

# Introduction au domaine de recherche

Sylvain Arguillère

6 juin 2010

## Une Introduction à la Géométrie Sous-Riemannienne

École Normale Supérieure

### Introduction

La géométrie sous-riemannienne a connu une très grande expansion durant les trente dernières années. C'est un domaine à l'intersection de la mécanique non-holonome, de la théorie du contrôle, et de la géométrie des espaces de longueurs.

Considérons par exemple une voiture sur un plan. Le conducteur ne peut faire bouger sa voiture qu'en avant et en arrière, éventuellement en la faisant tourner, mais il ne peut pas se déplacer latéralement. Ainsi, pour se garer en créneau, il est obligé de faire une combinaison complexe de mouvements, et doit parcourir une grande distance pour atteindre une configuration visuellement proche de la configuration d'origine. Pour se déplacer d'environ un mètre, il a donc dû en parcourir beaucoup plus.

Ceci est un cas typique de géométrie sous-riemannienne : on a un espace de configurations de dimension plus grande que celle de l'espace des vitesses possibles, c'est-à-dire ayant plus de paramètres que de degrés de liberté.

Ici, on avait un espace de configurations de dimension trois (deux paramètres pour situer la voiture sur le plan, plus un pour l'angle fait par la voiture avec l'axe  $Ox$ ), et seulement deux degrés de liberté : on peut avancer ou tourner, mais pas se déplacer sur le côté. Mais grâce aux interactions entre ces deux degrés de liberté, on peut aller de n'importe quelle configuration à n'importe quelle autre.

Plus généralement, une variété sous-riemannienne  $M$  sera la donnée d'une variété (par exemple  $\mathbb{R}^n$ ) et, en chaque point  $p$  de cette variété, d'un sous-espace de l'espace tangent  $T_p$  à la variété en ce point. Par exemple, un champ de plans dans  $\mathbb{R}^3$ . On appelle ce sous-espace l'espace horizontal en  $p$ , et on le note  $H_p$ .

Une courbe  $c$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sera admissible, et sera dite horizontale, si, pour tout temps  $t$ , la vitesse de la courbe  $\dot{c}(t)$  est horizontale, c'est-à-dire appartient au sous-espace horizontal en ce point. Une première question sera de savoir si on peut relier tous les points de la variété par des courbes horizontales : c'est le problème de connectivité.

Considérons un autre exemple : le cas d'une sphère (un globe terrestre par exemple) roulant sur un plan  $xOy$ . L'espace des configurations possibles est de dimension cinq : deux paramètres pour situer la sphère sur le plan, deux autres pour repérer quel point du globe est en contact avec le plan. Le cinquième vient du fait que l'on peut faire tourner le globe sur lui-même sans changer les quatre paramètres précédents.

Si on restreint les mouvements possible aux glissements sans roulement, on n'obtient que les translations selon les axes  $Ox$  et  $Oy$ , et on ne peut donc changer que les deux premiers paramètres. Si le point de contact initial sur le globe est Paris, on ne pourra jamais obtenir une configuration où le point de contact est Marseille.

En revanche, si on se restreint aux roulements sans glissement (et sans possibilité de faire tourner le globe sur lui-même), on a encore deux degrés de liberté. Mais, cette fois, on peut vérifier expérimentalement que l'on peut atteindre n'importe quelle configuration.

Une fois le problème de connectivité résolu, munissons chaque sous-espace horizontal d'un produit scalaire. On peut alors définir la longueur d'une courbe horizontale. On munit ainsi l'espace des configurations d'une distance, appelée distance sous-riemannienne : la distance entre deux points  $p$  et  $q$  de  $M$  sera la longueur du plus court chemin horizontal allant de  $p$  à  $q$ . Le but de la géométrie sous-riemannienne est d'étudier les propriétés de cette distance : topologie induite, dimension de Hausdorff, équation de la chaleur associée, problème isopérimétrique...

On pourra par exemple vérifier que l'espace des configurations de la voiture muni de cette distance a une dimension de Hausdorff égale à 4, alors que celle du globe roulant sur un plan sera égale à 10 ! En fait, la dimension de Hausdorff d'une variété sous-riemannienne sera toujours plus grande que sa dimension topologique.

Le but de la première partie de cette courte introduction est d'introduire l'exemple le plus simple et le plus connu d'espace sous-riemannien, le groupe de Heisenberg, et d'en récapituler les propriétés les plus connues. On donnera ensuite les définitions précises d'espaces sous-riemanniens, ainsi que les théorèmes de base de leur géométrie, avant d'évoquer certains résultats sur leurs géodésiques. Enfin, on définira les bases du calcul différentiel horizontal, qu'il est naturel d'introduire dans ce cadre, et on finira par l'hypoellipticité du laplacien associé à une géométrie sous-riemannienne.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le groupe de Heisenberg : Un exemple de géométrie sous-riemannienne dans <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>4</b>
1.1	Espaces horizontaux, courbes horizontales . . . . .	4
1.2	Connectivité . . . . .	5
1.3	Relevé horizontal d'une courbe . . . . .	5
1.4	Géodésiques et distance sous-riemannienne . . . . .	6
1.5	Boules pour $d_{SR}$ , théorème de la boule emboîtée . . . . .	7
1.6	Autres différences notables avec la géométrie riemannienne . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Notions de base de la géométrie sous-riemannienne</b>	<b>9</b>
2.1	Définition . . . . .	9
2.2	Connectivité . . . . .	10
2.3	Topologie induite et boules emboîtées . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Géodésiques des espaces sous-riemanniens</b>	<b>11</b>
3.1	Géodésiques normales . . . . .	11
3.2	Application point final, courbes singulières . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Calcul différentiel horizontal</b>	<b>12</b>
4.1	Gradient horizontal et laplacien sous-riemannien . . . . .	12
4.2	Hypoellipticité du laplacien sous-riemannien . . . . .	13

# 1 Le groupe de Heisenberg : Un exemple de géométrie sous-riemannienne dans $\mathbb{R}^3$

On se place dans l'espace de configuration  $M = \mathbb{R}^3$ . On note  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , et  $dx, dy, dz$  sa base duale.

