

CORRIGÉ N°2

Rappel : espaces de Sobolev. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On note

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, D^\alpha f \in L^2(\Omega)\}.$$

Par exemple, si $k = 1$, on définit $g = D^\alpha f$ pour $|\alpha| = 1$ par

$$\int_{\Omega} f D^\alpha \varphi = - \int_{\Omega} g \varphi$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. On dit que g est la dérivée faible (correspondant au multiindice α), ou dérivée au sens des distributions. On a donc

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq 1\}.$$

La norme naturellement associée est donnée par

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On note aussi $H_0^1(\Omega)$ la complétion de $C_c^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Autrement dit, $H_0^1(\Omega)$ contient les fonctions de $H^1(\Omega)$ “nulles au bord”.

Voir le chapitre C.7 du cours d’Isabelle Gallagher pour plus d’informations.

Exercice 1 : inégalité de Caccioppoli et régularité des fonctions harmoniques

1. Comme suggéré dans l’énoncé, on introduit $\eta \in C_c^\infty(B(R))$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$, qui vaut 1 sur $B(r)$ et telle que $|\nabla \eta| \leq 2/(R-r)$. Une telle fonction existe : on prend $\eta(x) = \chi(|x|)$ avec $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\chi = 1$ sur $[0, 1]$, $\chi = 0$ sur $[R, \infty)$ et $\|\chi'\|_\infty \leq 2/(R-r)$.

Soit $c \in \mathbb{R}$. On pose $\phi = (u-c)\eta^2 \in C_c^\infty(\Omega)$. Comme u est harmonique, on a $\int_{\Omega} \phi \Delta u \, dx = 0$ (intégrale bien définie car ϕ est à support compact). En intégrant par parties, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot (\eta^2 \nabla u + 2(u-c)\eta \nabla \eta) \, dx = 0.$$

D’où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta^2 |\nabla u|^2 \, dx &= -2 \int_{\Omega} (u-c)\eta \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} |u-c|\eta |\nabla u| |\nabla \eta| \, dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\Omega} |u-c|^2 |\nabla \eta|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \eta^2 \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On en déduit en utilisant le fait que $\nabla \eta$ est à support dans $B(R) \setminus B(r)$ et $|\nabla \eta| \leq 2/(R-r)$:

$$\begin{aligned} \int_{B(r)} |\nabla u|^2 \, dx &\leq \int_{\Omega} \eta^2 |\nabla u|^2 \, dx \leq 4 \int_{\Omega} |u-c|^2 |\nabla \eta|^2 \, dx \\ &\leq \frac{16}{(R-r)^2} \int_{B(R) \setminus B(r)} |u-c|^2 \, dx. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, pour tout $R' < R$, on a une estimation du type

$$\int_{B(R')} |\nabla u|^2 dx \leq C(R, R') \int_{B(R)} |u|^2 dx$$

où $C(R, R')$ est une constante strictement positive dépendant de R et R' . Si $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est harmonique, ses dérivées le sont également. On en déduit alors que pour $R'' < R'$, on a :

$$\int_{B(R'')} |\nabla(\partial_{x_j} u)|^2 dx \leq C(R', R'') \int_{B(R')} |\partial_{x_j} u|^2 dx \leq C(R', R'') C(R, R') \int_{B(R)} |u|^2 dx, \quad \forall j = 1 \dots n.$$

On obtient le résultat voulu en itérant cet argument.

3. On introduit une approximation de l'unité $\chi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n} \chi(y/\varepsilon)$ où $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\chi \geq 0$, $\text{supp}(\chi) \subset B(0, 1)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \chi dx = 1$. Soit $u \in H^1(\Omega)$. On pose $u_\varepsilon = u * \chi_\varepsilon$. Alors $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ où $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. De plus, on peut montrer que u_ε est harmonique sur Ω_ε . Pour cela on considère $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$, et on veut montrer que $\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \varphi dx = 0$ ou autrement dit que $\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = 0$. On calcule en utilisant que $\text{supp}(\chi_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\int_{B(0, \varepsilon)} \nabla_x u(x-y) \chi_\varepsilon(y) dy \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ &= \int_{B(0, \varepsilon)} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x u(x-y) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right) \chi_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_{B(0, \varepsilon)} \left(\int_{\Omega_\varepsilon - y} \nabla_x u(x) \cdot \nabla \varphi(x+y) dx \right) \chi_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_{B(0, \varepsilon)} \left(\int_{\Omega} \nabla_x u(x) \cdot \nabla \varphi(x+y) dx \right) \chi_\varepsilon(y) dy \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega_\varepsilon$ et que pour tout $y \in B(0, \varepsilon)$, $\Omega_\varepsilon - y \subset \Omega$. Pour chaque $y \in B(0, \varepsilon)$, la fonction ψ_y définie par $\psi_y(x) = \varphi(x+y)$ est dans $H_0^1(\Omega)$. Comme u est harmonique sur Ω , on en déduit que pour tout $y \in B(0, \varepsilon)$, $\int_{\Omega} \nabla_x u(x) \cdot \nabla \varphi(x+y) dx = 0$ d'où le résultat.

