TD n°1 : Équations de transport

Dans tout le TD, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 1 : équation de transport linéaire avec donnée initiale non régulière

On s'intéresse à un problème de transport de type :

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + c \cdot \nabla_x u(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

où c est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ constant.

Lorsque $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, la solution (au sens classique) de ce problème de transport est donnée par $u(t,x) = u_0(x-ct)$. Comment donner un sens au fait que u soit solution de ce problème lorsque u_0 n'est pas régulière, voire discontinue ? Dans la suite, on supposera donc u_0 seulement bornée localement sur $\mathbb{R}^n$.

1. On dira qu'une fonction u bornée localement sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$ est une solution faible du problème (1) si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} u(t,x)\left[\partial_t \varphi(t,x) + c \cdot \nabla_x \varphi(t,x)\right] dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\varphi(0,x)\, dx = 0.$$

Montrer qu'une solution classique (lorsque $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$) est une solution faible.

2. Montrer l'unicité (au sens presque partout) d'une solution faible.

[Indication : on s'intéressera à la solution $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ du problème de transport suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t,x) + c \cdot \nabla_x \varphi(t,x) = \psi(t,x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^+ \\ \varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \end{cases}$$

où $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ quelconque et φ_0 choisi convenablement.]

3. Dans le cas où $n = 1$, $c > 0$ et $u_0(x) = H(x)$ la fonction d'Heaviside, donner explicitement l'unique solution faible du problème.

Exercice 2 : une équation de transport non linéaire

Dans cet exercice, on considère une équation de transport en dimension 1 :

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x(u^2)(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases}$$

1. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, que u_0 est bornée ainsi que sa dérivée u_0'. Le but de cette question est de montrer que (2) admet une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[\, \times \mathbb{R}$ où

$$T = \frac{1}{\sup_{z\in\mathbb{R}}(\max(0, -u_0'(z))}$$

avec la convention $1/0 = +\infty$.

a) Pour $s \geq 0$, on définit ϕ_s par

$$\phi_s(z) = z + s u_0(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

Montrer que pour tout $s \in [0,T[$, ϕ_s est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que sa réciproque.

b) Montrer que l'application Φ définie par

$$\Phi(t,x) = \phi_t^{-1}(x), \quad \forall\, (t,x) \in [0,T[\, \times \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$.
[Indication : on pourra introduire la fonction F définie par $F(t,x,z) = z + tu_0(z) - x$.]
c) Conclure.
[Remarque : cette solution est en fait unique et cela se montre grâce à la méthode des caractéristiques qui sera vue ultérieurement.]

2. De même qu'à l'exercice 1, on définit la notion de solution faible : on dira que u bornée localement sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est une solution faible du problème (2) si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \left[u(t,x)\partial_t\varphi(t,x) + \frac{1}{2}u^2(t,x)\partial_x\varphi(t,x)\right]\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx = 0.$$

On suppose maintenant que $u_0 = 0$ et on définit pour $p > 0$,

$$\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \quad v_p(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -pt, \\ -2p & \text{si} \quad -pt < x \le 0, \\ 2p & \text{si} \quad 0 < x \le pt \\ 0 & \text{si} \quad x > pt. \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $p > 0$, v_p est une solution faible de l'équation (2).

Pour aller plus loin :

— Je vous recommande le chapitre 1 du cours de Jean-Yves Chemin "Introduction aux EDP d'évolution" dont le pdf se trouve sur la page `https://www.ljll.math.upmc.fr/~chemin/` Il s'agit d'un théorème d'existence et d'unicité de solutions faibles à une équation de transport, inspiré par des articles de Di Perna et Lions.