Enfin, on note  $\phi_V^t$  le flot d'un champ de vecteur localement lipschitzien  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

## 1.1 Espaces horizontaux, courbes horizontales

On considère en tout point  $p = (x, y, z)$  le plan  $H_p$  engendré par les vecteurs

$$X := \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z}, Y := \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z}.$$

On appelle  $H_p$  le plan horizontal en  $p$ . Dans la suite, on notera  $\mathbb{H}$ , et on appellera groupe d'Heisenberg, l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni du champ de plans horizontaux  $(H_p)$ .

**Définition 1** Une courbe  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ , continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceau, est dite horizontale si, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\dot{c}(t) \in H_{c(t)}$ . Cela équivaut à dire que son vecteur tangent est en tout point combinaison linéaire de  $X$  et  $Y$ .

Autrement dit,  $c$  est horizontale si et seulement si il existe deux fonctions continues par morceaux  $u_1, u_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que, pour tout temps  $t \in [0, 1]$

$$\dot{c}(t) = u_1(t)X(c(t)) + u_2(t)Y(c(t)).$$

On définit également la longueur sous-riemannienne d'une telle courbe par

$$L_{SR}(c) := \int_0^1 \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_{c(t)}} dt,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  est le produit scalaire sur  $H_p$  défini par  $\langle X(p), X(p) \rangle_p = \langle Y(p), Y(p) \rangle_p = 1$  et  $\langle X(p), Y(p) \rangle_p = 0$ . Attention, cette notion de longueur n'est pas la même que la notion de longueur habituelle d'une courbe de  $\mathbb{R}^3$  !

On peut enfin définir la distance sous-riemannienne sur  $\mathbb{H}$  :

**Définition 2** On définit la distance sous-riemannienne entre deux points  $p$  et  $q$  de  $\mathbb{H}$  par

$$d_{SR}(p, q) := \inf\{L_{SR}(c), c \text{ horizontale}, c(0) = p, c(1) = q\}.$$

**Remarque importante :** Il est possible (et facile) de voir que si l'on munit  $\mathbb{H}$  de la structure de groupe  $(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1))$ ,  $\mathbb{H}$  devient un groupe de Lie nilpotent, pour lequel  $X$  et  $Y$  forment des champs de vecteurs invariants à gauche.

En particulier, la distance sous-riemannienne sera également invariante à gauche (i.e.  $d_{SR}(p * q, p * r) = d_{SR}(q, r)$  pour tout  $p, q, r \in \mathbb{H}$ ). Donc, pour étudier  $d_{SR}(\cdot, \cdot)$ , il suffit d'étudier  $d_{SR}(O, \cdot)$ , où  $O = (0, 0, 0)$ . Voir [4] pour plus de détails.

Il est aisé de voir que  $d_{SR}$  est symétrique, satisfait l'inégalité triangulaire et est telle que  $d_{SR}(p, q) = 0$  si et seulement si  $p = q$ . Il est toutefois moins évident que  $d_{SR}(p, q) < +\infty$ , c'est-à-dire qu'il existe une courbe horizontale reliant  $p$  et  $q$  : c'est le problème que nous abordons dans la partie qui suit.

## 1.2 Connectivité

Rappelons que  $\phi_X$  et  $\phi_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  sont les flots respectifs des champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ . Considérons  $\Phi^t := [\phi_X^t, \phi_Y^t] = \phi_X^t \circ \phi_Y^t \circ \phi_{-X}^t \circ \phi_{-Y}^t$ , le commutateur des flots associés à  $X$  et  $Y$ .

Bien entendu, pour tout  $p \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto \Phi^t(p)$  est horizontale. On sait aussi que

$$\Phi^t(p) = t^2[X, Y] + o(t^2) = t^2 \frac{\partial}{\partial z} + o(t^2).$$

Mais, si on considère la courbe  $c(t) := \Phi^{\text{sign}(t)\sqrt{|t|}}(p)$ , c'est une reparamétrisation de la courbe horizontale  $t \mapsto \Phi^t(p)$ , dont la dérivée en 0 est  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Donc, en faisant une combinaison de chemins horizontaux, on peut parvenir à se déplacer verticalement! On peut ainsi atteindre, localement, toutes les directions en tout point par des courbes horizontales. Un argument de connexité donne alors la connectivité :

**Proposition 1** *On peut toujours connecter deux points par une courbe horizontale. En particulier, la distance sous-riemannienne entre deux points est toujours finie.*

On peut maintenant étudier les propriétés métriques de  $(\mathbb{H}, d_{SR})$ . Pour cela, on aura besoin de la notion de relevé horizontal d'une courbe plane.

