

Groupe de travail  
“Géométrie des groupes, symplectique, de contact”  
Orsay, 2019

Au cours du premier semestre 2019, Camille Horbez et Anne Vaugon ont organisé un groupe de travail à l'université d'Orsay, portant sur la géométrie des groupes d'une part, et la géométrie symplectique et de contact d'autre part. Le but en était de présenter quelques objets de ces différentes théories, idéalement afin de pouvoir discuter de la géométrie des groupes de transformations symplectiques (symplectomorphismes, haméomorphismes) ou de contact (contactomorphismes).

Du point de vue de la géométrie des groupes, l'accent est mis en particulier sur la géométrie à grande échelle des groupes polonais, suivant les travaux de C. Rosendal [12]. Du point de vue des géométries symplectique et de contact, les exposés portent sur certains aspects algébriques (simplicité, perfection) et métriques (entre autres la distance de Hofer).

Les exposés ont été assurés, dans l'ordre de présentation, par Anne Vaugon, Camille Horbez, Frédéric Bourgeois, Jean Lécureux, Patrick Massot, Jordan Emme et Anthony Genevois.

Damien Thomine

## Table des matières

1	Présentation générale, 1	4
2	Présentation générale, 2	5
3	Introduction aux variétés symplectiques	7
4	Introduction aux variétés de contact	10
5	Quasi-isométries	15
6	Groupe de Heisenberg et géométrie de Carnot-Carathéodory	18
7	Géométrie à grande échelle d'un groupe topologique	20
8	Type de quasi-isométrie de $\text{Homeo}(M)$	23
9	Exemples de géométries des groupes $\text{Homeo}(M)$	26
10	Distortion forte dans les groupes de transformations	30
11	Perfection des groupes de difféomorphismes	34
12	Géométrie des groupes de contactomorphismes, 1	37
13	Géométrie des groupes de contactomorphismes, 2	40
14	Distance de Hofer	44
15	Simplicité uniforme des groupes de difféomorphismes	48

# 1 Présentation générale, 1 (11 février, Anne Vaugon)

Étant donnée une variété symplectique  $(M, \omega)$  de dimension paire, on définit le groupe des symplectomorphismes. Ce groupe contient le sous-groupe  $\text{Ham}(M, \omega)$  des difféomorphismes hamiltoniens, c'est-à-dire des flots au temps 1 de champs de vecteurs  $(X_t)$  obtenus à partir d'une fonction  $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $M$  est connexe sans bord, alors  $\text{Ham}(M, \omega)$  agit transitivement sur les  $k$ -uplets de points.

Étant donnée une variété de contact  $(M, \xi)$  de dimension impaire, on définit le groupe des contactomorphismes. Pour une variété de contact compacte sans bord, les champs de vecteurs dont le flot préserve la structure de contact sont en bijection avec les fonctions lisses sur la variété.

**Définition 1.1** (Norme de Hofer).

Étant donné  $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , et soit  $(\psi_t^H)$  le flot engendré par  $H$ . On pose  $\mathcal{L}((\psi_t^H)) := \int_0^1 (\max_{x \in M} H(t, x) - \min_{x \in M} H(t, x)) dt$ .

Soit  $\psi \in \text{Ham}(M, \omega)$ . On définit la norme de Hofer  $\|\psi\|$  comme étant l'infimum de  $\mathcal{L}((\psi_t^H))$  pour tout  $H$  tel que  $\psi_1^H = \psi$ . La distance de Hofer est alors définie par  $d(\psi, \varphi) := \|\psi\varphi^{-1}\|$ .

**Question 1.2.**

$(\text{Ham}(M, \omega), \|\cdot\|)$  est-il toujours de diamètre infini ?

## 2 Présentation générale,2 (11 février, Camille Horbez)

Étant donnée une variété symplectique  $(M, \omega)$  de dimension paire, on peut faire agir son groupe des symplectomorphismes. Étant donnée une variété de contact  $(M, \xi)$  de dimension impaire, on peut faire agir son groupe des contactomorphismes.

### Question 2.1.

*Quelle est la géométrie à grande échelle du groupe des symplectomorphismes ou des contactomorphismes d'une variété ?*

Pour répondre à cette question, il faut d'abord savoir ce que l'on entend par la géométrie à grande échelle d'un groupe.

### 2.1 Premier cas

Commençons par considérer le cas où  $G$  est un groupe de type fini :  $G = \langle S \rangle$ , où  $S$  est fini. On dispose sur  $G$  de la *distance des mots*  $d_S$ , qui est invariante à gauche :

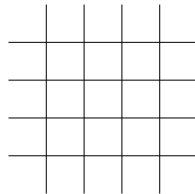
$$d_S(g, h) = \min\{k \geq 0 : \exists s_1, \dots, s_k \in S \cup S^{-1}, h = gs_1 \dots s_k\}.$$

On peut visualiser cette distance à l'aide du *graphe de Cayley* de  $(G, S)$ , dont :

- les sommets sont les éléments de  $G$  ;
- il y a une arête entre  $g$  et  $h$  si et seulement s'il existe  $s \in S \cup S^{-1}$  tel que  $h = gs$ .

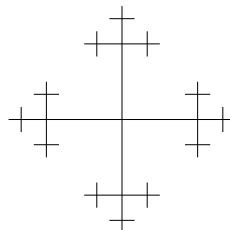
### Exemple 2.2.

- 



Graphe de Cayley de  $(\mathbb{Z}^2, \{(1,0), (0,1)\})$ .

- 



Graphe de Cayley de  $(F_2, \{a, b\})$ .

### Remarque 2.3.

*Si  $S$  et  $S'$  sont deux parties génératrices finies de  $G$ , alors il existe  $\lambda \geq 1$  et  $C \geq 0$  tels que :*

$$\frac{1}{\lambda}d_S(g, h) - C \leq d_{S'}(g, h) \leq \lambda d_S(g, h) + C \quad \forall g, h \in G.$$

On dit que  $(G, d_S)$  et  $(G, d_{S'})$  sont quasi-isométriques.

Si  $S$  est finie et  $S'$  infinie, on garde la majoration de  $d_{S'}$  :

$$d_{S'}(g, h) \leq \lambda d_S(g, h) + C \quad \forall g, h \in G,$$

mais on perd la minoration, et donc la propriété de quasi-isométrie.

## 2.2 Deuxième cas

Une généralisation naturelle est le cas où  $G$  est un groupe localement compact avec une partie génératrice compacte.

## 2.3 Troisième cas

Le cas général est celui d'un groupe topologique  $G$  polonais, c'est-à-dire séparable, et admettant une distance par rapport à laquelle il est complet. La référence sur le sujet est le livre (non publié) de C. Rosendal, *Coarse geometry of topological groups* [12].

**Définition 2.4** (Propriété (OB) relative [11]).

Soit  $G$  un groupe topologique polonais. Une partie  $S \subset G$  est dite relativement (OB) si, pour toute distance  $d$  invariante à gauche sur  $G$ , on a  $\text{Diam}_d(S) < +\infty$ .

Si  $G$  est engendré par une partie relativement (OB), on peut alors définir son type de quasi-isométrie.

**Théorème 2.5** (Mann, Rosendal, 2018 [9]).

Soit  $M$  une variété compacte. Alors  $\text{Homeo}_0(M)$  a un type de quasi-isométrie bien défini.

Pour tout  $n \geq 0$ , le groupe  $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}_n)$  a le type de quasi-isométrie du point.

Si  $\mathbb{Z} \leq \pi_1(M)$ , alors  $\mathcal{C}([0, 1]) \hookrightarrow \text{Homeo}_0(M)$  par un plongement quasi-isométrique.

### 3 Introduction aux variétés symplectiques (18 février, Frédéric Bourgeois)

#### 3.1 Variétés symplectiques

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $2n$ .

**Définition 3.1** (Forme symplectique).

Une forme symplectique  $\omega$  est une 2-forme différentielle sur  $M$  telle que :

- $\omega$  est fermée :  $d\omega = 0$ .
- $\omega$  est non dégénérée :  $\omega^{\wedge n} := \omega \wedge \dots \wedge \omega \neq 0$  en tout point de  $M$ .

En coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_{2n})$ ,

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad \text{où } \omega_{ij} \in \mathcal{C}^\infty,$$

$$d\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} d\omega_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j, \quad \text{où } d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k.$$

La 2-forme différentielle  $\omega$  est non dégénérée si et seulement si l'application  $v \mapsto i(v)\omega = \omega(v, \cdot)$  est un isomorphisme de  $T_p M$  dans  $T_p^* M$  pour tout  $p \in M$ . On a alors  $\omega^{\wedge n} = \det[\omega_{ij}] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2n}$ .

**Exemple 3.2.**

$\omega_{\text{std}} := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ , où  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ , est la forme symplectique standard sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . On a alors :

$$[\omega_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 3.3** (Variétés kählériennes).

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complexe. Les coordonnées locales sont de la forme  $(z_1, \dots, z_n)$  avec  $z_j = x_j + iy_j$ , et les changements de coordonnées sont holomorphes. Il existe  $J \in \text{End}(TM)$  tel que  $J^2 = -I$  (structure presque complexe intégrable) :

$$\begin{cases} J \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} & \forall 1 \leq j \leq n, \\ J \frac{\partial}{\partial y_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} & \forall 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

On demande de plus que les structures riemannienne et presque complexe soient compatibles :  $\nabla J = 0$ . On définit alors une structure symplectique sur  $M$  par  $\omega(X, Y) := g(X, JY)$ .

**Remarque 3.4.**

$\mathbb{S}_{2n}$  n'est pas symplectique pour  $n \geq 2$ , car  $H_{dR}^2(\mathbb{S}_{2n}) = 0$ . En effet,  $[\omega^{\wedge n}] = [\omega]^n = 0$  (rappelons que  $\omega^{\wedge n} = d(\alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)})$  si  $\omega = d\alpha$ ), donc  $\omega^{\wedge n}$  est nécessairement dégénérée.

#### 3.2 Théorème de Darboux

**Théorème 3.5** (Darboux).

Toute variété symplectique  $(M, \omega)$  est localement difféomorphe à  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}})$ .

Contrairement à la géométrie riemannienne, en géométrie symplectique, la géométrie est localement triviale.

*Esquisse de démonstration.*

### Première étape

Soit  $p \in M$ . On peut trouver une base  $(e_i, f_i)$  de  $T_p^*M$  telle que  $\omega_p = \sum_{i=1}^n e_i \wedge f_i$ . Ceci se démontre à l'aide d'une version antisymétrique du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Il existe donc des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  près de  $p$  telles que  $\omega_p = \omega_{\text{std}}$ .

### Deuxième étape

Soit  $\omega_t := (1-t)\omega + t\omega_{\text{std}}$ . Près de  $p$ , la forme  $\omega_t$  est toujours symplectique.

On cherche un difféomorphisme local  $\psi_t$  tel que  $\psi_0 = \text{id}$  et  $\psi_t^*\omega_t = \omega$ . En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient  $\frac{d(\psi_t^*\omega_t)}{dt} = 0$ . Or on peut écrire  $\frac{d\psi_t}{dt} = X_t \circ \psi_t$ , d'où

$$\frac{d(\psi_t^*\omega_t)}{ds} \Big|_{s=t} = \psi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \omega_t = \psi_t^* (i(X_t)d + di(X_t))\omega_t,$$

où l'on a utilisé la formule de Cartan. De plus,  $d\omega_t = 0$ , les formes considérées étant fermées. On a donc :

$$\psi_t^* \left( di(X_t)\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} \right) = 0.$$

Près de  $p$ , on a  $\frac{d\omega_t}{dt} = d\sigma_t$ , où  $\sigma_t$  est une 1-forme différentielle.

### Troisième étape

Choisissons  $X_t$  tel que  $i(X_t)\omega_t + \sigma_t = 0$ ; c'est possible car  $\omega_t$  est non dégénérée près de  $p$ . Remarquons que  $X_t(p) = 0$  pour tout  $t$ . Le champ de vecteurs  $X_t$  est donc intégrable sur un voisinage de  $p$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Soit  $\psi_1$  le flot de  $X_t$  au temps 1. Alors  $\psi_1$  est un difféomorphisme local sur un voisinage de  $p$ , et l'analyse précédente implique que  $\omega = \psi_1^*\omega_1 = \psi_1^*\omega_{\text{std}}$ .  $\square$

## 3.3 Symplectomorphismes

**Définition 3.6** (Symplectomorphisme).

Soit  $\psi$  un difféomorphisme de  $M$ . On dit que  $\psi$  est un symplectomorphisme de  $(M, \omega)$  si  $\psi^*\omega = \omega$ .

On note  $\text{Symp}(M, \omega)$  le groupe des symplectomorphismes de  $(M, \omega)$ , et  $\text{Symp}_0(M, \omega)$  sa composante neutre.

Si  $\psi_t^*\omega = \omega$ , alors  $\frac{d(\psi_t^*\omega)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$ . En écrivant encore  $\frac{d\psi_t}{dt} = X_t \circ \psi_t$ , on obtient  $\mathcal{L}_{X_0}\omega = 0$ , donc  $d(i(X_0)\omega) = 0$ . L'algèbre de Lie de  $\text{Symp}(M, \omega)$  est donc l'espace des champs de vecteurs  $X$  qui sont  $\omega$ -duaux à une 1-forme fermée.

**Définition 3.7** (Haméomorphisme).

Soit  $\psi$  un difféomorphisme de  $M$ . On dit que  $\psi$  est hamiltonien (ou est un haméomorphisme) s'il existe  $H \in C^\infty([0, 1] \times M, \mathbb{R})$  et  $(\psi_t)_{t \in [0, 1]}$  une famille à 1 paramètre de difféomorphismes de  $M$  tels que :

$$\begin{cases} \psi_0 & = \text{id} \\ \psi_1 & = \psi \\ \frac{d\psi_t}{dt} & = X_t \circ \psi_t \end{cases} \quad \text{avec } i(X_t)\omega = dH_t.$$

On note  $\text{Ham}(M, \omega)$  le groupe des haméomorphismes de  $(M, \omega)$ .

Par le raisonnement précédent, l'algèbre de Lie de  $\text{Ham}(M, \omega)$  est l'espace des champs de vecteurs  $X$  qui sont  $\omega$ -duaux à une 1-forme exacte. Remarquons que  $\text{Ham}(M, \omega) < \text{Symp}_0(M, \omega) < \text{Symp}(M, \omega)$ ; si  $M$  est simplement connexe, alors  $\text{Ham}(M, \omega) = \text{Symp}_0(M, \omega)$ .



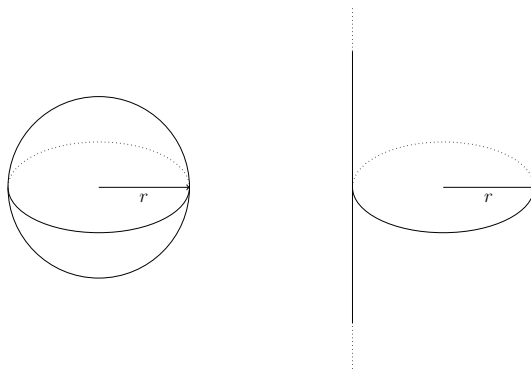
En coordonnées de Darboux, la condition  $i(X_t)\omega = H_t$  s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H_t}{\partial y_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H_t}{\partial x_i}. \end{cases}$$

### 3.4 Quelques objets et résultats de géométrie symplectique

**Théorème 3.8** (Non-squeezing theorem de Gromov).

Dans  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}})$ , on définit  $B_{2n}(r) = B(0, r)$ , et  $C_{2n}(r) = B_2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ .



Les ensembles  $B_{2n}(r)$  et  $C_{2n}(r)$  respectivement.

Il existe  $\psi \in \text{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}})$  tel que  $\psi(B_{2n}(r)) \subset C_{2n}(r')$  si et seulement si  $r \leq r'$ .

**Conjecture 3.9** (Conjecture d'Arnol'd).

Soit  $\psi \in \text{Ham}(M, \omega)$ . L'haméomorphisme  $\psi$  a autant de points fixes qu'une fonction a de points critiques.

**Définition 3.10** (Distance de Hofer).

Soit  $\text{Ham}_c(M, \omega)$  le groupe des haméomorphismes à support compact. Il existe sur  $\text{Ham}_c(M, \omega)$  une métrique bi-invariante, la distance de Hofer. Soient  $\psi, \varphi \in \text{Ham}_c(M, \omega)$ . Soit  $H \in \mathcal{C}_c([0, 1] \times M, \mathbb{R})$  un chemin hamiltonien de  $\psi$  à  $\varphi$ , et  $(\psi_t)_{t \in [0, 1]}$  la famille à 1 paramètre d'haméomorphismes associée :

$$\begin{cases} \psi_0 = \psi \\ \psi_1 = \varphi \\ \frac{d\psi_t}{dt} = X_t \circ \psi_t \end{cases} \quad \text{avec } i(X_t)\omega = dH_t.$$

Le coût d'un tel chemin est défini comme étant  $\mathcal{L}((\psi_t)) = \int_0^1 \text{Var}(H_t) dt$ , où  $\text{Var}(H_t) = \max H_t - \min H_t$ . On pose alors  $d(\psi, \varphi) := \inf_{H: \psi \rightarrow \varphi} \mathcal{L}(H)$ .

Il est non trivial que  $d$  est une distance; en particulier, de le fait  $d(\psi, \varphi) = 0 \Rightarrow \psi = \varphi$  est essentiellement équivalent au non-squeezing theorem de Gromov.

## 4 Introduction aux variétés de contact (25 février, Frédéric Bourgeois)

### 4.1 Variétés de contact

Dans ce qui suit,  $M$  est une variété de dimension impaire  $2n + 1$ .

**Définition 4.1** (Structure de contact).

Une structure de contact  $\xi$  sur  $M$  est une champ d'hyperplans maximale non intégrable, c'est-à-dire tel que si  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$  localement pour une 1-forme  $\alpha$ , alors  $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0$  partout.

D'après le théorème de Frobenius, étant donné un champ d'hyperplan  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$ , ce champ est intégrable si et seulement si  $\alpha \wedge d\alpha = 0$ , d'où le vocabulaire de champ maximale non intégrable.

**Remarque 4.2.** Un champ d'hyperplans  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$  est de contact si et seulement si  $d\alpha|_{\xi}$  est non dégénérée, c'est-à-dire une forme symplectique.

L'objet d'étude sera ici le champ  $\xi$ , et non la forme  $\alpha$  (qui ne sera donc définie qu'à facteur multiplicatif près).

**Exemple 4.3.**

Dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  avec les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ , on pose :

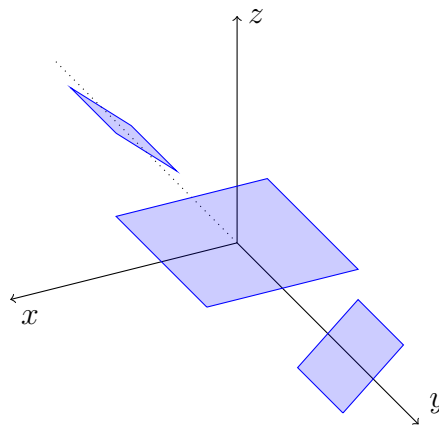
$$\alpha := dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

Alors  $\xi_{\text{std}} := \text{Ker}(\alpha)$  est une structure de contact. En effet,  $d\alpha = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ , d'où

$$(d\alpha)^{\wedge n} = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n,$$

et :

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} = dz \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n \neq 0.$$



La structure de contact standard sur  $\mathbb{R}^3$ .

## 4.2 Théorèmes de Darboux et de Gray

**Théorème 4.4** (Darboux).

Toute variété de contact de dimension  $2n + 1$  est localement difféomorphe à  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{std}})$ .

**Définition 4.5** (Champ de Reeb).

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact, et soit  $\alpha$  une forme de contact pour  $\xi$ . Le champ de Reeb  $R_\alpha$  associé à  $\alpha$  est défini par :

$$\begin{cases} i(R_\alpha)d\alpha = 0 \\ \alpha(R_\alpha) = 1 \end{cases} .$$

**Proposition 4.6.**

Le flot d'un champ de Reeb  $R_\alpha$  préserve la forme différentielle associée  $\alpha$ .

*Démonstration.*

Par un calcul direct :

$$\mathcal{L}_{R_\alpha}\alpha = (i(R_\alpha)d + di(R_\alpha))\alpha = i(R_\alpha)d\alpha + d(\alpha(R_\alpha)) = 0 + d(1) = 0. \quad \square$$

**Théorème 4.7** (Gray).

Soit  $M$  une variété différentielle fermée de dimension impaire. Soit  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin lisse de structures de contact sur  $M$ .

Alors il existe une famille à 1 paramètre lisse de difféomorphismes  $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$  de  $M$  telle que  $D\psi_t(\xi_0) = \xi_t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

*Démonstration.*

On se donne une famille de 1-formes  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  telle que  $\xi_t = \text{Ker}(\alpha_t)$  pour tout  $t$ . On cherche une famille de difféomorphismes  $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$  et une famille de fonctions lisses strictement positives  $(g_t)_{t \in [0,1]}$  telles que  $\psi_t^*\alpha_t = g_t\alpha_0$ . En dérivant cette relation par rapport à  $t$ , on obtient  $\frac{d(\psi_t^*\alpha_t)}{dt} = \frac{d(g_t\alpha_t)}{dt}$ . Or on peut écrire  $\frac{d\psi_t}{dt} = X_t \circ \psi_t$ , d'où

$$\psi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t + \dot{\alpha}_t) = \dot{g}_t\alpha_0 = \frac{\dot{g}_t}{g_t}\psi_t^*\alpha_t = \psi_t^*(f_t\alpha_t),$$

avec  $f_t = (\text{Ln}(\dot{g}_t)) \circ \psi_t$ . On obtient donc  $\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t + \dot{\alpha}_t = f_t\alpha_t$ . De plus, d'après la formule de Cartan,  $\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t = i(X_t)d\alpha_t + d\alpha_t(X_t)$ .

On cherche  $X_t$  tel que  $X_t \in \xi_t$ . Cela implique  $d\alpha_t(X_t) = 0$ , et donc :

$$i(X_t)d\alpha_t = f_t\alpha_t - \dot{\alpha}_t.$$

Écrivons  $TM = \xi_t \oplus \mathbb{R}R_{\alpha_t}$ . On obtient alors le système

$$\begin{cases} i(X_t)d\alpha_t|_{\xi_t} = \dot{\alpha}_t|_{\xi_t} \\ 0 = f_t - \dot{\alpha}_t(R_{\alpha_t}) \end{cases} .$$

La non-dénégérescence de  $d\alpha_t|_{\xi_t}$  permet de trouver un champ  $X_t$  qui convient ; on obtient de plus la fonction  $f_t$  associée.

Finalement, comme  $M$  est fermée, on peut intégrer  $(X_t)_{t \in [0,1]}$  et de là trouver  $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$  ainsi que  $g_t = e^{\int_0^t \dot{\alpha}_t(R_{\alpha_t}) \circ \psi_s^{-1} ds}$ . □

### 4.3 Contactomorphismes

**Définition 4.8** (Contactomorphismes).

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact. Un contactomorphisme de  $(M, \xi)$  est un difféomorphisme  $\psi$  de  $M$  tel que  $D\psi(\xi) = \xi$ .

On note  $\text{Cont}(M, \xi)$  le groupe des contactomorphismes de  $(M, \xi)$ , et  $\text{Cont}_0(M, \xi)$  sa composante neutre.

**Remarque 4.9.**

On ne demande pas que  $\psi^*\alpha = \alpha$  avec  $\alpha$  une 1-forme telle que  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$ . Les contactomorphismes vérifiant cette propriété plus forte sont dits de type restreint.

L'algèbre de Lie de  $\text{Cont}(M, \xi)$  est l'espace des champs de vecteurs  $X$  tels que  $\mathcal{L}_X\alpha = f\alpha$  pour une 1-forme fermée  $\alpha$  telle que  $\text{Ker}(\alpha) = \xi$  et une fonction lisse  $f$ .

**Proposition 4.10.**

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact. Soit  $\alpha$  une 1-forme telle que  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$ . Il existe alors une correspondance bijective entre les champs de vecteurs sur  $M$  laissant  $\xi$  invariant, et  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ . Cette correspondance est donnée par :

$$X \mapsto H = \alpha(X) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$$

d'une part, et :

$$H \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto X_H \text{ tel que } \alpha(X_H) = H \text{ et } i(X_H)d\alpha = dH(R_\alpha)\alpha - dH$$

d'autre part.

**Exemple 4.11.**

Si  $H = 0$ , alors  $X_H = 0$ .

Si  $H = 1$ , alors  $X_H = R_\alpha$ .

En particulier, tous les éléments de  $\text{Cont}_0(M, \xi)$  sont hamiltoniens !

### 4.4 Liens entre géométrie de contact et géométrie symplectique

Afin de se donner une intuition physique, on peut faire le lien entre géométrie de contact et optique. On dispose en effet du dictionnaire suivant :

géométrie de contact	optique géométrique
choix de $\alpha$	indice de réfraction
trajectoires de $R_\alpha$	rayons lumineux

Il existe aussi des liens très forts entre géométrie de contact et géométrie symplectique.

#### 4.4.1 De la géométrie symplectique à la géométrie de contact

**Définition 4.12** (Hypersurfaces de type contact).

Soit  $(N, \omega)$  une variété symplectique de dimension paire  $2(n+1)$ . Une hypersurface  $M \subset N$  est dite de type contact s'il existe un champ de vecteurs  $Y$  sur  $N$  tel que :

- $\mathcal{L}_Y\omega = \omega$ , ou en d'autres termes,  $\omega$  est dilatée exponentiellement le long du flot de  $Y$  ;
- $Y$  est transverse à  $M$ .

Si  $M \subset N$  est de type contact, alors  $\alpha := i(Y)\omega|_{TM}$  est une forme de contact sur  $M$ . En effet,  $\omega^{\wedge(n+1)} \neq 0$ , donc  $i(Y)\omega|_{TM}^{\wedge(n+1)} \neq 0$  par transversalité de  $Y$ . Or :

$$\omega = \mathcal{L}_Y \omega = i(Y)d\omega + d(i(Y)\omega) = d\alpha,$$

donc  $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0$ .

**Exemple 4.13.**

Prenons  $(N, \omega) = (\mathbb{R}^{2(n+1)}, \omega_{\text{std}})$ , avec  $\omega_{\text{std}} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ .

Prenon  $M := \mathbb{S}_{2n+1}$ , la sphère unité de  $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ . Alors  $M$  est de type contact pour le champ :

$$Y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

La forme de contact associée est  $\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i)$ , la forme de contact standard sur  $\mathbb{S}_{2n+1}$ .

#### 4.4.2 De la géométrie de contact à la géométrie symplectique

**Définition 4.14** (Symplectisation).

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact de dimension  $2n + 1$ . Supposons qu'il existe une 1-forme  $\alpha$  telle que  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$ . La symplectisation de  $(M, \xi)$  est la variété  $N := M \times \mathbb{R}$ , munie de la 2-forme  $\omega := d(e^t \alpha)$ .

La forme  $\omega$  est bien symplectique. D'une part, elle est fermée ; d'autre part,  $\omega = e^t(dt \wedge \alpha + d\alpha)$ , d'où  $\omega^{\wedge(n+1)} = e^{(n+1)t} dt \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0$ .

Cette opération est un inverse de la précédente. Si  $N = M \times \mathbb{R}$  est la symplectisation de  $(M, \xi)$ , alors  $M \times \{0\}$  est de contact dans  $N$  pour le champ de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial t}$ , et la 1-forme de contact associée est  $\alpha$ .

### 4.5 Quelques objets et résultats de géométrie de contact

**Conjecture 4.15** (Weinstein).

Pour toute variété de contact  $(M, \xi)$  compacte et toute forme de contact  $\alpha$  pour  $\xi$ , le champ de Reeb associé  $R_\alpha$  a au moins une orbite périodique.

**Définition 4.16** (Ordre partiel sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ ).

Soient  $(M, \xi)$  une variété de contact, et  $\left[ (\psi_t)_{t \in [0,1]} \right]_{\psi_0 = \text{id}} \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ . On dit que  $\left[ (\psi_t)_{t \in [0,1]} \right]_{\psi_0 = \text{id}} \geq \text{id}$  si  $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$  est représentable par un hamiltonien positif.

La relation  $\geq$  ainsi définie est réflexive et transitive, mais pas nécessairement symétrique : il existe parfois des lacets contractiles dans  $\text{Cont}_0(M, \xi)$  représentés par des hamiltoniens strictement positifs. On peut donc se demander pour quelles variétés de contact  $(M, \xi)$  la relation ainsi définie est bien un ordre partiel.

**Exemple 4.17.**

$(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{std}})$  est ordonnable, mais pas  $(\mathbb{S}_{2n+1}, \xi_{\text{std}})$ .

**Définition 4.18** (Métrique discriminante sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ ).

Soient  $(M, \xi)$  une variété de contact, et  $\psi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$ . Soit  $\alpha$  une 1-forme engendrant la structure de contact  $\xi$ . Soit  $g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$  telle que  $\psi^*\alpha = e^g\alpha$ . On définit alors le graphe de  $\psi$  par :

$$\text{Gr}(\psi) := \{(x, \psi(x), g(x)) : x \in M\} \subset M \times M \times \mathbb{R}.$$

On définit alors une distance sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  par :

$$d\left(\left[\begin{array}{c} (\psi_t)_{t \in [0,1]} \\ \psi_0 = \text{id} \end{array}\right], \text{id}\right) := \min \{N \geq 0 \mid \exists 0 = t_0 < \dots < t_N = 1, (\psi_t)_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \text{ a un graphe plongé } \forall i\}.$$

Cette distance s'étend en une distance bi-invariante sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ .

On peut s'intéresser aux propriétés géométriques du groupe  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  muni de cette métrique.

**Exemple 4.19.**

Munis de la métrique discriminante,  $\widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{std}})$  et  $\widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{S}_{2n+1}, \xi_{\text{std}})$  sont bornés, mais  $\widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{S}_1, \xi_{\text{std}})$  et  $\widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{P}_{2n+1}(\mathbb{R}), \xi_{\text{std}})$  ne sont pas bornés.

## 5 Quasi-isométries (11 mars, Jean Lécureux)

### 5.1 Distance des mots

**Définition 5.1** (Distance des mots).

Soit  $G$  un groupe et  $S \subset G$ . La distance des mots sur  $G$  par rapport à  $S$  est :

$$d_S(x, y) := \inf\{r \geq 0 : \exists s_1, \dots, s_r \in S \cup S^{-1}, x^{-1}y = s_1 \dots s_r\}.$$

Si  $G = \langle S \rangle$ , alors  $d_S$  est bien une distance sur  $G$ .

On supposera par la suite que  $S$  engendre  $G$ .

On peut aussi regarder le graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, S)$ . C'est le graphe dont les sommets sont les éléments de  $G$ , et pour lequel on met une arête entre  $x$  et  $xs$  pour  $s \in S \cup S^{-1}$ .