On peut donc appliquer la question précédente à u_ε . Comme u_ε converge vers u dans $L^2(B(R))$, on obtient que u_ε est de Cauchy dans $H^k(B(R/2))$ et en passant à la limite on obtient que $u \in H^k(B(R/2))$ (u étant la limite de u_ε dans $L^2(B(R))$), par unicité, c'est également la limite de u_ε dans $H^k(B(R/2))$). Ainsi, on a prouvé que pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe $R_s > 0$ tel que $u \in H^s(B(R_s))$, on peut ainsi conclure en utilisant l'injection de Sobolev $H^s \subset \mathcal{C}^{[s-n/2]}$.

Rappel : injections de Sobolev. Philosophie : si une fonction a beaucoup de dérivées au sens faible, elle a aussi quelques dérivées au sens fort (i.e., classique), autrement dit, elle est dérivable un certain nombre de fois. Typiquement, $H^s \subset \mathcal{C}^{[s-n/2]}$.

Variante : si une fonction a beaucoup de dérivées au sens faible, elle est dans d'autres espaces L^p que juste L^2 .

Pour plus d'informations, voir le chapitre C.7.2 du cours d'Isabelle Gallagher (2019-2020).

Exercice 2 : inégalité de Caccioppoli généralisée.

À la maison (facultatif), vous pouvez me le rendre dans mon casier.

Exercice 3 : estimation des dérivées d'une fonction harmonique

1. $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ est harmonique. Elle vérifie donc la propriété de la moyenne. On applique ensuite la formule de Green à la fonction $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $U_i = 0$ si $i \neq j$ et $U_j = u$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) &= \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(y) dy \\ &= \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} \operatorname{div} U(y) dy \\ &= \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} \langle U(y), \nu(y) \rangle dy \\ &= \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} u(y) \nu_j(y) dy. \end{aligned}$$

2. Appliquons l'égalité précédente à $u - m$ (qui est également \mathcal{C}^2 et harmonique sur Ω) et utilisons la majoration $0 \leq u - m \leq M - m$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| &\leq \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} |(u(y) - m) \nu_j(y)| dy \\ &\leq \frac{M - m}{|B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} |\nu_j(y)| dy \\ &\leq C_n \frac{M - m}{r^n} \times r^{n-1} \\ &= C_n \frac{M - m}{r} \end{aligned}$$

où C_n est une constante dépendant uniquement de la dimension.

3. On applique l'inégalité de la question précédente pour $x_0 = x$, $r < d(x, \partial\Omega)$. On obtient ainsi que chaque composante de $\nabla u(x)$ est majorée par :

$$C_n \frac{M - m}{r}.$$

En faisant tendre r vers $d(x, \partial\Omega)$, chaque composante est majorée par :

$$C_n \frac{M - m}{d(x, \partial\Omega)}$$

ce qui entraîne l'inégalité demandée pour $C'_n = \sqrt{n} C_n$.

Exercice 4 : conséquences de la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques

1. Par la propriété de la moyenne,

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} f(x_0 + y) \psi(|y|) dy &= \int_0^r \psi(u) \left(\int_{\partial B(x_0, u)} f(x_0 + y) d\sigma(y) \right) du \\ &= \int_0^r \psi(u) |\partial B(x_0, u)| f(x_0) du \\ &= f(x_0) \int_0^r \psi(u) |\partial B(x_0, u)| du \\ &= f(x_0) \int_{B(x_0, r)} \psi(|y|) dy. \end{aligned}$$

Ici, σ est la mesure uniforme sur $\partial B(x_0, u)$, de masse totale $|\partial B(x_0, u)|$.

OU

La fonction f est harmonique donc vérifie la propriété de la moyenne :

$$f(x_0) |\partial B(0, 1)| = \int_{\partial B(0, 1)} f(x_0 + r\omega) dS(\omega), \quad \forall r \in [0, \rho(x_0)].$$

On multiplie chaque membre de l'égalité par $\psi(r)r^{n-1}$ et on intègre en $r \in [0, R]$:

$$\begin{aligned} f(x_0) |\partial B(0, 1)| \int_0^R \psi(r) r^{n-1} dr &= \int_0^R \left(\int_{\partial B(0, 1)} f(x_0 + r\omega) dS(\omega) \right) \psi(r) r^{n-1} dr \\ &= \int_{\partial B(0, 1)} \int_0^R f(x_0 + r\omega) \psi(r) r^{n-1} dr dS(\omega). \end{aligned}$$

Enfin, on effectue le changement de variable des coordonnées cartésiennes vers les sphériques pour obtenir :

$$f(x_0) \int_{B(0, R)} \psi(|y|) dy = \int_{B(0, R)} f(x_0 + y) \psi(|y|) dy.$$

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. D'après la propriété de la moyenne, pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= \frac{1}{|\partial B(x_0, r)|} \left| \int_{\partial B(x_0, r)} f(x) d\sigma(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{|\partial B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} |f(x)| d\sigma(x) \\ &\leq \frac{1}{|\partial B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} \|f\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r))} d\sigma(x) \\ &= \|f\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r))} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

as $r \rightarrow +\infty$. Therefore, $f \equiv 0$.

Pour la prochaine fois : Chercher exercice 5 de cette feuille de TD.