## 1.3 Relevé horizontal d'une courbe

Remarquons que si  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  est horizontale, alors  $\dot{c}(t) = \dot{x}(t)X + \dot{y}(t)Y = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}(\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{\partial}{\partial z}$ . On obtient donc

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Considérons alors la courbe  $\bar{c}(t) = (x(t), y(t))$ , projection de  $c$  sur le plan  $xOy$ . On obtient alors, en intégrant l'égalité ci-dessus,

$$z(t) - z(0) = \int_0^t \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})ds = \frac{1}{2} \int_{\bar{c}([0,t])} xdy - ydx.$$

Ainsi, une courbe horizontale peut être entièrement caractérisée par sa hauteur initiale ( $z(0)$ ) et sa projection sur le plan  $xOy$ .

Réciproquement, soit une courbe plane  $\bar{c}(t) = (x(t), y(t))$  continue et dérivable par morceaux. Alors pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une unique courbe horizontale  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  d'altitude initiale  $z_0$ , dont la projection sur les deux premières coordonnées est  $\bar{c}$  : il suffit de prendre  $\dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})) = \dot{x}(t)X + \dot{y}(t)Y$ , et  $c(0) = (x(0), y(0), z_0)$ .

Remarquons enfin que l'on a :

$$L_{SR}(c) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = L(\bar{c}),$$

où  $L(\bar{c})$  est la longueur usuelle de la courbe  $\bar{c}$ .

On a donc prouvé le résultat suivant :

**Proposition 2** *Pour toute courbe plane  $\bar{c}$ , et toute altitude initiale  $z_0$ , il existe une unique courbe horizontale, appelé relèvement horizontal de  $c$ , dont la projection sur le plan  $xOy$  soit égale à  $\bar{c}$ . Réciproquement, toute courbe horizontale est le relevé horizontal d'une courbe plane.*

*De plus, la longueur d'une courbe plane et celle de son relevé horizontal coïncident.*

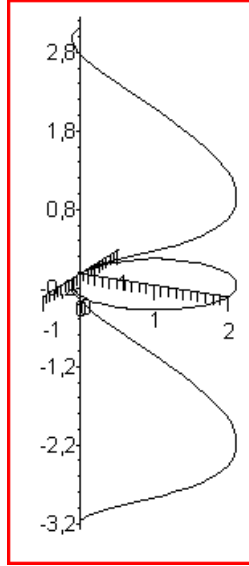


FIGURE 1 – Relevés horizontaux d'un cercle parcouru dans les sens direct et indirect

## 1.4 Géodésiques et distance sous-riemannienne

On dit qu'une courbe horizontale  $c$  est une géodésique sous-riemannienne si, pour tous  $t_0, t_1$  assez proches,  $L_{SR}(c|_{[t_0, t_1]}) = d_{SR}(c(t_0), c(t_1))$ . Nous allons maintenant calculer les géodésiques de  $\mathbb{H}$ . Pour cela, commençons par le résultat suivant :

**Proposition 3** Soit  $\bar{c}(t) = (x(t), y(t))$  une courbe  $\mathcal{C}^1$  dans le plan  $xOy$ . Si on note  $v_t$  le segment orienté de  $\bar{c}(t)$  à  $(0, 0)$ , et que l'on concatène  $\bar{c}$  et  $v_t$ , on obtient une courbe fermée  $\gamma$  bordant un domaine du plan  $\Omega$ . Alors si on note  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  le relevé horizontal de  $\bar{c}$  d'altitude initiale nulle, on obtient

$$z(t) = \int_{\Omega} dx \wedge dy = A(\Omega),$$

où  $A(\Omega)$  est l'aire signée de  $\Omega$ .

**Preuve :** Remarquons que la 1-forme  $\omega := \frac{1}{2}(xdy - ydx)$  est nulle sur les droites passant par l'origine  $(0, 0)$  du plan. Le résultat est alors une conséquence immédiate de la sous-section précédente et du théorème de Green-Riemann,  $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$ .  $\square$

On peut alors déterminer explicitement les géodésiques partant de l'origine  $O = (0, 0, 0)$ , en utilisant l'inégalité isopérimétrique dans le plan.

**Théorème 1** Les géodésiques sous-riemanniennes de  $\mathbb{H}$  de  $O$  à  $(x, y, z)$  sont les relevés horizontaux partant de  $O$  d'arcs de cercles partant de  $(0, 0)$ , finissant en  $(x, y)$ , et entourant un aire signée égal à  $z$  si  $z \neq 0$ ; Si  $z = 0$ , c'est le segment de  $O$  à  $(x, y, z)$ .

Les arcs de cercles partant de  $(0, 0)$  sont exactement les courbes paramétrées

$$\bar{c}_{R,\phi}(t) = Re^{i\phi}(1 - e^{it}), \quad R \in \mathbb{R}_+, \quad \phi \in [0, 2\pi[, \quad t \in \mathbb{R},$$

et

$$\bar{c}_{\infty,\phi}(t) = te^{i\phi}, \quad \phi \in [0, 2\pi[, \quad t \in \mathbb{R},$$

où on a fait l'identification  $(x, y) = x + iy$ . On obtient ainsi les géodésiques issues de  $O$  :

$$c_{R,\phi}(t) = (Re^{i\phi}(1 - e^{it}), \frac{1}{2}R^2(t - \sin t)),$$

$$R \in \mathbb{R}_+, \phi \in [0, 2\pi[, t \in \mathbb{R},$$

et

$$c_{\infty,\phi}(t) = (te^{i\phi}, 0), \phi \in [0, 2\pi[, t \in \mathbb{R},$$

Les géodésiques  $c_{R,\phi}$ ,  $R \in \mathbb{R}_+$ , sont minimisantes sur tout intervalle de longueur au plus  $2\pi$ , c'est-à-dire lorsque leur projection  $\bar{c}$  fait un cercle entier.