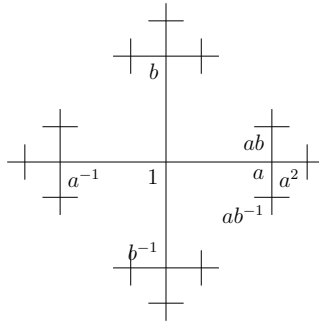
**Remarque 5.2.**

La distance  $d_S$  coïncide avec la distance de graphe sur  $\text{Cay}(G, S)$ .

$G$  agit par multiplication à gauche sur  $G$ . Cette action induit une action de  $G$  sur  $(G, d_S)$  par isométries, et de  $G$  sur  $\text{Cay}(G, S)$  par automorphismes de graphes.

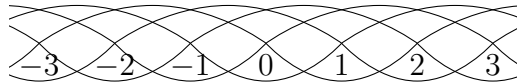
**Exemple 5.3.**

- $G = F_2 = \langle a, b \rangle$  et  $S = \{a, b\}$  :



Graphe de Cayley de  $(F_2, \{a, b\})$ .

- $G = \mathbb{Z}$  et  $S = \{2, 3\}$  :



Graphe de Cayley de  $(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ .

### 5.2 Quasi-isométries

**Définition 5.4** (Quasi-isométries).

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques.

Une application  $f : X \rightarrow Y$  est une plongement quasi-isométriques (QI) s'il existe  $C \geq 0$  et  $\lambda \geq 1$  tels que, pour tous  $x, y \in X$ ,

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, y) - C \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + C.$$

Une application  $f : X \rightarrow Y$  est une quasi-isométrie (“bilipschitzienne à grande échelle”) si  $f$  est un plongement quasi-isométrique, et s’il existe  $D \geq 0$  tel que, pour tout  $y \in Y$ , il existe  $x \in X$  vérifiant :

$$d_Y(f(x), y) \leq D.$$

**Proposition 5.5.**

Un plongement quasi-isométrique  $f : X \rightarrow Y$  est une quasi-isométrie si et seulement si  $f$  admet un quasi-inverse, c’est-à-dire s’il existe un plongement quasi-isométriques  $g : Y \rightarrow X$  et une constante  $D \geq 0$  tels que :

$$\begin{aligned} d_X(x, g \circ f(x)) &\leq D \quad \forall x \in X, \\ d_Y(y, f \circ g(y)) &\leq D \quad \forall y \in Y. \end{aligned}$$

**Exemple 5.6.**

- Si  $(X, d_X)$  est de diamètre fini, alors  $X$  est quasi-isométrique à un point.
- $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$  est une quasi-isométrie.
- $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  est un plongement quasi-isométrique.

**Proposition 5.7.**

Soit  $G$  un groupe, et  $S, S'$  deux parties génératrices finies de  $G$ . Alors  $(G, d_S)$  et  $(G, d_{S'})$  sont quasi-isométriques.

*Démonstration.*

On va montrer que  $\text{id} : (G, d_S) \rightarrow (G, d_{S'})$  est bilipschitzienne. Soit :

$$\lambda := \max_{\substack{s \in S \cup S^{-1} \\ s' \in S' \cup S'^{-1}}} \{d_S(1, s'), d_{S'}(1, s)\}.$$

Soient  $x, y \in G$ . Posons  $r := d_S(x, y)$ . On peut écrire  $x^{-1}y = s_1 \dots s_r$  avec  $s_1, \dots, s_r \in S \cup S^{-1}$ . Par conséquent,

$$d_{S'}(x, y) = d_{S'}(1, x^{-1}y) \leq \sum_{k=1}^r d_{S'}(s_1 \dots s_{k-1}, s_1 \dots s_k) = \sum_{k=1}^r d_{S'}(1, s_k) \leq \lambda r,$$

donc  $d_{S'}(x, y) \leq \lambda d_S(x, y)$ . L’inégalité réciproque se déduit de la même façon. □

### 5.3 Distortion

**Définition 5.8** (Distortion).

Soit  $G$  un groupe de type fini, et  $H < G$  un sous-groupe de type fini. on dit que  $H < G$  est distordu si l’inclusion  $H \hookrightarrow G$  n’est pas un plongement quasi-isométrique.

On a toujours  $d_G \leq \lambda d_H$  pour une certaine constante  $\lambda$ . Le problème vient de l’autre inégalité. Prenons par exemple  $H = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . On a  $d_G(t^n, t^m) = d_G(1, t^{m-n}) =: \ell(m - n)$ . L’inclusion  $H \hookrightarrow G$  est un plongement quasi-isométrique si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} \ell(n) > 0$  (remarquons que la limite existe par sous-additivité), donc  $H$  est distordu si et seulement si  $\ell(n) = o(n)$ .

**Exemple 5.9.**

Soit :

$$G := \mathbb{H}_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$



On a  $G = \langle A, B \rangle$  avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prenons :

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ABA^{-1}B^{-1},$$

et  $H := \langle C \rangle$ . Alors  $C^{k^2} = A^k B^k A^{-k} B^{-k}$ , donc  $\ell(k^2) \leq 4k$ . Donc  $H < \mathbb{H}_3(\mathbb{Z})$  est distordu.

## 5.4 Lemme de Milnor-Švarc

**Théorème 5.10** (Lemme de Milnor-Švarc).

Soit  $X$  un espace géodésique propre. Soit  $G$  un groupe agissant sur  $X$  proprement discontinûment par isométries, avec un quotient compact. Alors  $G$  est de type fini, et, pour tout  $x_0 \in X$ , l'application  $g \mapsto g \cdot x_0$  est une quasi-isométrie de  $G$  dans  $X$ .

**Exemple 5.11.**

Soit  $\Sigma$  une surface compacte de genre  $g \geq 2$ . Alors  $G := \pi_1(\Sigma)$  agit sur le disque de Poincaré  $\mathbb{D}_2$ . Cette action vérifie les hypothèses du lemme de Milnor-Švarc.

*Démonstration.*

Soit  $R > 0$  tel que  $G \cdot B(x_0, R) = X$ . Posons  $B := B(x_0, R)$ . Soit  $S := \{g \in G : g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ .

L'ensemble  $S$  est fini; soit  $\lambda := \max_{s \in S} d(x_0, s \cdot x_0)$ . Alors  $d(x_0, g \cdot x_0) \leq \lambda d_S(1, g)$  pour tout  $g \in G$ .

Maintenant, nous allons minorer  $d$  à l'aide de  $d_S$ . Soit  $r := \inf\{d(B, g \cdot B) \mid g \in G \setminus S\}$ . L'action étant propre et l'espace  $X$  étant propre, on a  $r > 0$ .

Soit  $\gamma$  une géodésique de  $x_0$  à  $g \cdot x_0$ . Soient  $x_1, \dots, x_k = g \cdot x_0 \in \gamma$  tels que  $d(x_i, x_{i+1}) \leq r$  pour tout  $i \geq 0$ , avec  $k \leq r^{-1}d(x_0, g \cdot x_0) + 1$ .

Pour tout  $i$ , il existe  $g_i$  tel que  $g_i \cdot x_i \in B$ . Alors  $d(g_i g_{i+1}^{-1} B, B) = d(g_i^{-1} B, g_{i+1}^{-1} B) < r$ . Par définition de  $r$ , on a donc  $g_i g_{i+1}^{-1} \in S$ , et de là  $d_S(1, g) \leq k \leq r^{-1}d(x_0, g \cdot x_0) + 1$ .  $\square$

## 6 Groupe de Heisenberg et géométrie de Carnot-Carathéodory (18 mars, Patrick Massot)

### 6.1 Groupe de Heisenberg

Soit  $(V, \omega)$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel symplectique. On construit un groupe de Lie  $\mathbb{H}_\omega$ , avec pour ensemble sous-jacent  $V \times \mathbb{R}$  et muni de la loi :

$$(u, s) \cdot (v, t) := (u + v, s + t + \omega(u, v)).$$

Le groupe  $\mathbb{H}_\omega$  est une extension centrale de  $V$  par  $\mathbb{R}$  :

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_\omega \rightarrow V \rightarrow 0.$$

On définit sur  $\mathbb{H}_\omega$  un champ d'hyperplans invariant à gauche  $\xi$ , en posant  $\xi_{(0,0)} = V \times \{0\}$ . Alors  $\xi$  est une structure de contact. En effet,  $\omega$  donne une 2-forme symplectique sur  $V$  ; il s'ensuit :

#### Proposition 6.1.

Il existe une unique 1-forme  $\lambda \in \Omega^1(V)$  telle que :

- $d\lambda = \omega$  ;
- $\varphi^*\lambda = \lambda$  pour tout  $\varphi \in \text{Symp}(V, \omega)$ .

*Démonstration.*

Soit  $X_x := x$  ; on pose  $\lambda := \frac{1}{2} \cdot i(X)\omega$ . On se place dans des coordonnées standard  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  avec pour base correspondante  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^* = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i, \\ X &= \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right), \\ \lambda &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i). \end{aligned}$$

On obtient bien  $d\lambda = \omega$ .

L'invariance par  $\text{Symp}(V, \omega)$  et l'unicité sont laissées en exercice. □

Alors  $\xi = \text{Ker}(2\lambda + dt)$  en coordonnées standard. Par exemple, si  $\dim(V) = 2$ , on a  $\xi = \text{Ker}(r^2 d\theta + dt)$ . Le groupe de Heisenberg défini au cours de l'exposé précédent est l'ensemble des points à coordonnées entières de  $\mathbb{H}_\omega$  pour  $\omega = \omega_{\text{std}}$ . Par ce qui précède,  $Z(\mathbb{H}_\omega(\mathbb{Z})) = \{(0, n) : n \in \mathbb{Z}\}$  est distordu dans  $\mathbb{H}_\omega(\mathbb{Z})$ .

### 6.2 Géométrie de Carnot-Carathéodory

**Définition 6.2** (Distance de Carnot-Carathéodory).

On munit  $V$  d'une norme euclidienne. Cette norme induit une norme  $\|\cdot\|$  sur  $V \times 0 = \xi_{(0,0)}$ , que l'on étend en une famille de normes invariantes à gauches  $\|\cdot\|_x$  sur le champ d'hyperplans  $\xi$ . On définit alors sur  $\mathbb{H}_\omega$  la distance de Carnot-Carathéodory :

$$d(x, y) := \inf \{ L(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{H}_\omega), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \dot{\gamma}(t) \in \xi_{\gamma(t)} \forall t \in [0, 1] \},$$

où  $L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt$ .

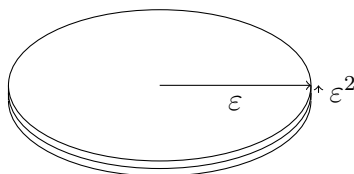
Les distances de Carnot-Carathéodory sont invariantes à gauche sur  $\mathbb{H}_\omega$ .

**Définition 6.3** (Dilatations de Heisenberg).

Pour  $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ , on définit la dilatation de Heisenberg de rapport  $\kappa$  par :

$$\delta_\kappa : \begin{cases} \mathbb{H}_\omega & \rightarrow \mathbb{H}_\omega \\ (u, s) & \mapsto (\kappa u, \kappa^2 s) \end{cases} .$$

L'application  $\delta_\kappa$  est un automorphisme de groupe tel que  $\delta_\kappa^*(2\lambda + dt) = \kappa(2\lambda + dt)$ . De plus,  $\delta_\kappa^*d = \kappa d$ , et la fonction  $d(0, \cdot)$  distance à 0 est bilipschitz-équivalente à toute autre distance à 0 se comportant de même sous  $\delta_\kappa$ , par exemple  $\|(u, t)\| = \|u\| + \sqrt{|t|}$ . La démonstration est similaire à la démonstration de l'équivalence des normes en algèbre linéaire de dimension finie. En particulier,  $d$  n'est pas bilipschitz-équivalente à une norme usuelle sur  $V \times \mathbb{R}$ .



Boule de rayon  $\varepsilon \ll 1$  pour  $\|(u, t)\| = \max\{\|u\|, \sqrt{|t|}\}$ .

En particulier,  $\dim_H(\mathbb{H}_\omega) = \dim(V) + 2$  : pour recouvrir une boule de rayon 1 par des boules de rayon  $\varepsilon$ , il faut  $\simeq \varepsilon^{-(\dim(V \times \mathbb{R})+1)}$  petites boules.

**6.3 Distortion**

L'espace  $(\mathbb{H}_\omega, d)$  est géodésique et propre, et  $\mathbb{H}_\omega(\mathbb{Z})$  est discret cocompact dans  $\mathbb{H}_\omega$ . De plus,  $\mathbb{H}_\omega$ , et donc  $\mathbb{H}_\omega(\mathbb{Z})$ , agit isométriquement sur  $\mathbb{H}_\omega$  par translations à gauche. Par le lemme de Milnor-Švarc, la distance des mots sur  $\mathbb{H}_\omega(\mathbb{Z})$  est quasi-isométrique à  $d$ . La forme des dilatations de Heisenberg explique alors la distortion de  $Z(\mathbb{H}_\omega(\mathbb{Z}))$  dans  $\mathbb{H}_\omega(\mathbb{Z})$ .

Remarquons au passage que la distance  $d$  se souvient du champ d'hyperplans  $\xi$  :

**Proposition 6.4.**

Soit  $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{H}_\omega)$ . Alors  $\varphi$  est localement bilipschitzien pour une distance de Carnot-Carathéodory si et seulement si  $\varphi^*\xi = \xi$ .

*Démonstration.*

Supposons que  $\varphi^*\xi \neq \xi$ . Alors il existe  $\gamma \in \mathcal{C}^1((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{H}_\omega)$  telle que  $\dot{\gamma}(t) \in \xi_{\gamma(t)}$  et  $(\varphi \circ \gamma)(t) \notin \xi_{\gamma(t)}$  pour tout  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Alors  $\dim_H(\gamma((-\varepsilon, \varepsilon))) = 1$  et  $\dim_H((\varphi \circ \gamma)((-\varepsilon, \varepsilon))) = 2$ , donc  $\varphi$  n'est pas bilipschitzien.

La réciproque vient du fait que si  $\varphi^*\xi = \xi$ , alors la composition par  $\varphi$  envoie l'ensemble

$$\{\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{H}_\omega), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \dot{\gamma}(t) \in \xi_{\gamma(t)} \forall t \in [0, 1]\}$$

sur l'ensemble

$$\{\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{H}_\omega), \gamma(0) = \varphi(x), \gamma(1) = \varphi(y), \dot{\gamma}(t) \in \xi_{\gamma(t)} \forall t \in [0, 1]\}. \quad \square$$

## 7 Géométrie à grande échelle d'un groupe topologique (25 mars, Camille Horbez)

Cette exposé suivra l'ouvrage de C. Rosendal, *Coarse geometry of topological groups* [12], chapitre 2.

**Définition 7.1** (Groupe polonais).

*Un groupe polonais est un groupe topologique séparable et complètement métrisable.*

**Exemple 7.2.**

- Les groupes dénombrables discrets.
- Les groupes localement compacts à base dénombrable d'ouverts.
- $\text{Homeo}(M)$  et  $\text{Diff}^k(M)$ , où  $M$  est une variété compacte.
- Les espaces de banach séparables.

Dans ce qui suit, tous les groupes sont supposés polonais. Le but de cet exposé est le suivant :

- Un sous ensemble  $A \subset G$  est dit *relativement (OB)* si  $\text{Diam}_d(A) < +\infty$  pour toute pseudo-distance continue invariante à gauche (PDCIG).
- On va montrer que si  $G$  est engendré par un sous-ensemble  $A$  relativement (OB), alors :
  - il existe une PDCIG  $d$  et un réel  $R > 0$  tels que  $V := B(e, R)$  engendre  $G$  ;
  - il existe une telle PDCIG quasi-isométrique à la distance des mots pour  $V$ , et elle est maximale parmi les PDCIG.

