

TD N°5 : ESPACES ET INJECTIONS DE SOBOLEV

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et on note B_r la boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 et de rayon $r > 0$.

Exercice 1 : espaces de Hölder

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\delta \in]0, 1[$ et k un entier ≥ 1 . On rappelle que u est höldérienne sur Ω d'exposant δ si

$$[u]_{C^\delta(\Omega)} := \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\delta} < +\infty$$

et on définit la semi-norme

$$[u]_{C^{k+\delta}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^\delta(\Omega)}.$$

On note $C^{k+\delta}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in C^k(\Omega)$ telles que la norme

$$\|u\|_{C^{k+\delta}(\Omega)} = \|u\|_{C^k(\Omega)} + [u]_{C^{k+\delta}(\Omega)}$$

est finie. Montrer que l'espace de Hölder $C^{k+\delta}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Exercice 2 : injections de Sobolev

Soit $s \in [0, n/2[$. On note $q := 2n/(n - 2s)$ et on rappelle les notations suivantes :

$$\|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

De la question 1. à la question 4., on considère $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\|f\|_{L^q}^q = q \int_0^{+\infty} \lambda^{q-1} |\{ |f| > \lambda \}| d\lambda,$$

où $\{ |f| > \lambda \}$ est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}$ et $|\{ |f| > \lambda \}|$ la mesure de Lebesgue de cet ensemble.

2. Soit $A_\lambda > 0$ une constante qui dépend de λ . Pour tout $\lambda > 0$, on décompose f sous la forme $f = g_\lambda + h_\lambda$ (décomposition des hautes et basses fréquences) où g_λ et h_λ sont définies par :

$$\begin{aligned} \widehat{g_\lambda}(\xi) &= \widehat{f}(\xi) \quad \text{si} \quad |\xi| \leq A_\lambda, & \widehat{g_\lambda}(\xi) &= 0 \quad \text{si} \quad |\xi| > A_\lambda \\ \widehat{h_\lambda}(\xi) &= 0 \quad \text{si} \quad |\xi| \leq A_\lambda, & \widehat{h_\lambda}(\xi) &= \widehat{f}(\xi) \quad \text{si} \quad |\xi| > A_\lambda. \end{aligned}$$

Déterminer A_λ de sorte que $\{ |g_\lambda| > \lambda/2 \} = \emptyset$.

[Indication : on pourra montrer que $\|g_\lambda\|_\infty \leq C_1(s, n) A_\lambda^{\frac{n}{2}-s} \|f\|_{\dot{H}^s}$ où $C_1(s, n)$ est une constante strictement positive dépendant uniquement de n et de s .]

3. Pour le A_λ défini à la question précédente, montrer que

$$\|f\|_{L^q}^q \leq 4q \int_0^{+\infty} \lambda^{q-3} \|h_\lambda\|_2^2 d\lambda.$$

4. Montrer que

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s}$$

où C est une constante positive.

5. Montrer que l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout p tel que $2 \leq p \leq 2n/(n - 2s)$.

6. Soit $p > 2$ et $s \geq s_p := n(1/2 - 1/p)$. Prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in H^s$,

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^2}^{1-\theta} \|f\|_{\dot{H}^s}^\theta \quad \text{avec} \quad \theta = s_p/s.$$

Exercice 3 : espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit Ω un ouvert borné à bord régulier de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \exists g_i \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} u \partial_i \phi = - \int_{\Omega} g_i \phi, \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

et que $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On rappelle également que si $u \in H^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que la suite $(u_k|_{\Omega})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $H^1(\Omega)$.

1. Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in \mathcal{C}_b^1(\Omega)$ (c'est-à-dire que v et ses dérivées sont bornées sur Ω). Montrer que $uv \in H^1(\Omega)$ et les dérivées au sens faible vérifient

$$\partial_j(uv) = (\partial_j u)v + u(\partial_j v), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

2. Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ et $\eta \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ alors $\eta u \in H_0^1(\Omega)$.

3. Soit $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction à dérivée bornée. Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ alors $G \circ u \in H^1(\Omega)$ et que les dérivées au sens faible vérifient

$$\partial_j(G \circ u) = (G' \circ u) \partial_j u, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Pour aller plus loin :

- Dans un billet intitulé “A type diagram for function spaces” sur son blog, Terence Tao parvient en un diagramme à recenser une quantité gigantesque d'espaces fonctionnels, et à les classifier selon deux propriétés : l'intégrabilité et la dérivabilité. Excellent pour se clarifier les idées sur les espaces fonctionnels !