On obtient ainsi la distance sous riemannienne de  $O$  à  $p = (x, y, z)$  en trouvant les trois paramètres  $t$ ,  $\phi$  et  $R$  telles que  $c_{R,\phi}(t) = p$ . On obtient alors

$$d_{SR}(O, p) = L_{SR}(c_{R,\phi}|_{[0,t]}) = L(\bar{c}_{R,\phi}|_{[0,t]}) = \int_0^t R \left| \sin \frac{s}{2} \right| ds = R(1 - \cos \frac{t}{2}).$$

On en déduit facilement que la distance euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^3$  et la distance sous-riemannienne ne sont pas équivalentes.

Dans la sous-partie qui suit, nous étudions plus en détails cette distance sous-riemannienne  $d_{SR}$ .

## 1.5 Boules pour $d_{SR}$ , théorème de la boule emboîtée

Grâce à la description des géodésiques que l'on a obtenue, on peut décrire explicitement les boules sous-riemanniennes  $B_{SR}(O, r) = \{p \in \mathbb{H}, d_{SR}(O, p) < r\}$ . Il s'agit en effet des points  $c_{R,\phi}(t)$ , tels que  $L_{SR}(c_{R,\phi}|_{[0,t]}) = R(1 - \cos \frac{t}{2}) < r$ .

**Proposition 4** *Les boules sous-riemanniennes  $B_{SR}(O, r)$  sont paramétrées comme suit :*

$$B_{SR}(O, r) = \left\{ (Re^{i\phi}(1 - e^{it}), \frac{1}{2}R^2(t - \sin t)), \right.$$

$$\left. R \in \mathbb{R}_+, \phi \in [0, 2\pi[, t \in ] - 2 \arccos(1 - \frac{r}{R}), 2 \arccos(1 - \frac{r}{R})[ \right\}.$$

*On en déduit alors les sphères sous-riemanniennes  $S_{SR}(O, r)$  : ce sont les surfaces de révolution autour de l'axe  $Oz$ , de génératrices :*

$$\gamma_r(s) = \left( 2\frac{r}{s} \sin \frac{s}{2}, 0, \frac{r^2}{2s^2}(s - \sin s) \right), s \in [-2\pi, 2\pi].$$

Notons alors, pour tout  $r \geq 0$ ,  $box(r)$  le parallélépipède (ou boîte)  $box(r) := [-r, r] \times [-r, r] \times [-r^2, r^2]$ . On obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 1** *(Boule emboîtée) Pour tout  $r \geq 0$ , on a*

$$box\left(\frac{r}{4\pi}\right) \subset B_{SR}(O, r) \subset box(4\pi r).$$

*En particulier, la distance sous-riemannienne et la distance euclidienne usuelle induisent la même topologie sur  $\mathbb{H}$ . En revanche, la dimension de Hausdorff de  $\mathbb{H}$  est égale à 4.*

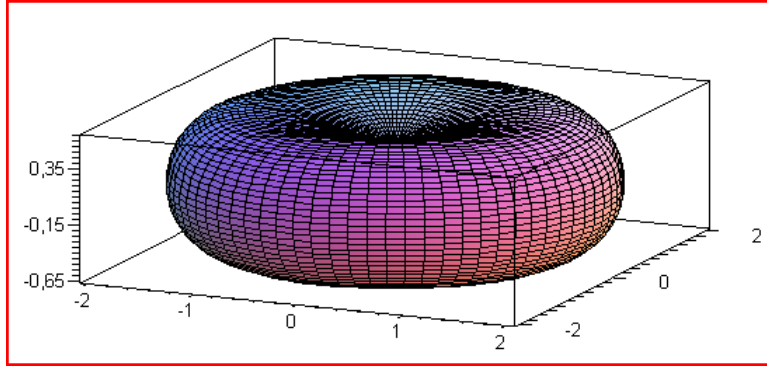


FIGURE 2 – Sphère sous-riemannienne de rayon 2

**Remarque :** On ne définira pas ici la dimension de Hausdorff. Essentiellement, c’est le plus petit exposant  $d \in \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (k_\epsilon \epsilon^d)$  soit finie, où  $k_\epsilon$  est le nombre de boules de rayon  $\epsilon$  nécessaires pour recouvrir la boule de rayon 1.

Remarquons ici la différence énorme avec le cas d’une métrique riemannienne : la dimension de Hausdorff est strictement plus grande que la dimension topologique. En particulier, il n’existe pas d’application bi-lipschitzienne d’un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{H}$ . L’application identique :  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$  est ainsi Hölderienne d’exposant  $\frac{1}{2}$ . Une question difficile, posée par Gromov ([1]), est de trouver l’exposant  $\alpha$  de Hölder maximal d’un homéomorphisme entre ces deux espaces métriques. On sait déjà qu’on a  $\alpha \leq \frac{3}{4}$  grâce à la dimension, et il a été montré qu’on a même  $\alpha \leq \frac{2}{3}$ . Il s’agit aujourd’hui encore d’un problème ouvert.