### 7.1 Un lemme de métrisation

**Lemme 7.3** (Birkhoff, Kakutani).

*Soit  $G$  un groupe topologique. Soit  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite croissante de voisinages ouverts symétriques de  $e$  tels que :*

- $G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$  ;
- $V_n^3 \subset V_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Pour tous  $g, h \in G$ , posons :*

- $\delta(g, h) := 2^{\inf\{n \mid g^{-1}h \in V_n\}}$  ;
- $d(g, h) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \delta(g_k, g_{k+1}) \mid g_0 = g, g_n = h \right\}$ .

*Alors  $d$  est une PDCIG, et, pour tous  $g, h \in G$  :*

$$\frac{1}{2}\delta(g, h) \leq d(g, h) \leq \delta(g, h).$$

Remarquons de plus que si  $G$  agit par isométries sur un espace métrique  $(X, \delta)$ , pour tout  $x \in X$ , une PDCIG est donnée par :

$$d(g, h) = \delta(g \cdot x, h \cdot x).$$

### 7.2 Sous-ensembles relativement (OB)

**Théorème 7.4.**

*Soient  $G$  un groupe polonais et  $A \subset G$ . Il y a équivalence entre :*

1. *L'ensemble  $A$  est relativement (OB) : pour toute PDCIG  $d$  sur  $G$ , on a  $\text{Diam}_d(A) < +\infty$ .*
2. *Pour toute action continue de  $G$  sur un espace métrique  $(X, d)$  par isométries, pour tout  $x \in X$ , on a  $\text{Diam}_\delta(A \cdot x) < +\infty$ .*

3. Pour toute suite croissante  $(V_n)_{n \geq 0}$  de voisinages ouverts symétriques de  $e$  telle que  $G = \bigcup_{n \geq 0} V_n$  et  $V_n^2 \subset V_{n+1}$  pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $n \geq 0$  tel que  $A \subset V_n$ .
4. Pour tout voisinage ouvert symétrique  $V$  de  $e$ , il existe  $F \subset G$  fini et  $n \geq 0$  tels que  $A \subset (FV)^n$ .

*Démonstration.*

1  $\Rightarrow$  2 : Supposons que  $G$  agisse continûment sur un espace métrique  $(X, d)$  par isométries. Soit  $x \in X$ . Alors  $d(g, h) := \delta(g \cdot x, h \cdot x)$  est une PDCIG sur  $G$ , donc  $\text{Diam}_d(A) < +\infty$ . Or  $\text{Diam}_d(A) = \text{Diam}_\delta(A \cdot x)$ .

2  $\Rightarrow$  1 : Choisissons pour  $(X, \delta)$  l'espace métrique associé à la PDCIG  $d$ .

1  $\Rightarrow$  3 : Soit  $(V_n)_{n \geq 0}$  une suite de voisinages ouverts satisfaisant les hypothèses du 3.

Posons  $W_n := V_{2(n+1)}$ . Alors  $W_n^3 \subset W_{n+1}$  pour tout  $n \geq 0$ , et  $G = \bigcup_{n \geq 0} W_n$ . Complétons cette famille en  $(W_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Le lemme de métrisation précédent fournit une PDCIG  $d$ .

Par hypothèse, il existe  $R > 0$  tel que  $A \subset B(e, R)$ , donc il existe  $n \geq 0$  tel que  $A \subset V_n$ .

3  $\Rightarrow$  1 : On pose  $V_n := B_d(e, 2^n)$ .

3  $\Rightarrow$  4 : Soit  $V$  un voisinage symétrique de  $e$ . Comme  $G$  est polonais, il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  dense dans  $G$ , de telle sorte que  $G = \langle V \cup \{x_k : k \geq 0\} \rangle$ .

Posons  $V_n := (V \cup \{x_k^{\pm 1} : 0 \leq k < n\})^{2^n}$ . Alors  $(V_n)_{n \geq 0}$  satisfait les hypothèses du 3. Il existe donc  $m \geq 0$  tel que  $A \subset V_m$ . On pose alors  $F = \{e\} \cup \{x_k^{\pm 1} : 0 \leq k < m\}$  et  $n = 2^m$ .

4  $\Rightarrow$  3 : Soit  $(V_n)_{n \geq 0}$  une suite de voisinages ouverts comme dans le 3. Alors  $A \subset (FV_1)^n$  pour un certain ensemble fini  $F$  et un  $n \geq 0$ . Soit  $m \geq 0$  tel que  $F \subset V_m$ . Alors  $A \subset (V_m V_1)^n \subset V_{m + \lceil \ln_2(n) \rceil + 1}$ .  $\square$

### Corollaire 7.5.

Soit  $G$  un groupe polonais et  $A \subset G$ . Si  $\bar{A}$  est compact, alors  $A$  est relativement (OB).

Si de plus  $G$  est localement compact, alors ces deux propriétés sont équivalentes.

*Démonstration.*

Supposons  $\bar{A}$  compact. Soit  $V$  un voisinage ouvert de  $e$ . L'ensemble  $\bar{A}$  est recouvert par un nombre fini de translatés de  $V$ . Donc  $A \subset FV$  avec  $F$  fini.

Supposons  $G$  localement compact et  $A$  relativement (OB). Soit  $V$  un voisinage ouvert relativement compact de  $e$ . Alors il existe un ensemble fini  $F$  et un entier  $k$  tels que  $A \subset (FV)^k \subset (F\bar{V})^k$ . Or  $(F\bar{V})^k$  est compact, donc  $\bar{A}$  aussi.  $\square$

## 7.3 Groupes engendrés par une partie relativement (OB)

### Théorème 7.6.

Soit  $G$  un groupe polonais engendré par une partie  $A$  relativement (OB). Alors il existe une PDCIG  $d$  sur  $G$  telle que :

- Pour tout  $A' \subset G$ , la partie  $A'$  est relativement (OB) si et seulement si  $\text{Diam}_d(A') < +\infty$  ;
- Il existe  $R > 0$  tel que  $B(e, R)$  engendre  $G$ .

*Démonstration.*

La partie  $A$  engendre  $G$ , donc  $G = \bigcup_{n \geq 0} \bar{A}^n$ .

Par le théorème de Baire, il existe  $n \geq 0$  tel que  $\bar{A}^n$  contienne un ouvert, qui est alors relativement (OB). Donc  $e$  admet un voisinage ouvert relativement (OB).

Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  dense dans  $G$ , de telle sorte que  $G = \langle V \cup \{x_k : k \geq 0\} \rangle$ . Posons  $V_n := (V \cup \{x_k^{\pm 1} : 0 \leq k < n\})^{3^n}$ . Alors  $G = \bigcup_{n \geq 0} V_n$  et  $V_n^3 \subset V_{n+1}$ . On complète  $(V_n)_{n \geq 0}$  en  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Par le lemme de métrisation, on obtient une PDCIG  $d$  sur  $G$ .

Soient  $A' \subset G$  et  $V$  un voisinage ouvert symétrique de  $e$ . Il y a alors équivalence entre :

- $A'$  est  $d$ -borné ;
- $A' \subset V_n$  pour un certain  $n \geq 0$  ;
- Il existe un ensemble fini  $F \subset G$  et un entier  $n \geq 0$  tels que  $A' \subset (FV)^n$  ;
- $A'$  est relativement (OB). □

## 7.4 Type de quasi-isométrie

### Théorème 7.7.

Soit  $G$  un groupe polonais engendré par un voisinage ouvert  $V$  de  $e$  relativement (OB). Alors il existe une PDCIG  $\delta$  sur  $G$  telle que, pour toute PDCIG  $\delta'$  sur  $G$ , il existe  $\lambda \geq 1$  et  $C \geq 0$  tels que :

$$\delta' \leq \lambda\delta + C.$$

De plus,  $\delta$  est quasi-isométrique à la distance des mots  $d_V$  associée à  $V$ .

*Démonstration.*

Soit  $d$  une PDCIG donnée par le théorème précédent. Alors il existe  $R > 0$  tel que  $V \subset B_d(e, R)$ .

**Étape 1 :** construction d'une PDCIG  $\delta$  quasi-isométrique à  $d_V$ .

Pour  $g, h \in G$ , posons :

$$\delta(g, h) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^n d(e, v_k) : h = gv_1 \dots v_n, v_i \in V \right\}.$$

On a alors :

$$d(g, gv_1 \dots v_n) \leq \sum_{k=1}^n d(gv_1 \dots v_{k-1}, gv_1 \dots v_k) = \sum_{k=1}^n d(e, v_k),$$

et donc  $\delta$  est une PDCIG telle que  $d \leq \delta$ .

De plus,  $\delta \leq Rd$  par construction.

Enfin, soit  $r > 0$  tel que  $B_d(e, 2r) \subset V$ . Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  de longueur minimale telle que  $g = hv_1 \dots v_n$  et  $\sum_{k=1}^n d(e, v_k) \leq \delta(g, h) + 1$ .

Alors  $v_k v_{k+1} \notin V$  et  $d'e, v_k v_{k+1}) \leq d(e, v_k) + d(e, v_{k+1})$  pour tout  $k$ . On a donc toujours  $d(e, v_k) > r$  ou  $d(e, v_{k+1}) > r$ , et de là :

$$\frac{n-1}{2}r \leq \sum_{k=1}^n d(e, v_k) \leq \delta(g, h) + 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{r}{2}d_V - \left(\frac{r}{2} + 1\right) \leq \delta,$$

et  $\delta$  est quasi-isométrique à  $d_V$ .

**Étape 2 :** maximalité de  $\delta$ .

Soit  $\delta'$  une PDCIG sur  $G$ . Par continuité, il existe  $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  strictement croissante telle que  $\delta' \leq \Theta \circ \delta$ .

Soit  $g, h \in G$ . Soit  $g = x_0, x_1, \dots, x_n = h$  un chemin de  $g$  à  $h$  dans  $\text{Cay}(G, V)$ . Alors :

$$\delta'(g, h) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \delta'(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Theta(\delta(x_k, x_{k+1})).$$

Or  $\delta(x_k, x_{k+1}) \leq K$  pour une certaine constante  $K$ , car  $\delta$  et  $d_V$  sont quasi-isométriques. Par conséquent,

$$\delta'(g, h) \leq n\Theta(K) = \Theta(K)d_V(g, h). \quad \square$$

## 8 Type de quasi-isométrie de $\text{Homeo}_0(M)$ (1er avril, Jordan Emme)

Nous allons suivre ici [9, Chapitres 2.2 et 2.3]. Le but de cet exposé est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 8.1** (Mann, Rosendal). *Soit  $M$  une variété compacte. Le groupe  $\text{Homeo}_0(M)$  a un type de quasi-isométrie bien défini, donné par la distance de fragmentation par rapport à tout recouvrement fini de  $M$  par des boules ouvertes.*

### 8.1 Préliminaires

**Définition 8.2** (Propriété (OB) relative).

*Soit  $G$  un groupe topologique polonais. Une partie  $S \subset G$  est dite relativement (OB) si, pour toute pseudo-distance continue invariante à gauche (PDCIG)  $d$  sur  $G$ , on a  $\text{Diam}_d(S) < +\infty$ .*

À la séance précédente, Camille Horbez avait notamment exposé le résultat suivant.

**Proposition 8.3.**

*Soit  $G$  un groupe topologique polonais (séparable et complètement métrisable). Une partie  $A$  de  $G$  est relativement (OB) si, pour tout voisinage  $V$  de l'identité, il existe  $F \subset G$  finie et  $n \geq 0$  tels que  $A \subset (FV)^n$ .*

On munit  $\text{Homeo}(M)$  de la *topologie compacte-ouverte*. Étant données une variété compacte  $M$  et une distance  $d$  sur  $M$  engendrant sa topologie, la topologie compacte-ouverte sur  $\text{Homeo}(M)$  est induite par la distance  $d_\infty$ , définie par :

$$d_\infty(f, g) := \max_{x \in M} d(f(x), g(x)) \quad \forall f, g \in \text{Homeo}(M).$$

L'espace métrique  $(\text{Homeo}(M), d_\infty)$  est séparable et complet, donc  $\text{Homeo}(M)$  est polonais.

Pour tout homéomorphisme  $g \in \text{Homeo}(M)$ , on notera  $\text{Supp}(g) := \{g \neq \text{id}\}$ .

### 8.2 Parties génératrices de $\text{Homeo}_0(M)$

On va montrer dans cette partie la proposition suivante :

**Proposition 8.4.**

*Soit  $M$  une variété compacte. Le groupe  $\text{Homeo}_0(M)$  est engendré par une partie relativement (OB).*

Autrement dit,  $\text{Homeo}_0(M)$  a un type de quasi-isométrie bien défini, ce qui est la première partie du Théorème 7.6. La Proposition 8.4 repose sur le lemme de fragmentation, résultat de topologie très difficile et que nous admettrons.

**Lemme 8.5** (Lemme de fragmentation - Edwards, Kirby, 1971 [5]).

*Soit  $M$  une variété compacte et  $\{B_1, \dots, B_k\}$  un recouvrement fini de  $M$  par des boules ouvertes plongées. Alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de l'identité dans  $\text{Homeo}(M)$  tel que, pour tout  $g \in V$ , il existe  $g_1, \dots, g_k \in \text{Homeo}(M)$  tels que :*

- $g = g_1 \dots g_k$  ;
- $\text{Supp}(g_i) \subset B_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ .

*Démonstration de la Proposition 8.4.*

Fixons un recouvrement fini  $\{B_1, \dots, B_k\}$  de  $M$  par des boules ouvertes. Soit  $A$  un voisinage ouvert de l'identité fourni par le lemme de fragmentation. Le groupe  $\text{Homeo}_0(M)$  étant connexe,  $A$  en est une partie génératrice; on va montrer que  $A$  est relativement (OB).

Soit  $V \subset A$  un voisinage ouvert symétrique de l'identité. Soit  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\{f \in \text{Homeo}(M) \mid \text{Diam}(\text{Supp}(f)) \leq \varepsilon\} \subset V.$$

Pour tout  $0 \leq i \leq k$ , soit  $B'_i$  une boule ouverte de diamètre au plus  $\varepsilon$ , et soit  $f_i$  un homéomorphisme de  $M$  isotope à l'identité et tel que  $f_i(B_i) \subset B'_i$ . Soit  $g = g_1 \dots g_k \in A$  avec  $\text{Supp}(g_i) \subset B_i$ . Alors :

$$\text{Supp}(f_i g_i f_i^{-1}) = f_i(\text{Supp}(g_i)) \subset f_i(B_i) \subset B'_i.$$

Or  $\text{Diam}(B'_i) \leq \varepsilon$ , donc  $g_i \in f_i^{-1} V f_i$ . Finalement, on obtient :

$$g \in f_1^{-1} V f_1 f_2^{-1} V f_2 \dots f_k^{-1} V f_k \subset (FV)^{k+1},$$

où  $F = \{f_1^{-1}, f_k\} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \{f_i f_{i+1}^{-1}\}$  est fini. Donc, par la première proposition,  $A$  est relativement (OB).  $\square$

On peut montrer de plus que le type de quasi-isométrie d'un disque (le bord étant fixé) est trivial. Soit  $\mathbb{B}_n$  la boule unité fermée de dimension  $n$ .

