TD n°8 : Équations de Hamilton-Jacobi

Exercice 1 : plusieurs définitions des solutions de viscosité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère l'équation

$$F(x, u, \nabla u, D^2 u) = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{1}$$

où $F : (x, z, p, A) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto F(x, z, p, A) \in \mathbb{R}$ est continue, croissante en z et elliptique dégénérée.

On rappelle la définition de sur-solution de viscosité : $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est sur-solution de viscosité de (1) sur Ω si u est localement bornée inférieurement et si pour tout $x_0 \in \Omega$ et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ touchant u_* par dessous en $x_0 \in \Omega$, alors $F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$.

1. Montrer que dans la définition de sur-solution de viscosité, on peut remplacer la condition "φ touche u_* par dessous en x_0" par "$u_* - \varphi$ admet un minimum local en x_0".

2. Montrer qu'en changeant $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ par $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on ne change pas la notion de sur-solution de viscosité.

3. Montrer que lorsque l'équation est d'ordre 1, on ne change pas la notion de sur-solution de viscosité en remplaçant $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ par $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Exercice 2 : unicité pour l'équation eikonale

1. Montrer que si $v_1 \in \mathcal{C}^1([-1,1])$ (resp. $v_2 \in \mathcal{C}^1([-1,1])$) est une sous-solution de viscosité (resp. une sur-solution de viscosité) de $v + |v'| = 0$ sur $]-1,1[$ et si v_1 et v_2 sont telles que $v_1 \leq v_2$ sur $\{-1,1\}$, alors $v_1 \leq v_2$ sur $[-1,1]$.

2. Montrer que si v_1 (resp. v_2) est une sous-solution de viscosité scs (resp. une sur-solution de viscosité sci) de $v + |v'| = 0$ sur $]-1,1[$ telles que $v_1 \leq v_2$ sur $\{-1,1\}$, alors $v_1 \leq v_2$ sur $[-1,1]$.

3. Montrer que u est une sous-solution de viscosité scs (resp. sur-solution de viscosité sci) de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1,1[$ si et seulement si $v = -e^{-u}$ est une sous-solution de viscosité scs (resp. sur-solution de viscosité sci) de $v + |v'| = 0$ sur $]-1,1[$.

4. Montrer que $U(x) = 1 - |x|$ est l'unique solution de viscosité continue de

$$\begin{cases} |u'| - 1 = 0 \quad \text{sur} \quad]-1,1[\\ u(1) = u(-1) = 0. \end{cases}$$

c'est-à-dire que U est une fonction continue sur $[-1,1]$ qui vaut 0 en ± 1 et une solution de viscosité continue de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1,1[$.

Exercice 3 : unicité dans l'espace entier

Soit n un entier naturel non nul. Soit $H : (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto H(x,p) \in \mathbb{R}$. On suppose que H est dérivable par rapport à ses deux variables x et à p et qu'il existe une constante $C_H > 0$ telle que

$$|\partial_x H(x,p)| \leq C_H(1 + |p|) \quad \text{et} \quad |\partial_p H(x,p)| \leq C_H, \quad \forall\, x,\, p \in \mathbb{R}^n.$$

On considère l'équation de Hamilton-Jacobi d'ordre 1 suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + H(x, \nabla_x u(t,x)) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

En adaptant la preuve d'unicité du cours dans le cas périodique, montrer qu'on a un résultat d'unicité pour (2) dans le cadre des solutions de viscosité continues bornées sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

[Indication : on pourra poser $M = \sup_{[0,T[\times\mathbb{R}^n} \left(u - v - \sigma/(T-t) - \alpha|x|^2\right)$ avec $T > 0$, $\sigma > 0$ et $\alpha > 0$.]