## 1.6 Autres différences notables avec la géométrie riemannienne

La première différence évidente est le fait que deux géodésiques partant d’un même point et ayant la même vitesse initiale ne sont pas forcément égales. Ainsi, les géodésiques ne satisfont aucune équation différentielle d’ordre 1 sur le fibré tangent. En fait, on verra que les géodésiques sous-riemannienne sont presque toutes les projections de solutions d’équations différentielles d’ordre 1 sur le fibré cotangent. Les rares géodésiques qui ne satisfont pas cette équation font l’objet de beaucoup d’attention. Toutefois, il n’y en a pas dans le groupe d’Heisenberg. (voir [5])

La seconde grande différence est que le rayon d’injectivité (temps  $t \geq 0$  tel que toutes les géodésiques partant d’un point fixé soient minimisantes jusqu’à une longueur au moins égale à  $t$ ) vaut ici 0 en tout point, ce qui n’est jamais le cas en géométrie riemannienne.

Remarquons enfin l’existence de nombreuses surfaces compactes feuilletées par des géodésiques : si on prend une géodésique de  $O$  à  $p = (0, 0, z)$ , par exemple  $c_{\sqrt{\frac{R}{\pi}}, 0}$  sur  $[0, 2\pi]$ , et qu’on la fait tourner autour de  $Oz$ , on obtient toutes les géodésiques  $c_{\sqrt{\frac{R}{\pi}}, \phi}$ ,  $\phi \in [0, 2\pi[$ , qui vont également de  $O$  à  $p$ . Ainsi, l’ensemble des géodésiques reliant  $O$  et  $p$  forment une surface de révolution, appelée ”bubble set”, ou ”bulle”.

Cette bulle a fait l’objet de maintes publications depuis que Pierre Pansu a, en 1982, conjecturé que les bulles étaient exactement les ensembles isopérimétriques de  $\mathbb{H}$ . De nombreux progrès ont été faits dans cette direction depuis, mais le problème reste ouvert, voir [4].

Le groupe d’Heisenberg est l’exemple le plus simple d’un espace sous-riemannien, mais il présente à lui seul des propriétés très représentatives de la géométrie sous-riemannienne. Dans la prochaine



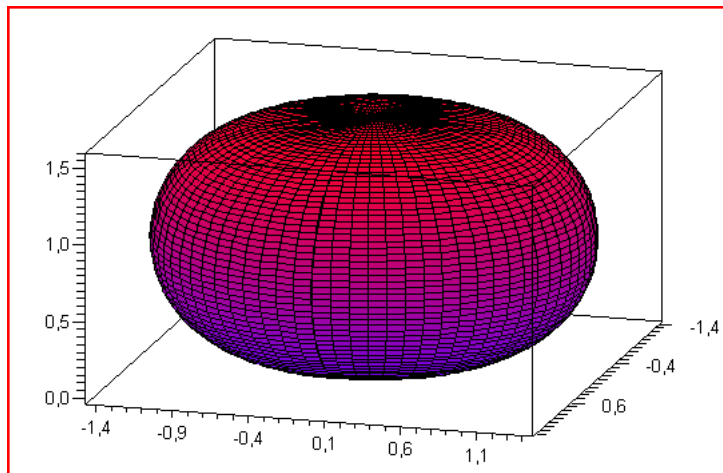


FIGURE 3 – La "bulle" feuilletée par des géodésiques

partie, nous donnons la définition précise d'une variété sous-riemannienne, ainsi que les théorèmes principaux de la géométrie du même nom.

## 2 Notions de base de la géométrie sous-riemannienne

Tous les objets considérés dans cette partie sont supposés  $C^\infty$ , sauf mention explicite du contraire. Pour des raisons de place, nous ne détaillons pas les preuves des différents résultats.

### 2.1 Définition

**Définition 3** Une variété sous-riemannienne de dimension  $n$  et de rang  $k$  est la donnée d'un triplé  $(M, H, g)$ , où  $M$  est une variété connexe de dimension  $n$ ,  $H$  est un sous-fibré de rang  $k$  du fibré tangent, i.e. un champ ou distribution de  $k$ -plans  $\{H_p \subset T_p M, p \in M\}$ , appelés les sous-espaces horizontaux de  $M$ , et  $g$  est un produit scalaire fibre par fibre sur ces sous-espaces horizontaux.

Les vecteurs horizontaux de  $M$  sont les vecteurs  $X(p) \in H_p$ ,  $p \in M$ . Un champ de vecteurs  $X : M \rightarrow TM$  sera dit horizontal si pour tout point  $p$  de  $M$ ,  $X(p) \in H_p$ .

On dira qu'une courbe  $c : [0, 1] \rightarrow M$  continue,  $C^1$  par morceaux, est horizontale lorsque tout vecteur tangent à  $c$  est horizontal. On peut alors définir sa longueur sous-riemannienne par  $L(c) := \int_0^1 \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt$ .

Enfin, on définit la distance sous-riemannienne entre deux points  $p$  et  $q$  de  $M$  comme étant la borne inférieure des longueurs de courbes horizontales reliant  $p$  et  $q$ .

La manière la plus simple de définir (localement) un champ de sous-espaces horizontaux est de partir d'une famille de champ de vecteurs  $(X_i)$ , et de définir le sous-espace horizontal en  $p$  par  $H_p := \text{vect}(X_i(p))$ . C'est ce que l'on a fait pour le groupe de Heisenberg dans la première partie.

Une courbe sera alors horizontale si et seulement si il existe des fonctions  $u_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que pour tout  $t$ ,  $\dot{c}(t) = \sum_i u_i(t) X_i(c(t))$ .

Cette manière de faire est en fait plus générale, car le rang de la famille  $(X_i(p))$  peut changer selon le point  $p$ .