**Lemme 8.6.**

*Le groupe  $\text{Homeo}_\partial(\mathbb{B}_n) = \{f \in \text{Homeo}(\mathbb{B}_n) \mid f|_{\partial\mathbb{B}_n} = \text{id}_{\mathbb{B}_n}\}$  est relativement (OB) dans lui-même.*

La démonstration repose sur une version quantitative de l'isotopie d'Alexander.

*Démonstration.*

Soit  $d$  la distance euclidienne sur  $\mathbb{B}_n$ . Soit  $V$  un voisinage ouvert de l'identité dans  $\text{Homeo}_\partial(\mathbb{B}_n)$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\overline{V}_\varepsilon \subset V$ , où  $V_\varepsilon = B_{d_\infty}(\text{id}, \varepsilon)$ . On veut montrer qu'il existe  $F \subset \text{Homeo}_\partial(\mathbb{B}_n)$  fini et  $k \geq 0$  tels que  $\text{Homeo}_\partial(\mathbb{B}_n) \subset (FV)^n$ .

Soit  $g \in \text{Homeo}_\partial(\mathbb{B}_n)$ . Définissons, pour tout  $t \in (0, 1]$  et  $x \in \mathbb{B}_n$ ,

$$g_t(x) := \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \in [t, 1], \\ t g(x/t) & \text{si } \|x\| \in [0, t]. \end{cases}$$

Posons  $g_0 := \text{id}$ . Alors  $g_1 = g$ , et  $(g_t)_{t \in [0, 1]}$  est une isotopie de l'identité à  $g$ .

Soit  $t_0 \in (0, 1)$  tel que  $g \in g_{t_0} V$ . Soit  $h \in V_\varepsilon$  telle que  $h(t_0 \mathbb{B}_n) \subset (1 - \varepsilon) \mathbb{B}_n$ . On a  $\text{Supp}(g_{t_0}) \subset t_0 \mathbb{B}_n$  par construction de l'isotopie d'Alexander, donc :

$$\text{Supp}(h g_{t_0} h^{-1}) = h(\text{Supp}(g_{t_0})) \subset h(t_0 \mathbb{B}_n) \subset (1 - \varepsilon) \mathbb{B}_n.$$

Soit  $f \in \text{Homeo}_\partial(\mathbb{B}_n)$  tel que  $f((1 - \varepsilon) \mathbb{B}_n) \subset (\varepsilon/2) \mathbb{B}_n$ . On a de même  $\text{Supp}(f h g_{t_0} h^{-1} f^{-1}) \subset (\varepsilon/2) \mathbb{B}_n$ . Par conséquent,  $d_\infty(f h g_{t_0} h^{-1} f^{-1}, \text{id}) \leq \varepsilon$ , donc  $f h g_{t_0} h^{-1} f^{-1} \in \overline{V}_\varepsilon$  et finalement :

$$g_{t_0} \in h^{-1} f^{-1} \overline{V}_\varepsilon f h \subset V f^{-1} V f V.$$

De plus,  $g \in g_{t_0} V$ , d'où  $g \in V f^{-1} V f V^2$ . En posant  $F = \{\text{id}, f, f^{-1}\}$ , on obtient  $g \in (FV)^4$ , et  $\text{Homeo}_\partial(\mathbb{B}_n) \subset (FV)^4$ .  $\square$



### 8.3 Distance de fragmentation

Il reste à démontrer que le type de quasi-isométrie de  $\text{Homeo}(M)$  est donné par la distance de fragmentation. Commençons par définir cette distance.

**Définition 8.7** (Distance de fragmentation).

Soit  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$  un recouvrement fini de  $M$  par des boules ouvertes. La norme de fragmentation  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  sur  $\text{Homeo}_0(M)$  est donnée par :

$$\|g\|_{\mathcal{B}} = \min\{n \geq 0 \mid \exists g_1, \dots, g_n \in \text{Homeo}_0(M), g = g_1 \dots g_n \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n, \exists k_i : \text{Supp}(g_i) \subset B_{k_i}\}.$$

On note  $d_{\mathcal{B}}$  la distance induite par la norme de fragmentation.

Pour terminer la démonstration du Théorème 7.6, nous allons montrer la proposition suivante.

**Proposition 8.8.**

Soit  $M$  une variété compacte. Soit  $V \subset \text{Homeo}_0(M)$  une partie génératrice ouverte relativement (OB). Soit  $\mathcal{B}$  un recouvrement fini de  $M$  par des boules ouvertes. Alors  $\text{id} : (\text{Homeo}_0(M), d_{\mathcal{B}}) \rightarrow (\text{Homeo}_0(M), d_V)$  est une quasi-isométrie.

*Démonstration.*

Quitte à restreindre  $V$ , on peut supposer que cet ouvert est donné par le lemme de fragmentation pour le recouvrement  $\mathcal{B}$ .

Soit  $f \in \text{Homeo}_0(M)$ . Soit  $m \geq 0$  tel que  $f \in V^m$ . Alors  $\|f\|_{\mathcal{B}} \leq km$ . Par conséquent,  $d_{\mathcal{B}} \leq kd_V$ .

Pour tout  $1 \leq i \leq k$ , posons  $G_i := \{g \in \text{Homeo}_0(M) \mid \text{Supp}(g) \subset B_i\}$ . Alors  $V \cap G_i$  est un voisinage de l'identité dans  $\text{Homeo}_{\partial}(B_i) \simeq \text{Homeo}_{\partial}(\mathbb{B}_n)$ . D'après le Lemme 8.6, il existe  $N_i \geq 0$  tel que  $G_i = (V \cap G_i)^{N_i} \subset V^{N_i}$ .

Posons  $N := \max_i N_i$ . Soit  $f \in \text{Homeo}_0(M)$ . Si  $\|f\|_{\mathcal{B}} = m$ , alors  $f \in V^{mN}$ . Par conséquent,  $d_V \leq Nd_{\mathcal{B}}$ .  $\square$

## 9 Exemples de géométries des groupes $\text{Homeo}_0(M)$ (8 avril, Anthony Genevois)

Soit  $M$  une variété compacte et  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$  un recouvrement fini de  $M$  par des boules ouvertes telles que les fermés  $\overline{B_i}$  soient des boules plongées. On rappelle que la *norme de fragmentation* sur  $\text{Homeo}_0(M)$  est donnée par :

$$\|g\|_{\mathcal{B}} = \min\{n \geq 0 \mid \exists g_1, \dots, g_n \in \text{Homeo}_0(M), g = g_1 \dots g_n \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n, \exists k_i : \text{Supp}(g_i) \subset B_{k_i}\}.$$

cette norme induit une distance  $d_{\mathcal{B}}$  sur  $\text{Homeo}_0(M)$ .

### 9.1 Groupes $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}_n)$

Commençons par déterminer le type de quasi-isométrie de  $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}_n)$ .

#### Proposition 9.1.

Pour tout  $n \geq 0$  et tout recouvrement  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{S}_n$ , l'espace  $(\text{Homeo}_0(\mathbb{S}_n), d_{\mathcal{B}})$  est borné.

Plus précisément, nous allons trouver un recouvrement de  $\mathbb{S}_n$  par trois boules plongées tel que la distance de fragmentation relativement à ce revêtement soit bornée par 18.

#### Lemme 9.2.

Soit  $M$  une variété topologique. Soient  $f \in \text{Homeo}_0(M)$  et  $x, y$  deux points distincts de  $M$ .

Alors il existe  $f_1, f_2, f_3 \in \text{Homeo}_0(M)$  tels que :

- $f = f_1 f_2 f_3$ ,
- $f_1(x) = f_3(x) = x$ ,
- $f_2(y) = y$ .

*Démonstration.*

Sans perte de généralité,  $M$  est connexe et de dimension au moins 1.

Si  $f(x) = x$ , posons  $f_1 = f$  et  $f_2 = f_3 = \text{id}$ . Sinon, soit  $z \in M \setminus \{x, y\}$ . Si  $M$  est un intervalle, choisissons de plus  $z$  dans la composante connexe de  $f(x)$  dans  $M \setminus \{x\}$ , intersectée avec la composante connexe de  $x$  dans  $M \setminus \{y\}$ . Alors il existe  $f_1, f_2 \in \text{Homeo}_0(M)$  tels que :

- $f_1(x) = x$  et  $f_1(z) = f(x)$ ,
- $f_2(y) = y$  et  $f_2(x) = z$ .

Posons enfin  $f_3 := f_2^{-1} f_1^{-1} f$ . □

Une généralisation immédiate du Lemme 9.2 donne :

#### Lemme 9.3.

Soit  $M$  une variété topologique qui n'est pas un intervalle. Soient  $f \in \text{Homeo}_0(M)$  et  $x, y, p$  trois points deux à deux distincts de  $M$ .

Alors il existe  $f_1, f_2, f_3 \in \text{Homeo}_0(M)$  tels que :

- $f = f_1 f_2 f_3$ ,
- $f_1(x) = f_3(x) = x$ ,
- $f_2(y) = y$ ,
- $f_1(p) = f_2(p) = f_3(p) = p$ .

On en déduit le corollaire suivant :

#### Corollaire 9.4.

Soit  $M$  une variété topologique. Soient  $f \in \text{Homeo}_0(M)$  et  $x, y, z$  trois points deux à deux distincts de  $M$ .

Alors il existe  $f_1, \dots, f_9 \in \text{Homeo}_0(M)$  tels que :

- $f = f_1 \dots f_9$ ,
- chaque  $f_i$  fixe au moins deux points de  $\{x, y, z\}$ .

*Démonstration.*

Les composantes connexes qui sont des intervalles peuvent être traitées à part (*via* une étude de cas). Pour les autres, on applique le Lemme 9.2 et deux fois le Lemme 9.3.  $\square$

Enfin, afin de contrôler les homéomorphismes  $f_i$  au voisinage de points fixes, on utilisera le lemme suivant :

#### Lemme 9.5.

Soient  $M$  une variété topologique et  $f \in \text{Homeo}_0(M)$ . Soient  $x_1, x_2$  deux points fixes distincts de  $f$ .

Alors il existe  $f_1, f_2 \in \text{Homeo}_0(M)$  tels que :

- $f = f_1 f_2$ ,
- $f_1 = \text{id}$  sur un voisinage de  $x_1$ ,
- $f_2 = \text{id}$  sur un voisinage de  $x_2$ .

*Démonstration.*

Soit  $d$  une distance sur  $M$  compatible avec sa topologie. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un voisinage  $V$  de  $x_1$  qui est une boule plongée et tel que  $d(f(x), x) \leq \varepsilon$  sur  $V$  et  $x_2 \notin V$ .

Alors  $f$  peut être isotopé en  $h \in \text{Homeo}_0(M)$  telle que  $h = \text{id}$  sur un voisinage de  $x_1$  et  $h = f$  en-dehors d'un compact  $K \subset V$ . Alors  $h$  se prolonge en  $f_1 \in \text{Homeo}_0(M)$ . On pose  $f_2 = f_1^{-1} f$ .  $\square$

Remarquons que, contrairement aux résultats précédents, ce lemme utilise des résultats de topologie très puissants : l'existence d'une telle isotopie dans  $\text{Homeo}_0(M)$  est très loin d'être triviale (quoique beaucoup plus facile à démontrer dans  $\text{Diff}_0(M)$  pour une variété différentielle  $M$ ).

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration de la Proposition 9.1.

*Démonstration de la Proposition 9.1.*

Si  $n = 0$ , il n'y a rien à montrer. Sinon, soient  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{S}_n$  deux à deux distincts. Soit  $\varepsilon > 0$ ; posons  $B_i := \mathbb{S}_n \setminus \overline{B}(x_i, \varepsilon)$ . Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, alors  $\mathcal{B} := \{B_1, B_2, B_3\}$  est un recouvrement ouvert de  $\mathbb{S}_n$  par des boules ouvertes dont les adhérences sont des boules fermées plongées.

D'après le Corollaire 9.4 et le Lemme 9.5, quitte à réduire encore  $\varepsilon$ , il existe  $f_1, \dots, f_{18} \in \text{Homeo}_0(\mathbb{S}_n)$  tels que :

- $f = f_1 \dots f_{18}$ ;
- pour tout  $i$ , il existe  $k_i$  tel que  $\text{Supp}(f_i) \subset B_{k_i}$ .

En particulier,  $\|f\|_{\mathcal{B}} \leq 18$ .  $\square$

## 9.2 Groupes $\text{Homeo}_0(M)$ pour $M$ non simplement connexe

Posons  $\mathcal{C}_b([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, f(0) = 0\}$ , que l'on munit de la norme du supremum  $\|\cdot\|_{\infty}$  (ce qui en fait un espace de Banach).

**Définition 9.6** (Plongement grossier).

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces quasi-géodésiques. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est un plongement grossier s'il existe  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :

- $\lim_{+\infty} F = +\infty$ ,
- $F(d(x_1, x_2)) \leq d(f(x_1), f(x_2))$  pour tous  $x_1, x_2 \in X$ .

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

**Proposition 9.7.**

Soit  $M$  une variété compacte connexe de dimension au moins 2. Supposons qu'il existe  $a \in \pi_1(M)$  d'ordre infini. Alors  $(\mathcal{C}_b([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  se plonge grossièrement dans  $(\text{Homeo}_0(M), d_B)$ .

Si de plus  $\langle a \rangle$  est non distordu dans  $\pi_1(M)$ , alors ce plongement est quasi-isométrique.

*Démonstration.*

Soit  $d$  la dimension de  $M$ . Soit  $\gamma \subset M$  un lacet simple représentant  $a$  tel que  $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \alpha(\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$  pour un certain plongement  $\alpha : B_{d-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ . On définit  $\varphi : \mathcal{C}_b([0, 1]) \rightarrow \text{Homeo}_0(M)$  par :

$$\varphi(f)(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \notin \alpha(B_{d-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}), \\ \alpha(b, \theta + f(1 - \|b\|)) & \text{si } x = \alpha(b, \theta). \end{cases}$$

L'application  $\varphi$  est un morphisme injectif de groupes topologique. Nous allons montrer que cette application convient. Plus précisément, en se fixant une distance des mots  $d_{\pi_1(M)}$  sur  $\pi_1(M)$  et en posant pour tout  $r \geq 0$  :

$$F(r) := d_{\pi_1(M)}(1, a^{\lfloor r \rfloor}),$$

il suffit de montrer qu'il existe  $\lambda > 0$  et  $C \geq 0$  tels que, pour tout  $f \in \mathcal{C}_b([0, 1])$ ,

$$\frac{1}{\lambda} F(\|f\|_\infty) - C \leq \|\varphi(f)\|_B \leq \lambda \|f\|_\infty + C.$$

**Première étape :** borne supérieure sur  $\|\varphi(f)\|_B$ .

L'application  $\varphi$  est continue. Il existe donc  $r > 0$  tel que  $\varphi(B(0, r)) \subset B(\text{id}, 1)$ . Soit  $f \in \mathcal{C}_b([0, 1])$ . Posons  $n := \lceil \|f/r\|_\infty \rceil$ . Alors :

$$\|\varphi(f)\|_B = \left\| \varphi \left( \frac{f}{n} \right)^n \right\|_B \leq n \left\| \varphi \left( \frac{f}{n} \right) \right\|_B \leq n.$$

En particulier,  $\|\varphi(f)\|_B \leq (\|f\|_\infty + 1)/r$ .

**Deuxième étape :** borne inférieure sur  $\|\varphi(f)\|_B$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}_b([0, 1])$ . Posons  $n := \lfloor \|f\|_\infty \rfloor$ . Soit  $\widetilde{\varphi}(f)$  le relevé de  $\varphi(f)$  à  $\widetilde{M}$  qui fixe le complémentaire de  $\pi^{-1}(\alpha(B_{d-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}))$ . Considérons de plus un cercle dans  $\alpha(B_{d-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$  sur lequel l'angle de rotation  $f(1 - \|b\|)$  est maximal, c'est-à-dire, quitte à inverser le sens, de  $\|f\|_\infty$ . Soit  $x$  un point sur ce cercle.

