_z)^2 \quad (2)$$

dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3$. La courbe $y \mapsto (0, y, 0)$ est une courbe singulière. On a prouvé que les singularités de certaines solutions se propagent le long de cette courbe à des vitesses strictement comprises entre 0 et 1.

Théorème ([Colin de Verdière - L. 2021])

Pour toute union d'intervalles $A \subset [0, 1]$, il existe $u(t)$ une solution de (2) telle que

$$\text{Supp Sing}(u(t)) = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3, \ y \in tA\}.$$



3^{ème} problème - Fonctions propres hautes fréquences

Question. Comment l'énergie des **fonctions propres** d'un sous-Laplacien se répartit-elle sur la variété? NB : Les fonctions propres sont les “**états stationnaires**” de Schrödinger et des ondes.

À la différence de l'observabilité, il n'y a pas de propagation en temps.

On considère (pour ce slide) l'opérateur de **Laplace-Beltrami** Δ sur une variété Riemannienne (M, g) sans bord. On suppose que M est compacte, et donc Δ a une résolvante compacte.

On considère une suite de fonctions propres normalisées

$$-\Delta\psi_k = \lambda_k\psi_k, \quad \lambda_k \rightarrow +\infty, \quad \|\psi_k\|_{L^2} = 1.$$

Notre **objectif** est d'obtenir des informations sur les **fonctions propres** ψ_k , dans la limite où $\lambda_k \rightarrow +\infty$. Par exemple, sur les limites faibles de la suite de mesures de probabilités $|\psi_k|^2 d\text{vol}_g$.

Exemple. En courbure négative, il est conjecturé que les fonctions propres s'équirépartissent sur la variété (conjecture QUE de Rudnick-Sarnak).

Mesures de défaut microlocales

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée de $L^2(M)$, $u_k \rightharpoonup 0$. On dit qu'une mesure ν sur S^*M est une **mesure de défaut microlocale** de cette suite [Gérard 1991] si, à extraction près, pour tout symbole a d'ordre 0, on a

$$(\text{Op}(a)u_k, u_k)_{L^2(M)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{S^*M} a \, d\nu.$$

Les mesures de défaut microlocales de suites de fonctions propres normalisées sont appelées **limites quantiques** (QL).

Fait. Les QL de l'opérateur de Laplace-Beltrami sont invariantes par le flot géodésique. Cela découle du calcul

$$0 = ([\text{Op}(a), \sqrt{-\Delta}] \psi_k, \psi_k)_{L^2(M)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{i} \int_{S^*M} \{a, \sqrt{g^*}\} d\nu.$$

Question. Dans le cas sous-Riemannien le flot géodésique est **stationnaire** dans certaines co-directions, celles où $g^* = 0$. Peut-on trouver d'autres propriétés d'invariance des QL dans ces co-directions ?

Les QL dans le cas sous-Riemannien

Théorème ([Colin de Verdière-Hillairet-Trélat 2018]) : Les QL sont supportées dans $S\Sigma$ (“à extraction d’une sous-suite de densité 1 de fonctions propres près”), c’est-à-dire là où le flot géodésique est stationnaire.

Théorème ([Colin de Verdière-Hillairet-Trélat 2018]) : Soit Δ un sous-Laplacien de **contact 3D** et $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions propres normalisées de $-\Delta$ avec valeur propre $\lambda_k \rightarrow +\infty$. Toute QL ν de $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se décompose sous la forme $\nu = \nu_0 + \nu_\infty$ où

- ν_0 “dans la partie elliptique” est invariante par le flot géodésique sous-Riemannien.
- ν_∞ est supportée dans $S\Sigma$ et est invariante par le relevé dans $S\Sigma$ du flot de Reeb.

Question. Quelles propriétés d’invariance les QL vérifient-elles dans le cône caractéristique en général ? Notamment quand il y a des anormales ?

Sommes de sous-Laplaciens de Heisenberg

On considère le sous-Laplacien

$$\partial_{x_1}^2 + (\partial_{y_1} - x_1 \partial_{z_1})^2 + \dots + \partial_{x_m}^2 + (\partial_{y_m} - x_m \partial_{z_m})^2$$

comme opérateur sur une variété compacte (produit de quotients à gauche du groupe de Heisenberg).

Résultat. On caractérise entièrement les QL supportées dans $S\Sigma$, à l'aide d'une infinité de dynamiques qui remplacent le flot de Reeb.

Le sous-Laplacien se réécrit

$$-\Delta = R_1 \Omega_1 + \dots + R_m \Omega_m$$

où $R_i, \Omega_i \in \Psi^1(M)$ (dans des cônes), $R_i = |\partial_{z_i}|$, Ω_i oscillateur harmonique de valeurs propres $2n+1$, et tous ces opérateurs commutent.

On travaille sur les sous-espaces propres joints des Ω_i : on obtient une famille d'opérateurs $\sum_{i=1}^m (2n_i + 1) R_i$, puis en prenant le symbole principal une famille de Hamiltoniens sur Σ homogènes de degré 1

$$\rho_s = \sum_{i=1}^m s_i |\zeta_i|$$

normalisés en prenant $s_1 + \dots + s_m = 1$ (on note $s = (s_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbf{S}$).

QL des sommes de sous-Laplaciens de Heisenberg

Théorème ([L. 2020])

Soit ν une limite quantique telle que $\text{supp } \nu \subset S\Sigma$. Alors on peut écrire

$$\nu = \int_{\mathbf{S}} \nu_s dQ(s) \quad (3)$$

où

- dQ est une mesure de Radon positive sur le simplexe $\mathbf{S}$
- les $(\nu_s)_{s \in \mathbf{S}}$ sont des mesures de probabilité supportées dans $S\Sigma$ telles que pour Q -presque tout $s \in \mathbf{S}$, ν_s est invariante par le flot $e^{t\vec{p}_s}$.

La réciproque est vraie : toute mesure de probabilité ν sur $S\Sigma$ qui s'écrit (3) (avec la propriété d'invariance) est une limite quantique.

($\sim$ sphère Riemannienne, oscillateur harmonique).

Questions ouvertes

Il y a de nombreuses questions ouvertes : décrire les **limites quantiques** dans d'autres modèles sous-elliptiques, calculer la taille des **ensembles nodaux** des fonctions propres de sous-Laplaciens (analogue de la conjecture de Yau et du théorème de Donnelly-Fefferman), ...

Les deux problèmes les plus importants et les plus difficiles à mon avis sont les suivants :

- Comprendre à quoi ressemble une **paramétrixe** d'une équation des ondes sous-elliptique quand il y a des anormales (par exemple dans le cas Martinet). C'est une clé pour les asymptotiques de la chaleur, les formules de trace, ou pour comprendre encore mieux la propagation des singularités.
- Illustrer avec une **expérience physique** l'importance des anormales, par exemple le ralentissement de la propagation (électrons dans un champ magnétique).

“La difficulté de réussir ne fait qu'ajouter à la nécessité d'entreprendre.”

Beaumarchais