## 2.2 Connectivité

Définissons par récurrence les espaces suivant :

$$H_p^1 := H_p, \quad H_p^{i+1} := H_p^i + [H, H^i]_p.$$

Ici,  $[H, H^i]_p$  désigne le sous-espace de  $T_pM$  engendré par l'ensemble des  $Z(p)$ , où  $Z = [X, Y]$  est un champ de vecteurs qui s'écrit comme commutateur d'un champ de vecteurs horizontal  $X$  et d'un autre champ de vecteurs  $Y$ , tangent à  $H^i$  en tout point. On définit alors  $Lie(H)_p := \bigcup_{i=1}^{+\infty} H_p^i$ .

Bien entendu, l'ensemble des champs de vecteurs tangents en tout point à  $Lie(H)$  forme une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de  $M$ . On dit que  $H$  est un champ de plan Lie-générateur si, pour tout point  $p$ ,  $Lie(H)_p = T_pM$ , comme dans le groupe de Heisenberg.

On a vu dans ce dernier cas que si  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs horizontaux, alors, infinitésimalement, on peut se déplacer dans la direction  $[X, Y]$  par des courbes horizontales. En itérant le procédé, on obtient le théorème de connectivité de Chow.

**Théorème 2 (Chow)** *Si  $H$  est Lie-générateur, alors pour tous points  $p, q$  de  $M$ , il existe une courbe horizontale  $\mathcal{C}^1$  par morceaux reliant  $p$  et  $q$ . En particulier, dans ce cas, la distance sous-riemannienne entre deux points est toujours finie.*

Voir [5] pour une preuve détaillée. Dans toute la suite, on supposera que  $H$  est un champ de sous-espaces Lie-générateur.

## 2.3 Topologie induite et boules emboîtées

On va ici énoncer le théorème de la boule emboîtée dans le cas général. On peut déjà en deviner l'énoncé à partir du cas du groupe de Heisenberg (corollaire 1 de la section 1.5).

La suite  $(n_i(p))_{i \in \mathbb{N}^*}$  des dimensions des espaces  $(H_p^i)$  est évidemment croissante et stationnaire. Comme on a supposé que  $H$  est Lie-générateur, sa valeur stationnaire est  $n = \dim(M)$ . On note  $r(p)$  le premier entier vérifiant  $n_{r(p)}(p)$ . On définit alors le vecteur de croissance de  $H$  en  $p$  par

$$n(p) := (n_1(p) = k, \dots, n_{r(p)}(p) = n).$$

On dira que  $p$  est régulier si  $n(p)$  est constant au voisinage de  $p$ . On définit également  $k_i(p) := n_i(p) - n_{i-1}(p) = \dim(H_p^i/H_p^{i-1})$ , et on note  $k(p) := (k_1(p), \dots, k_{r(p)}(p))$ .

Enfin, pour un vecteur  $a = (a_1, \dots, a_m)$  à coefficients entiers, on définit  $Box(a, r) := \prod_{i=1}^m [-r^i, r^i]^{a_i}$ . On alors le résultat suivant. Voir [5] ou [1] pour une preuve.

**Théorème 3 (Boule emboîtée)** *Il existe des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  au voisinage de  $p$ , et des constantes  $\delta, C > 0$  telles que, pour tout  $0 < \epsilon < \delta$  :*

$$Box(k(p), \frac{1}{C}\epsilon) \subset B_{SR}(p, \epsilon) \subset Box(k(p), C\epsilon).$$

*En particulier, la topologie naturelle de  $M$  et la topologie induite par la distance sous-riemannienne coïncident. De plus, si  $p$  est régulier, alors au voisinage de  $p$  la dimension de Hausdorff de  $M$  est  $\sum_{i=1}^{r(p)} ik_i \geq n$ .*

Dans le cas de  $\mathbb{H}$ , on avait calculé explicitement la distance sous-riemannienne, et on en avait déduit le théorème. En fait, on peut le montrer directement.

### 3 Géodésiques des espaces sous-riemanniens

En utilisant la même méthode que dans le cas riemannien classique, on obtient le théorème de Hopf-Rinow sous-riemannien, voir [5].

**Théorème 4 (Hopf-Rinow)** *Si  $H$  est Lie-générateur, alors pour tous points  $p, q$  de  $M$ , il existe une géodésique minimisante reliant  $p$  et  $q$  si et seulement si  $M$  est complet pour la distance sous-riemannienne.*

On suppose à partir de maintenant que  $M$  vérifie cette complétude. Une des grandes questions de la géométrie sous-riemannienne est alors la suivante :

**Question 1** *Toutes les géodésiques sous-riemanniennes sont-elles lisses ?*

Dans cette partie, nous tentons d'expliquer d'où vient la difficulté.

#### 3.1 Géodésiques normales

Pour plus de simplicité, on suppose  $M = \mathbb{R}^n$ . Ainsi, l'espace cotangent s'identifie  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Notons  $(X_1, \dots, X_k)$  un repère orthonormé de champ de vecteurs horizontaux. On définit alors le hamiltonien  $h$  sur l'espace cotangent par  $h(p, P) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k P(X_i(p))^2$ , où  $p \in M$ , et  $P$  est une forme linéaire sur  $T_p M$ .

**Définition 4** *Une géodésique normale  $p(t)$  est une courbe non constante, qui est la projection sur  $M$  d'une solution  $(p(t), P(t))$  dans le cotangent de l'équation hamiltonienne*

$$\begin{cases} \dot{p} &= \partial_P h(p(t), P(t)), \\ \dot{P} &= -\partial_p h(p(t), P(t)). \end{cases}$$

On peut alors montrer, en utilisant une méthode similaire au cas riemannien classique (voir [5]) :

**Théorème 5** *Les géodésiques normales sont des géodésiques.*

Remarquons en particulier que les géodésiques normales sont lisses. Une des grandes différences entre la géométrie riemannienne classique et la géométrie sous-riemannienne vient de ce que toutes les géodésiques ne soient pas des géodésiques normales.