Choisissons une distance  $d_M$  sur  $M$  compatible avec sa topologie, et une distance  $d_{\widetilde{M}}$  sur  $\widetilde{M}$  qui est localement un relevé de  $d_M$ .

*Première sous-étape*

Soit  $\widetilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$ . Soit  $D \subset \widetilde{M}$  un domaine fondamental de  $M$  dans  $\widetilde{M}$  contenant le relevé de ce cercle partant de  $\widetilde{x}$ . On a alors  $d_{\widetilde{M}}(\widetilde{\varphi}(f)(\widetilde{x}), a^n \widetilde{x}) \leq \text{Diam}(D)$ , car  $\widetilde{\varphi}(f)(\widetilde{x})$  et  $a^n \widetilde{x}$  appartiennent tous deux à  $a^n D$ . Soit  $\widetilde{y} \in \widetilde{M}$  fixé par  $\widetilde{\varphi}(f)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \sup_{\widetilde{u}, \widetilde{v} \in \widetilde{M}} d_{\widetilde{M}}(\widetilde{\varphi}(f)(\widetilde{u}), \widetilde{\varphi}(f)(\widetilde{v})) &\geq d_{\widetilde{M}}(\widetilde{\varphi}(f)(\widetilde{x}), \widetilde{\varphi}(f)(\widetilde{y})) \\ &\geq d_{\widetilde{M}}(a^n \widetilde{x}, \widetilde{x}) - d_{\widetilde{M}}(\widetilde{\varphi}(f)(\widetilde{x}), a^n \widetilde{x}) - d_{\widetilde{M}}(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}(f)(\widetilde{y})) \\ &\geq d_{\widetilde{M}}(a^n \widetilde{x}, \widetilde{x}) - 2 \text{Diam}(D). \end{aligned}$$

Par le lemme de Milnor-Švarc, il existe  $\lambda > 0$  et  $C \geq 0$  tels que  $d_{\widetilde{M}}(a^n \widetilde{x}, \widetilde{x}) \geq F(\|f\|_\infty)/\lambda - C$ .

*Deuxième sous-étape*

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que toute boule métrique dans  $M$  de rayon au plus  $2\varepsilon$  soit une boule ouverte plongée d'adhérence plongée. De telles boules recouvrent  $M$ . Par compacité, on peut en extraire un sous-recouvrement fini  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ . Soit  $\varphi(f) = g_1 \dots g_n$  une fragmentation de  $\varphi(f)$  relativement à  $\mathcal{B}$  de longueur minimale (c'est-à-dire que  $n = \|\varphi(f)\|_{\mathcal{B}}$ ).

Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , soit  $k_i$  tel que  $\text{Supp}(g_i) \subset B_{k_i}$ . Soit  $\widetilde{g}_i$  le relèvement de  $g_i$  tel que  $\text{Supp}(\widetilde{g}_i) \subset \pi^{-1}(B_{k_i})$ . Alors  $\widetilde{g}_1 \dots \widetilde{g}_n$  est un relevé de  $\varphi(f)$ . Il existe donc un automorphisme de revêtement  $\widetilde{h}$  tel que  $\widetilde{\varphi(f)} = \widetilde{h} \widetilde{g}_1 \dots \widetilde{g}_n$ . De là,

$$\begin{aligned} \sup_{\widetilde{u} \in \widetilde{M}} d_{\widetilde{M}}(\widetilde{g}_1 \dots \widetilde{g}_n \widetilde{u}, \widetilde{u}) &\leq \sup_{\widetilde{u} \in \widetilde{M}} \sum_{i=1}^n d_{\widetilde{M}}(\widetilde{g}_i \dots \widetilde{g}_n \widetilde{u}, \widetilde{g}_{i+1} \dots \widetilde{g}_n \widetilde{u}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sup_{\widetilde{v} \in \widetilde{M}} d_{\widetilde{M}}(\widetilde{g}_i \widetilde{v}, \widetilde{v}) \\ &\leq n\varepsilon. \end{aligned}$$

Enfin, on en déduit :

$$\begin{aligned} \sup_{\widetilde{u}, \widetilde{v} \in \widetilde{M}} d_{\widetilde{M}}(\widetilde{\varphi(f)}(\widetilde{u}), \widetilde{\varphi(f)}(\widetilde{v})) &= \sup_{\widetilde{u}, \widetilde{v} \in \widetilde{M}} d_{\widetilde{M}}(\widetilde{g}_1 \dots \widetilde{g}_n(\widetilde{u}), \widetilde{g}_1 \dots \widetilde{g}_n(\widetilde{v})) \\ &\leq 2 \sup_{\widetilde{u} \in \widetilde{M}} d_{\widetilde{M}}(\widetilde{g}_1 \dots \widetilde{g}_n(\widetilde{u}), \widetilde{u}) + \text{Diam}(D) \\ &\leq 2n\varepsilon + \text{Diam}(D) \\ &= 2\varepsilon \|\varphi(f)\|_{\mathcal{B}} + \text{Diam}(D). \end{aligned}$$

Ce résultat, avec le résultat de la première sous-étape, permet de minorer  $\|\varphi(f)\|_{\mathcal{B}}$  par  $F(\|f\|_\infty)$ .  $\square$

# 10 Distortion forte dans les groupes de transformations (15 avril, Camille Horbez)

Cet exposé suit le travail de Frédéric Le Roux et Kathryn Mann [8].

## 10.1 Définitions

**Définition 10.1** (distortion et bornitude fortes).

Soit  $G$  un groupe. On dit que  $G$  est fortement distordu s'il existe  $m \geq 0$  et  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tels que, pour toute suite  $(g_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $G$ , il existe  $S \subset G$  telle que  $|S| \leq m$  et, pour tout  $n \geq 0$ ,

- $g_n \in \langle S \rangle$ ,
- $\ell_S(g_n) \leq f(n)$ .

On dit que  $G$  est fortement borné s'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. pour tout  $\ell : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant :

- (a)  $\ell(1) = 0$ ,
- (b)  $\ell(g^{-1}) = \ell(g)$ ,
- (c)  $\ell(gh) \leq \ell(g) + \ell(h)$ ,

$\ell$  est bornée.

2. toute action par isométries de  $G$  sur un espace métrique est à orbites bornées.

**Lemme 10.2.**

Si un groupe  $G$  est fortement distordu, alors il est fortement borné.

*Démonstration.*

Soit  $G$  un groupe non fortement borné. Soit  $\ell : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction longueur non bornée sur  $G$ . Soit  $m \geq 0$ , et soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tendant vers  $+\infty$ .

Soit  $(g_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $G$  tels que  $\ell(g_n) \geq f(n)^2$  pour tout  $n \geq 0$ . Soit  $S$  une partie finie de  $G$ . Alors, pour tout  $n$ , soit  $g_n \notin \langle S \rangle$ , soit  $f(n)^2 \leq \ell(g_n) \leq K \ell_S(g_n)$ , où  $K = \max_S \ell$ .  $\square$

## 10.2 Distortion forte des groupes de transformations de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}_d$

Nous allons discuter des résultats suivants.

**Théorème 10.3** (Le Roux, Mann).

Pour tout  $d \geq 0$ , le groupe  $\text{Homeo}(\mathbb{R}^d)$  est fortement distordu.

**Théorème 10.4** (Le Roux, Mann).

Pour tout  $d \geq 0$  et  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , si  $k \neq d + 1$ , alors le groupe  $\text{Diff}^k(\mathbb{R}^d)$  est fortement distordu.

**Corollaire 10.5.**

Pour tout  $d \geq 0$ , le groupe  $\text{Homeo}(\mathbb{S}_d)$  est fortement distordu.

Ce corollaire se démontre à l'aide des méthodes vues lors de l'exposé précédent.

*Démonstration.*

Soit  $(g_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\text{Homeo}(\mathbb{S}_d)$ . Soient  $x, y$  deux points distincts de  $\mathbb{S}_d$ . Pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $a_n, b_n$  et  $c_n \in \text{Homeo}(\mathbb{S}_d)$  tels que :

- $g_n = a_n b_n c_n$ ,
- $a_n(x) = x$ ,

- $b_n(y) = y$ ,
- $c_n(x) = x$ .

□

**Théorème 10.6** (Cohen).

Pour tout  $k \geq 0$ , le groupe  $\text{Diff}^k(\mathbb{S}_1)$  est engendré par une partie relativement (OB); ce n'est pas le cas pour  $\text{Diff}^\infty(\mathbb{S}_1)$ .

$\text{Diff}^1(\mathbb{S}_1)$  est quasi-isométrique à  $\mathcal{C}_b([0, 1])$ .

**10.3 Démonstration du théorème 10.3**

Nous allons esquisser la démonstration du Théorème 10.3 en dimension 1.

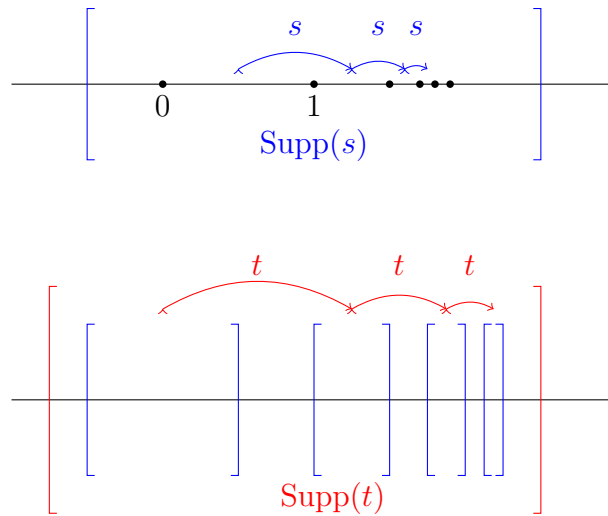
*Démonstration du Théorème 10.3 pour  $d = 1$ .*

Il suffit de montrer que  $\text{Homeo}_+(\mathbb{R})$  est fortement distordu. Soit  $(g_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ . On va trouver  $S \subset \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$  tel que  $|S| \leq 12$  et  $\ell_S(g_n) \leq 100(n+1)$  pour tout  $n \geq 0$ .

**Premier cas :**  $\text{Supp}(g_n)$  est uniformément borné en  $n$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer  $\text{Supp}(g_n) \subset [0, 1]$  pour tout  $n$ . On se donne  $s, t \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$  à support borné tels que :

- pour tous  $i, j \geq 0$  distincts,  $s^i([0, 1]) \cap s^j([0, 1]) = \emptyset$ ,
- pour tous  $i, j \geq 0$  distincts,  $t^i([0, 1]) \cap t^j([0, 1]) = \emptyset$ ,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Diam}(s^n([0, 1])) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Diam}(t^n([0, 1])) = 0$ .



Construction de  $s$  et de  $t$ .

En conjuguant par  $s^m t^n$ , on fait agir  $g_n$  sur tous les sous-blocs du  $n$ -ième bloc. On pose donc :

$$a := \prod_{n,m \geq 0} t^n s^m g_n t^{-m} s^{-n}.$$

L'application  $a$  est un homéomorphisme et, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $g_n = [t^{-n} a t^n, s]$ . On peut donc prendre  $S = \{s, t, a\}$ .

**Deuxième cas :**  $\text{Supp}(g_n)$  est borné pour tout  $n$ .

On peut trouver une suite croissante exhaustive de compacts  $(K_n)_{n \geq 0}$  tels que  $\text{Supp}(g_n) \subset K_n$  pour tout  $n \geq 0$ . Soit  $h \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$  tel que  $K_{n+1} \subset h(K_n)$  pour tout  $n$ . Alors  $\text{Supp}(h^{-n}g_nh^n) \subset K_0$  pour tout  $n$ . À l'aide du premier cas, on peut prendre  $S = \{s, t, a, h\}$ .

**Troisième cas :**  $\text{Supp}(g_n) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k - 1/3, k + 1/3]$  pour tout  $n$ .

Similaire au premier cas, en travaillant sur chaque intervalle  $[k - 1/3, k + 1/3]$  séparément.

**Cas général :**

Le cas général découle directement du lemme suivant :

**Lemme 10.7.**

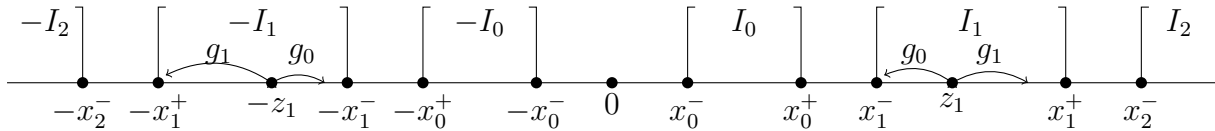
Soit  $(g_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ . Il existe deux sous-ensembles  $A, B \subset \mathbb{R}$  homéomorphes à  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k - 1/3, k + 1/3]$  tels que, pour tous  $n \geq 0$ , il existe  $a_n, b_n, c_n \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$  tels que :

- $g_n = a_n b_n c_n$ ,
- $\text{Supp}(a_n) \subset A$ ,
- $\text{Supp}(b_n) \subset B$ ,
- $\text{Supp}(c_n)$  est borné.

*Démonstration du Lemme 10.7.*

Soit  $A_0 = [x_0^-, x_0^+]$  un segment de  $\mathbb{R}_+^*$ . On construit récursivement une famille d'intervalles  $(A_k)_{k \geq 0}$ , avec  $A_k = [x_k^-, x_k^+]$ , de la façon suivante :

- on pose  $x_{k+1}^- := x_k^+ + 1$ .
- on choisit  $z_{k+1}$  tel que  $g_j(z_{k+1} - 1/2) \geq x_{k+1}^-$  et  $g_j(-z_{k+1} + 1/2) \leq -x_{k+1}^-$  pour tout  $j \leq k$ ,
- on choisit  $x_{k+1}^+$  tel que  $g_j(z_{k+1} + 1/2) \leq x_{k+1}^+$  et  $g_j(-z_{k+1} - 1/2) \geq -x_{k+1}^+$  pour tout  $j \leq k$ .



Construction des intervalles  $I_k$  (à l'épaissement de  $1/2$  près).

On pose enfin  $A := \bigcup_{k \geq 0} (A_k \cup (-A_k))$ . Par construction, pour tous  $0 \leq n \leq m$ , l'homéomorphisme  $g_n$  envoie l'intervalle  $\pm[z_m - 1/2, z_m + 1/2]$  dans  $\pm A_m$ , et les intervalles  $A_m$  sont à distance au moins 1 les uns des autres. Il existe donc un homéomorphisme  $a_n$  à support dans  $A$  tel que  $a_n$  coïncide avec  $g_n$  sur  $B_n := \bigcup_{m \geq n} \pm[z_m - 1/2, z_m + 1/2]$ .

Posons  $B := \overline{\mathbb{R} \setminus B_1}$ . Pour tout  $n$ , l'homéomorphisme  $a_n^{-1}g_n$  est à support dans  $\mathbb{R} \setminus B_n$ , qui est l'union de  $B_1$  et d'un nombre fini d'intervalles. On peut donc poser  $a_n^{-1}g_n = b_n c_n$ , où  $b_n$  est à support dans  $B$  et  $c_n$  à support borné. □

Ceci conclut la démonstration du Théorème 10.3 pour  $d = 1$ . □

## 10.4 Cas de $\text{Diff}^\infty(\mathbb{R})$

Dans les arguments de la démonstration du Théorème 10.3, le deuxième cas et le cas général se transposent au difféomorphismes, tandis que le premier cas est moins général que le troisième cas. Il suffit donc de démontrer le troisième cas pour des difféomorphismes. Celui-ci découle d'un théorème très puissant de perfection de  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R})$ , puis d'une construction apparentée à celles du Théorème 10.3.



**Théorème 10.8** (Burago, Ivanov, Polterovich [3]).

*Tout élément de  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R})$  à support compact est produit de deux commutateurs.*

**Lemme 10.9.**

*Il existe  $s, t \in \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R})$  de support inclus dans  $\mathbb{R}_+$ , et une suite  $(I_k)_{k \geq 0}$  d'intervalles de  $\mathbb{R}$  tels que :*

- *les familles  $\{s^i(I_k) : i, k \geq 0\}$  et  $\{t^i(I_k) : i, k \geq 0\}$  sont localement finies,*
- *les intervalles  $s^i(I_k)$  et  $t^j(I_\ell)$ , avec  $i, j \in \mathbb{Z}$  et  $k, \ell \geq 0$  sont deux à deux disjoints, sauf dans le cas  $s^0(I_k) = t^0(I_k)$ .*

*Démonstration du Théorème 10.4 pour  $d = 1$  et  $k = \infty$ .*

Soit  $(g_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\text{Supp}(g_n) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k - 1/3, k + 1/3]$  pour tout  $n$ . On a  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k - 1/3, k + 1/3] \simeq \bigcup_{k \geq 0} (I_k \cup (-I_k)) =: X$ . De plus, par le Théorème 10.8, il existe  $a_n, b_n, a'_n, b'_n$  à support dans  $X$  tels que  $g_n = [a_n, b_n][a'_n, b'_n]$  pour tout  $n$ .

Posons  $c := \prod_{n \geq 0} s^n a_n s^{-n}$  et  $d := \prod_{n \geq 0} t^n b_n t^{-n}$ . Alors  $[a_n, b_n] = [s^{-n} c s^n, t^{-n} d t^n]$ . On procède de même pour  $a'_n$  et  $b'_n$ . □

La contrainte  $k \neq d + 1$  dans l'énoncé du Théorème 10.4 vient du fait que le Théorème 10.8 est connu en régularité  $\mathcal{C}^k$ , sauf pour  $k \neq d + 1$ , qui est ouvert.

# 11 Perfection des groupes de difféomorphismes (6 mai, Patrick Massot)

Le but de cet exposé est d'éclairer le :

**Théorème 11.1** (Herman, Thurston, Mather, 1970s).

*Soit  $M$  une variété différentielle. Le groupe  $\text{Diff}_{c,0}^r(M)$  des difféomorphismes  $\mathcal{C}^r$  à support compact isotopes à l'identité est parfait (c'est-à-dire que tout élément est produit de commutateurs) si  $r \in [1, +\infty]$  et  $r \neq \dim(M) + 1$ .*

*Si de plus  $M$  est connexe, alors  $\text{Diff}_{c,0}^r(M)$  est simple.*

Le cas  $r = \dim(M) + 1$  reste ouvert, même pour  $M = \mathbb{R}$  ou  $M = \mathbb{S}_1$ .

Ce théorème a des avatars en géométrie symplectique ou de contact :

**Théorème 11.2** (Rybicki, 2010 [13]).

*Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact. Le groupe  $\text{Cont}_{c,0}^\infty(M, \xi)$  est parfait, et simple si  $M$  est connexe.*

**Théorème 11.3** (Banyaga, 1978 [1]).

*Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique. Le groupe  $\text{Ham}(M, \omega)$  est parfait, et simple si  $M$  est connexe.*

Le théorème de Rybicki suscitait est difficile; celui de Banyaga s'en déduit.

## 11.1 Théorèmes de point fixe

La démonstration de la perfection de  $\text{Diff}_{c,0}^r(M)$  utilise un théorème de point fixe dérivé du théorème de point fixe de Schauder (lui-même une généralisation en dimension infinie du théorème de point fixe de Brouwer).

**Théorème 11.4** (Théorème de point fixe de Schauder).

*Soit  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe (par exemple un espace de Banach, de Fréchet, ou  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ). Soit  $K \subset E$  un convexe compact non vide.*

*Soit  $\varphi \in \mathcal{C}(K, K)$ . Alors  $\varphi$  admet un point fixe.*

**Corollaire 11.5** (Epstein).

*Soit  $V$  un voisinage  $\mathcal{C}^1$  de l'identité dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Soient  $F := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \text{Supp}(f) \subset [-1, 1]^n\}$ , et  $W := F \cap V$ . Soit  $\Theta : W \rightarrow F$  continue.*

*Supposons qu'il existe  $r_0 \geq 1$ , une suite  $(k_r)_{r \geq r_0}$  et une suite de fonctions  $(F_r)_{r \geq r_0}$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  dans  $\mathbb{R}$  telles que, pour tout  $r \geq r_0$ ,*

- $\|\Theta(u)\|_r \leq k_r \|u\|_r + F_r(u)$ , où  $\|\cdot\|_r$  est la norme  $\mathcal{C}^r$  ;
- $0 \leq k_r < 1$  ;
- si  $r > r_0$ , la fonction  $F_r$  est contrôlée par la norme  $\mathcal{C}^{r-1}$  sur  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  ;
- $F_{r_0}(u) =_0 O(\|u\|_{r_0}^2)$ .

*Alors  $\Theta$  admet un point fixe.*

Remarquons que les contraintes  $\|\Theta(u)\|_r \leq k_r \|u\|_r + F_r(u)$  forment une suite d'inégalités du type Döblin-Fortet.

*Démonstration du corollaire.*

Soit  $(M_r)_{r \geq r_0}$  une suite de réels positifs. Alors  $K := \{u \in F : \|u - \text{id}\|_r \leq M_r \forall r \geq r_0\}$  est un convexe, compact par le théorème d'Arzelà-Ascoli. Par le théorème de point fixe de Schauder, il suffit de construire  $(M_r)_{r \geq r_0}$  de telle sorte que  $K \subset V$  et  $\Theta(K) \subset K$ .

Comme  $\text{Supp}(u)$  est un compact uniformément borné, par l'inégalité des accroissements finis, il existe des constantes  $(C_r)_{r \geq 0}$  telles que  $\|u\|_{r+1} \geq C_r \|u\|_r$ . En particulier, si  $M_{r_0}$  est suffisamment petit, alors  $K \subset V$ .

On veut trouver de plus une suite  $(M_r)_{r \geq r_0}$  telle que, si  $\|u - \text{id}\|_s \leq M_s$  pour tout  $r_0 \leq s \leq r$ , alors  $\|\Theta(u) - \text{id}\|_s \leq M_s$  pour tout  $r_0 \leq s \leq r$ . On procède récursivement sur  $r$ . Initialement, on veut :

$$k_{r_0} M_{r_0} + O(1) M_{r_0}^2 \leq M_{r_0}.$$

Quitte à réduire la valeur de  $M_{r_0}$ , cette inégalité est satisfaite. Donnons-nous maintenant  $M_{r_0}, \dots, M_r$ . On veut :

$$k_{r+1} M_{r+1} + \|F_{r+1}\|_\infty \leq M_{r+1}.$$

Or  $F_{r+1}$  est borné sur  $\{u \in F : \|u - \text{id}\|_s \leq M_s \forall r_0 \leq s \leq r\}$ . Il suffit donc de prendre :

$$M_{r+1} := \frac{\|F_{r+1}\|_\infty}{1 - k_{r+1}}. \quad \square$$

## 11.2 Perfection de groupes de transformations : une ébauche de démonstration

Dans ce qui suit,  $G = \text{Diff}_{c,0}^r(M)$ ,  $\text{Cont}_{c,0}^\infty(M, \xi)$  ou  $\text{Ham}(M, \omega)$ . Nous allons esquisser les principales idées derrière la démonstration de la perfection de ces groupes.

### 11.2.1 But

Soit  $f \in G$ . Le but est de construire une transformation  $\Theta$  telle que :

- $\Theta(u) \equiv f \circ u \pmod{[G, G]}$  ;
- le corollaire d'Epstein s'applique à  $\Theta$ .

En effet, si l'on a trouvé une telle transformation  $\Theta$ , alors elle admet un point fixe  $u_0$ . On a alors  $u_0 \equiv f u_0 \pmod{[G, G]}$ , donc  $f \equiv \text{id} \pmod{[G, G]}$ .

On va chercher  $\Theta$  de la forme  $\Theta(u) = \psi(f \circ u)$ , où  $\psi$  diminue les dérivées et ne fait rien modulo  $[G, G]$ .

### 11.2.2 Stratégie

Pour  $\lambda > 0$ , soit  $h_\lambda(x) := \lambda x$ . Choisissons  $\psi_\lambda(u) := h_\lambda \circ u \circ h_\lambda^{-1}$ . Alors  $\|\psi_\lambda(u)\|_r = \lambda^{1-r} \|u\|_r$ . Pour  $\lambda > 1$  et  $r \geq 2$ , la condition de contraction des normes  $\mathcal{C}^r$  est satisfaite.

Cependant,  $\text{Supp}(\psi_\lambda(u)) = h_\lambda(\text{Supp}(u))$  est alors plus grand que  $\text{Supp}(u)$  : la transformation  $\psi_\lambda$  ne laisse pas  $F$  invariant. On veut revenir à une fonction à support dans  $[-1, 1]^n$ .

On procède récursivement en dimension. On construit une famille  $(\psi_k)_{1 \leq k \leq n}$ , avec :

- $\psi_0(u) = h_\lambda \circ u \circ h_\lambda^{-1}$ ,
- $\text{Supp}(\psi_k) \subset [-1, 1]^k \times [-\lambda, \lambda]^{n-k}$ ,

de telle sorte que  $\psi = \psi_n$  convienne et que  $\|\psi_{k+1}(u)\|_r \leq K_f \lambda \|\psi_k(u)\|_r$ . On aura alors :

$$\|\Theta(u)\|_r = O(\lambda^n \lambda^{1-r} \|u\|_r),$$

et il suffira de choisir  $r > n + 1$  et  $\lambda$  assez grand.

### 11.2.3 Construction de la famille $(\psi_k)_{1 \leq k \leq n}$

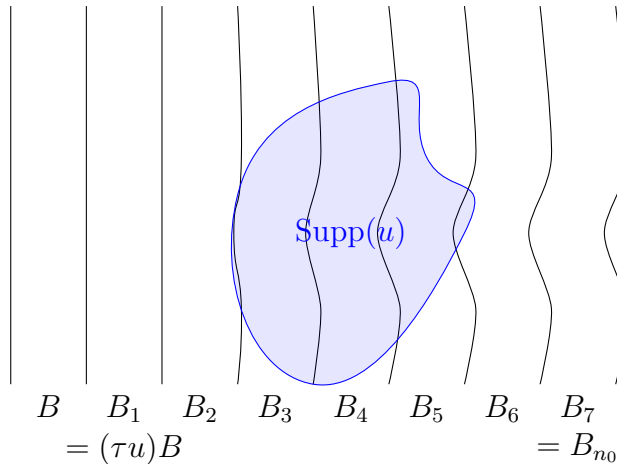
Une telle famille  $(\psi_k)_{1 \leq k \leq n}$  peut se construire en moyennant  $u$ , ce qui fait perdre exactement un facteur  $\lambda$  sur toutes les dérivées. Pour simplifier, nous allons présenter cette technique pour  $k = 1$ .

Soient  $f, g \in G$ . Remarquons que  $f \equiv g \pmod{[G, G]}$  si :

- $\exists h \in G : f = hgh^{-1}$  ;
- $\exists \tau \in G : \tau f = \tau g$  ;
- $\exists h, \tau \in G : \tau f = h\tau gh^{-1}$ .

Nous prenons pour  $\tau$  une translation de  $\simeq 1$  (dépendant de  $V$  mais pas de  $\lambda$ ) le long de la première coordonnée. Cela permet notamment de trivialisier la dynamique de  $u$ , ce qui supprime un obstacle potentiel à la conjugaison.

Cependant, une translation non triviale n'appartient pas à  $G$ , qui ne contient que des transformations à support compact. On va donc prendre pour  $\tau$ , plus précisément, le flot au temps  $\simeq 1$  du champ de vecteur  $\chi(x)\partial_{x_1}$ , où  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  vaut 1 sur un voisinage de  $[-\lambda, \lambda]^n$  de taille  $O(\lambda)$ . Pour simplifier, dans la suite, on se restreindra à un voisinage de  $[-\lambda, \lambda]^n$  tel que l'on puisse voir  $\tau$  comme une vraie translation. Il existe alors une bande verticale  $B$  telle que les bandes images  $B_n = (\tau u)^n B$  forment une partition du plan, et que  $B$  soit à gauche de  $\text{Supp}(u)$ .



Les bandes  $B_n$ .

On pose  $v = \tau^{-1}h\tau uh^{-1}$ , de telle sorte que  $h(\tau u) = (\tau u)v$ . On veut trouver  $h$  telle que  $v$  soit à support dans  $[-1, 1] \times [-\lambda, \lambda]^{n-1}$ . À gauche de  $[-\lambda, \lambda]^n$ , ainsi que hors de  $\text{Supp}(\chi)$ , la fonction  $h \equiv \text{id}$  convient, et alors  $v \equiv \text{id}$ .

La relation de conjugaison donne  $h|_{B_{n+1}} = (\tau v)h|_{B_n}(\tau u)^{-1}$ . De plus, on sait que  $v \equiv \text{id}$  hors de  $[-1, 1] \times [-\lambda, \lambda]^{n-1}$ . On peut donc construire récursivement  $h$  ; il faut seulement s'assurer que la fonction obtenue est bien  $\mathcal{C}^\infty$ .

Soit  $n_0$  tel que  $B_{n_0}$  soit à droite de  $[-\lambda, \lambda]^n$ . On peut de plus choisir  $n_0$  de l'ordre de  $\lambda$ . Soit  $g$  le difféomorphisme  $\mathbb{R}$ -équivariant qui coïncide avec  $(\tau u)^{n_0}$  sur  $B$ , et posons  $\varphi = g^{-1}(\tau u)^{n_0}$ . Alors  $\varphi$  est l'identité sur les deux bords de  $B$ , et peut donc s'étendre en un difféomorphisme à support compact de  $\mathbb{R}^n$ . Finalement, on peut conjuguer pour centrer  $\text{Supp}(\varphi)$  en 0. La transformation obtenue convient, et est de norme  $O(n_0 \|u\|_r) = O(\lambda \|u\|_r)$ .

## 12 Géométrie des groupes de contactomorphismes, 1 (13 mai, Anne Vaugon)

Cet exposé porte sur l'article d'Eliashberg et Polterovich *Partially ordered groups and geometry of contact transformations* [7]. Nous allons définir ici des ordres invariants sur les groupes de contactomorphismes.

### 12.1 Distances bi-invariantes

On considère pour commencer des distances bi-invariantes et des normes invariantes par conjugaison.

**Définition 12.1** (Normes invariantes par conjugaison).

Soit  $G$  un groupe, et  $\nu : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On dit que  $\nu$  est une norme invariante par conjugaison si :

- $\nu(1) = 0$  et  $\nu(f) > 0$  pour tout  $f \in G \setminus \{1\}$ ,
- $\nu(f) = \nu(f^{-1})$  pour tout  $f \in G$  (symétrie),
- $\nu(fg) \leq \nu(f) + \nu(g)$  pour tous  $f, g \in G$  (inégalité triangulaire),
- $\nu(gfg^{-1}) = \nu(f)$  pour tout  $f \in G$  (invariance par conjugaison).