#### 3.2 Application point final, courbes singulières

Il est possible, pour tout point  $p_0 \in M$ , de munir d'une structure de variété de Hilbert l'espace des courbes horizontales partant de  $p_0$ , noté  $\Omega(p_0, H)$ , grâce à la bijection

$$\Phi : L^2([0, 1], \mathbb{R}^k) \rightarrow \Omega(p_0, H),$$

où  $\Phi(u_1, \dots, u_k)$  est la courbe vérifiant  $c(0) = p_0$  et  $c'(t) = u_1(t)X_1(c(t)) + \dots + u_k(t)X_k(c(t))$ . On définit alors  $fin : \Omega(p_0, H) \rightarrow M$  l'application point final par  $fin(c) = c(1)$ . Elle est différentiable pour la structure lisse de  $\Omega(p_0, H)$ . Voir [5] pour plus de détails.

Une courbe singulière est un point singulier de l'application point final. Intuitivement, c'est une courbe qui n'admet pas de variation horizontale dans toutes les directions. En particulier, une courbe singulière n'apparaîtra pas par exemple dans l'équation d'Euler-Lagrange d'un calcul de variations sur les courbes horizontales, puisqu'elle ne possède pas toutes les variations. Une courbe régulière est une courbe qui n'est pas singulière.

On a déjà le résultat suivant (voir [5]) :

**Proposition 5** *Toute géodésique régulière est normale. En particulier, une géodésique régulière est lisse.*

Toutefois, on a des exemples de géodésiques anormales (i.e. qui ne sont pas des géodésiques normales).

**Exemple :** la courbe  $c(t) = (t, 0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^3$  est singulière pour la structure induite par le champ de plans horizontaux engendrés par les vecteurs  $X := \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y^2 \frac{\partial}{\partial z}$  et  $Y := \frac{\partial}{\partial y}$ . En effet, on peut montrer qu'une courbe suffisamment  $\mathcal{C}^1$ -proche de  $c$  ayant même point initial et même point final que  $c$  est une reparamétrisation de  $c$  !

De plus, pour la métrique sous-riemannienne définie par  $\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 1$  et  $\langle X, Y \rangle = 0$ , on peut montrer que  $c$  est une géodésique, mais qu'elle ne vérifie pas les équations hamiltoniennes de la précédente sous-partie. Ainsi, ce n'est pas une géodésique normale. En fait, on peut voir que  $c$  est une géodésique pour *toutes* les métriques sous-riemanniennes associées à cette distribution ! En revanche, elle pourra être normale pour certaines de ces métriques. Voir [5].

Le lien entre les géodésiques singulières et la régularité de la distance sous-riemannienne est très étroit. Par exemple, dans le cadre analytique, en l'absence de telles géodésiques, celle-ci est sous-analytique. En particulier, les sphères sous-riemanniennes sont alors des variétés sous-analytiques. En revanche, dans l'exemple précédent, on peut voir que ni la distance à l'origine ni les sphères ne sont sous-analytiques ([6]). C'est également à cause de l'existence de ces courbes singulières que le problème de la topologie des petites sphères (à savoir, sont-elles toujours homéomorphes aux sphères habituelles) est toujours ouvert.

On peut montrer que presque toutes les distributions de rang 2 en dimension 4 ou plus ont des géodésiques singulières, et auront sans doute des géodésiques anormales ([7]). En revanche, on sait aussi que presque aucune distribution de rang au moins 3 en dimension 3 ou plus n'admet de géodésique singulière ([8]).

## 4 Calcul différentiel horizontal

### 4.1 Gradient horizontal et laplacien sous-riemannien

**Définition 5** *On dit qu'une fonction continue  $M \rightarrow \mathbb{R}$  est horizontalement  $\mathcal{C}^1$ , et on note  $f \in \mathcal{C}_H^1$ , si pour tout champ de vecteurs horizontal  $X$ , la dérivée partielle  $X(f)$  de  $f$  selon la direction  $X$  existe et est continue. On définit de la même manière les  $\mathcal{C}_H^r(M)$ , pour  $r = 2 \dots \infty$ . On note alors  $\nabla_H f := X_1(f)X_1 + \dots + X_k(f)X_k$  le gradient horizontal de  $f$ , où  $(X_1, \dots, X_k)$  est un repère orthonormé de  $H$ .*

Cela permet de définir la notion de sous-variété horizontale régulière : une hypersurface régulière par exemple est un ensemble  $S$  qui peut s'écrire localement comme  $S = \{f = 0\}$ , ou  $f \in \mathcal{C}_H^1(M)$ , et tel que  $\nabla_H f$  n'est jamais nul sur  $S$ . En particulier, certaines sous-variétés  $S$  de  $M$  auront des

singularités : ce sont les points  $p$  de  $S$  tels que  $H_p \subset T_p S$ . L'étude métrique des sous-variétés d'une variété sous-riemannienne est bien plus compliquée au voisinage de ces points. Par exemple, on ne peut pas définir l'équivalent de la seconde forme fondamentale au voisinage d'un point singulier, alors qu'il est aisé de le faire en un point régulier, voir [4].

L'étape suivante est de définir le laplacien sous-riemannien d'une fonction  $f \in \mathcal{C}_H^2(M)$ . Toutefois, il n'y a pas de définition canonique de celui-ci : dans le cas riemannien, on définit le laplacien de  $f$  par  $\text{div}(\nabla f)$ , mais la divergence est ici mal définie. En effet,  $\text{div}(X)$  est la fonction vérifiant  $X(\mu) = \text{div}(X)\mu$ , où  $\mu$  est la mesure canonique de notre espace. Toutefois, dans le cas sous-riemannien, la mesure de Hausdorff et la forme volume induite par la métrique (appelée mesure de Popp, voir [5]) ne coïncident pas.

On n'entrera pas ici dans ces considérations : on définit simplement le laplacien sous-riemannien par  $\Delta_{SR} := X_1^2 + \dots + X_k^2$ , où les  $X_i$  forment ici encore un repère orthonormé de  $H$ . L'importance de cette opérateur vient de ses nombreuses applications. Par exemple, si on laisse évoluer une surface selon l'équation de la chaleur, elle convergera (dans certains cas, du moins) vers une surface minimale. Ce fait a des applications en reconstitution d'images par exemple.

## 4.2 Hypoellipticité du laplacien sous-riemannien

Bien entendu,  $\mathcal{C}^1(M) \subset \mathcal{C}_H^1(M)$ . Toutefois, dans le cas où  $H$  est Lie-générateur, on voit qu'en dérivant de multiples fois dans des directions horizontales, on finit par obtenir toutes les dérivées, à tous les ordres. D'où le résultat suivant (voir [4]).

**Proposition 6** *Si  $f \in \mathcal{C}_H^\infty(M)$ , alors  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty(M)$ .*

Pour des raisons similaires, on a le théorème suivant, dû à Hörmander, qui explique le lien étroit entre opérateurs hypoelliptiques et géométrie sous-riemannienne.

**Théorème 6** (Hörmander, [3]) *Soit  $P$  un opérateur différentielle d'ordre deux sur les fonctions réelles sur  $M$ , s'écrivant  $P = \sum_{i=1}^k X_i^2 + \sum_{l=1}^m Y_l + C$ , où les  $X_i$  et  $Y_l$  sont des champ de vecteurs agissant par dérivation. On suppose de plus que les crochets itérés  $[X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, X_{i_r}]] \dots$  engendrent l'espace tangent à  $M$  en chaque point de  $M$ .*

*Alors  $P$  est hypoelliptique, c'est-à-dire que pour toute distribution  $u$  sur  $M$ , si  $Pu$  est  $\mathcal{C}^\infty$  au sens des distributions, alors  $u$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ .*

*En particulier, le laplacien sous-riemannien de  $(M, H, g)$  est hypoelliptique si  $H$  est Lie-générateur.*

Toutefois, on n'a pas toujours  $Pu$  analytique entraîne  $u$  analytique. Un opérateur vérifiant cette propriété est appelé hypoelliptique analytique. Un des buts de la thèse de l'auteur sera de tenter de démontrer le résultat suivant.

**Conjecture 1** *Si  $(M, H, g)$  a une géodésique singulière, alors son laplacien sous-riemannien  $\Delta_{SR}$  n'est pas hypoelliptique analytique.*

## Conclusion

La géométrie sous-riemannienne est un domaine riche aux particularités très intéressantes. Cette introduction est très incomplète bien qu'elle présente une grande partie des résultats de base. Par exemple, la nilpotentization de l'algèbre de Lie engendrée par les sous-espaces horizontaux, et son lien avec les groupes de Carnot n'ont pas été mentionnés. On n'a pas non plus traité en détails d'autres exemples d'espaces induisant naturellement une géométrie sous-riemannienne, comme l'holonomie sur les fibrations. Pour tous ces exemples, voir [5].

Elle a des applications dans de nombreux autres domaines des mathématiques, l'étude des espaces symétriques. C'est également grâce à la géométrie sous-riemannienne que Gromov ([2]) a montré son fameux théorème sur les groupes à croissance polynômiale. On peut également parler de ses nombreuses applications en imagerie médicale, reconstruction d'images, aéronautique, et robotique. Par exemple, l'équation de la chaleur sous-riemannienne sur le groupe des déplacements de  $\mathbb{R}^2$  permet de reconstituer une image occultée.

## Références

- [1] J. Risler A. Bellache, editor. *Sub-Riemannian Geometry*, volume 144 of *Progress in Mathematics*. Birkhuser, 1994.
- [2] Gromov. Groups of polynomial growth and expending map. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 53 :53–73, 1981.
- [3] Hrmander. Hypoelliptic second order differential operators. *Acta. Math.*, (119) :147–171.
- [4] S. Pauls J. Tyson L. Capogna, D. Danielli. *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem*, volume 259 of *Progress in Mathematics*. Birkhuser, 2007.
- [5] Montgomery. *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Application*, volume 91 of *Mathematical Surveys and Monographs*. AMS, 2002.
- [6] E. Trlat. *Étude asymptotique et transcendance de la fonction valeur en contrle optimal; catgorie log-exp en gomtrie SR dans le cas martinet*. PhD thesis, 2000.
- [7] H. Sussman W. Liu. *Shortest Paths for Sub-Riemannian Metrics on Rank-Two Distributions*. Number 564 in *Memoirs of the American Mathematical Society*. AMS, 1995.
- [8] E. Trlat Y. Chitour, F. Jean. Genericity results for singular curves. *Journal of Differential Geometry*, 73 :45–73, 2006.