Il y a une correspondance bijective entre normes invariantes par conjugaison et distances bi-invariantes, donnée par :

$$\begin{aligned} \nu &\mapsto d(f, g) := \nu(fg^{-1}), \\ d &\mapsto \nu(f) := d(f, 1). \end{aligned}$$

D'après Burago, Ivanov et Polterovich [3], sur  $\text{Diff}_0(\mathbb{S}_n)$  ou sur  $\text{Diff}_0(M)$  où  $M$  est une variété connexe compacte sans bord de dimension 3, toute norme invariante par conjugaison est équivalente à la norme triviale  $\mathbf{1}_{f \neq 1}$ .

Ce résultat a été généralisé par Rybicki [13, 14] et Tsuboi [15].

### 12.2 Cônes et ordres partiels sur les groupes

À partir de maintenant, nous suivent l'article d'Eliashberg et Polterovich [7].

**Définition 12.2** (Cône normal).

Soit  $G$  un groupe, et  $C \subset G$ . On dit que  $C$  est un cône normal si :

- $1 \in C$ ,
- pour tous  $f, g \in C$ , on a  $fg \in C$ ,
- pour tous  $f \in C$  et  $g \in G$ , on a  $gfg^{-1} \in C$ .

Un cône normal définit une relation  $\leq$  sur  $G$ , en posant  $f \geq g$  si et seulement si  $fg^{-1} \in C$ .

Soit  $C$  un cône normal. La relation associée  $\leq$  est toujours réflexive et transitive ; elle n'est pas toujours antisymétrique.

**Définition 12.3** (Domination).

Soit  $G$  un groupe,  $C$  un cône normal. Supposons que la relation  $\leq$  associée est un ordre partiel. Un élément  $f \in C \setminus \{1\}$  est dit dominant si, pour tout  $g \in G$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $f^p \geq g$ .

Avant de passer aux contactomorphismes, donnons deux exemples élémentaires de telles relations.

**Exemple 12.4.**

Prenons  $G := \text{Diff}_0([0, 1])$  et  $C := \{f \in G \mid f(x) \geq x \forall x \in [0, 1]\}$ . Alors  $C$  est un cône normal, et  $f \geq g$  si et seulement si  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ ; la relation  $\leq$  est bien un ordre partiel. Un élément  $f \in G$  est dominant si et seulement si  $f(x) > x$  pour tout  $x \in (0, 1)$ , ainsi que  $f'(0) > 1$  et  $f'(1) < 1$ .

**Exemple 12.5.**

Prenons  $G := \widetilde{\text{Diff}}_0(\mathbb{S}_1)$ . Soit  $(f_t)_{t \in [0, 1]}$  un chemin dans  $\text{Diff}_0(\mathbb{S}_1)$  tel que  $f_0 = \text{id}$ . On le relève en un chemin  $(\tilde{f}_t)_{t \in [0, 1]}$  de difféomorphismes de  $\mathbb{R}$  tel que  $\tilde{f}_0 = \text{id}$ . On a alors :

$$G \simeq \{f \in \text{Diff}(\mathbb{R}) \mid f(x+1) = f(x) + 1 \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Prenons  $C := \{f \in \text{Diff}(\mathbb{R}) \mid f(x) \geq x \forall x \in \mathbb{R}\}$ . Alors  $f \geq g$  si et seulement si  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ; la relation  $\leq$  est bien un ordre partiel. Un élément  $f \in G$  est dominant si et seulement si  $f(x) > x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

### 12.3 Application aux groupes de contactomorphismes

Dans ce qui suit,  $(M, \xi)$  est une variété de contact, avec  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$  pour une 1-forme  $\alpha$ . En particulier, le champ d'hyperplans  $\xi$  doit être co-orientable. Pour cette partie, on choisit  $G := \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ , où  $\text{Cont}_0(M, \xi)$  est le groupe des contactomorphismes isotopes à l'identité.

On dit qu'une isotopie de contact  $(f_t)_{t \in [0, 1]}$  est (strictement) positive si  $X_t := \partial_t f_t$  vérifie  $\alpha(X_t) \geq 0$  (respectivement  $\alpha(X_t) > 0$ ) pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $x \in M$ . L'ordre obtenu dépend du choix d'orientation transverse. On choisit pour  $C$  l'ensemble des classes d'équivalences d'isotopies positives (ou représentables par des isotopies positives).

Rappelons au passage qu'il y a une bijection entre :

- les champs de vecteurs  $(X_t)_{t \in [0, 1]}$  tels que  $(f_t)_{t \in [0, 1]}$  est une isotopie de contact,
- $\mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], \mathbb{R})$  (les hamiltoniens de contact).

Étant donné un tel champ de vecteur, on pose  $H_t := \alpha(X_t)$ ; alors  $H \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], \mathbb{R})$ . Réciproquement, étant donnée  $H \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], \mathbb{R})$ , on veut trouver un champ  $X_t = H_t R_\alpha + Y_t$  avec  $Y_t \in \xi$  et dont le flot associé  $(f_t)$  préserve la structure de contact. On a alors  $f_t^* \alpha = \lambda_t \alpha$ ; en dérivant cette relation, on peut déterminer  $Y_t$  de façon unique.

**Proposition 12.6.**

*C est un cône normal.*

*Démonstration.*

Premièrement,  $\text{id} \in C$  : il suffit de prendre  $X_t \equiv 0$ .

Étant donnés  $[(f_t)], [(g_t)] \in C$ , la concaténation des chemins donne directement  $[(f_t)][(g_t)] \in C$ .

Enfin, soient  $[(f_t)] \in C$  et  $[(g_t)] \in G$ . On a  $[(g_t f_t g_t^{-1})] = [(g_1 f_1 g_1^{-1})]$ . De plus,  $g_1$  préserve l'orientation transverse aux hyperplans. Donc  $[(g_1 f_1 g_1^{-1})] \in C$ . □

La relation  $\leq$  associée à  $C$  a une interprétation en termes de hamiltoniens de contact :  $[(f_t)] \geq [(g_t)]$  si et seulement s'il existe :

- un représentant  $(f_t)$  de  $[(f_t)]$  de hamiltonien  $(F_t)$ ,
- un représentant  $(g_t)$  de  $[(g_t)]$  de hamiltonien  $(G_t)$ ,

tels que  $F \geq G$  pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $x \in M$ .

On note maintenant :

- $C_+$  l'ensemble des classes d'équivalences d'isotopies strictement positives (ou représentables par des isotopies strictement positives),
- $C^+$  l'ensemble des éléments dominants de  $C$ .

**Proposition 12.7.**

$$C_+ \subset C^+.$$

Dans la suite de leur construction, Eliashberg et Polterovich définissent, pour  $f$  et  $g \in G$  et  $k \geq 0$ , la quantité

$$\gamma_k(f, g) := \inf\{p \in \mathbb{Z} \mid f^p \geq g^k\},$$

ainsi que :

$$\gamma(f, g) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_k(f, g)}{k}.$$

Ils définissent ainsi une pseudo-distance sur  $C^+$  :

$$d : \begin{cases} C^+ \times C^+ & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (f, g) & \mapsto \max\{\ln(\gamma(f, g)), \ln(\gamma(g, f))\} \end{cases} .$$

Si  $M = \mathbb{S}_1$ , la quantité  $\gamma(f, g)$  est le quotient du nombre de rotation de  $f$  par celui de  $g$  (ces nombres de rotation sont à valeurs réelles, vu que l'on travaille avec des relevés de difféomorphismes). En particulier, on peut quotienter  $C^+$  par la relation  $f \sim g$  si  $d(f, g) = 0$ , mais l'ensemble par lequel on quotiente est très gros : dans le cas de  $\mathbb{S}_1$ , il contient toutes les isotopies de difféomorphismes ayant un point fixe.

Pour finir, Eliashberg et Polterovich disent qu'une variété de contact  $(M, \xi)$  est ordonnable si la relation obtenus  $\leq$  est un ordre partiel ; ils montrent que  $(M, \xi)$  est non-ordonnable si et seulement s'il existe une isotopie de contact contractile strictement positive. Ce sera le sujet de l'exposé suivant.

## 13 Géométrie des groupes de contactomorphismes, 2 (20 mai, Anne Vaugon)

Cet exposé, dans la continuation du précédent, porte sur l'article de Colin et Sandon *The discriminant and oscillation lengths for contact and Legendrian isotopies* [4]. Nous allons définir ici des normes invariantes par conjugaison sur les groupes de contactomorphismes  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Ces normes vont être bornées sur  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{std}})$  et  $(\mathbb{S}_{2n+1}, \xi_{\text{std}})$ , et non bornées sur  $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{S}_1, \xi_{\text{std}})$  et  $(\mathbb{P}_{2n+1}(\mathbb{R}), \xi_{\text{std}})$ .

Si  $M$  est non bornée, on travaille avec le groupe des contactomorphismes à support compact.

### 13.1 Pré-requis

#### 13.1.1 Normes de fragmentation

Tout d'abord, on peut définir une version de contact de la norme de fragmentation.

**Proposition 13.1** (Rybicki).

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact compacte et  $\{B_1, \dots, B_k\}$  un recouvrement fini de  $M$  par des boules ouvertes. Soit  $\varphi$  un contactomorphisme isotope à l'identité. Alors il existe des contactomorphismes  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  tels que :

- $\varphi = \varphi_1 \dots \varphi_N$  ;
- $\text{Supp}(\varphi_i) \subset B_{j(i)}$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ .

Cette proposition motive la définition suivante :

**Définition 13.2** (Norme de fragmentation sur  $\text{Cont}_0(M, \xi)$ ).

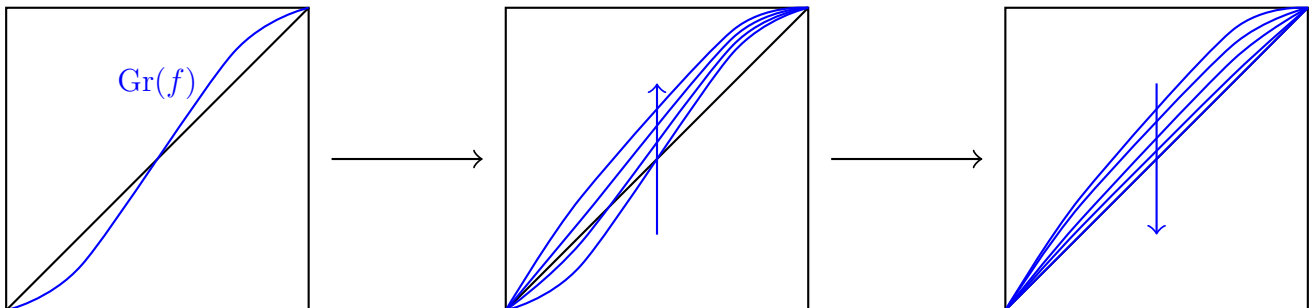
Pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$ , on définit la norme de fragmentation  $\nu_{\text{frag}}$  par :

$$\nu_{\text{frag}}(\varphi) := \inf\{N \mid \exists \varphi = \varphi_1 \dots \varphi_N, \varphi_i \text{ contactomorphisme, } \text{Supp}(\varphi_i) \subset \text{boule de Darboux}\}.$$

L'ensemble des boules de Darboux étant invariant par contactomorphismes, la norme obtenue est invariant par conjugaison. Par construction,  $\nu_{\text{frag}}(\varphi) = 1_{f \neq \text{id}}$  sur  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{std}})$ , et on obtient facilement  $\nu_{\text{frag}} \leq 2$  sur  $(\mathbb{S}_{2n+1}, \xi_{\text{std}})$ .

#### 13.1.2 Intuition pour $\text{Diff}_0([0, 1])$

Pour  $f \in \text{Diff}_0([0, 1])$ , soit  $\nu(f)$  le nombre minimal de morceaux en lequel il faut découper un chemin entre  $\text{id}$  et  $f$  pour que chaque morceau soit un graphe plongé (pour une bonne notion de graphe plongé). Alors  $\nu \leq 2$ , comme la méthode suivant le suggère.



Isotopie entre  $f$  et  $\text{id}$  en deux chemins dont les graphes sont plongés.



## 13.2 Normes de Colin et Sandon

Nous nous restreignons aux variétés de contact orientables.

### 13.2.1 Norme discriminant

**Définition 13.3** (Norme discriminant).

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact, et  $\alpha$  une 1-forme telle que  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$ . Soit  $[\varphi] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ . On définit la norme discriminant  $\nu_D$  par :

$$\nu_D([\varphi]) := \min_{\{(\varphi_t)_{t \in [0,1]} = [\varphi]\}} \{N \mid \exists 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1, \bigcup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \text{Gr}(\varphi_t) \text{ est plongé } \forall 0 \leq i \leq N-1\}.$$

Attention : la notion de graphe utilisée ici n'est pas la notion usuelle, mais une notion propre aux contactomorphismes.

**Proposition 13.4.**

$\nu_D$  est une norme invariante par conjugaison sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .  
Sa valeur ne dépend pas du choix de la 1-forme  $\alpha$ .

**Théorème 13.5** (Colin, Sandon, 2015 [4]).

$\nu_D$  est bornée sur  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{std}})$  et  $(\mathbb{S}_{2n+1}, \xi_{\text{std}})$ .  
 $\nu_D$  est non bornée sur  $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{S}_1, \xi_{\text{std}})$  et  $(\mathbb{P}_{2n+1}(\mathbb{R}), \xi_{\text{std}})$ .

De plus,  $\nu_D \leq 2\nu_{\text{frag}}$  : si  $\varphi$  est un contactomorphisme supporté par une boule de Darboux, la norme discriminant de  $\varphi$  est au plus 2, d'après la construction esquissée pour  $\text{Diff}_0([0, 1])$ . Par conséquent,

**Corollaire 13.6.**

La norme de fragmentation est non bornée sur  $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{S}_1, \xi_{\text{std}})$  et  $(\mathbb{P}_{2n+1}(\mathbb{R}), \xi_{\text{std}})$ .

La norme discriminant peut s'interpréter du point de vue de la géométrie des groupes. Soit  $\tilde{\mathcal{E}} := \{[(\varphi_t)_{t \in [0,1]}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi) \mid \bigcup_{t \in [0,1]} \text{Gr}(\varphi_t) \text{ est plongé}\}$ .

**Proposition 13.7.**

$\tilde{\mathcal{E}}$  engendre  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ , et  $\nu_D$  est la norme des mots associée à  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

### 13.2.2 Norme zig-zag

Dans la construction esquissée pour  $\text{Diff}_0([0, 1])$ , on a trouvé une isotopie de  $f$  à id qui est concaténation de deux chemins dont les graphes sont plongés. Le premier chemin correspond à une isotopie très positive (au sens d'Eliashberg et Polterovich : voir la partie 12), et le second chemin à une isotopie très négative. La norme discriminant n'impose pas de condition de monotonie, ce que fait la norme zig-zag.

Soit  $\tilde{\mathcal{E}}_+ := \{[(\varphi_t)_{t \in [0,1]}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi) \mid \bigcup_{t \in [0,1]} \text{Gr}(\varphi_t) \text{ est plongé, } (\varphi_t) \text{ est strictement positive}\}$ .  
On définit de même  $\tilde{\mathcal{E}}_-$  avec des isotopies strictement négatives.

**Proposition 13.8.**

$\tilde{\mathcal{E}}_+ \cup \tilde{\mathcal{E}}_-$  engendre  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ .

**Définition 13.9.**

La norme zig-zag  $\nu_{ZZ}$  est la norme des mots associée à  $\tilde{\mathcal{E}}_+ \cup \tilde{\mathcal{E}}_-$ .

**Proposition 13.10.**

$\nu_{ZZ}$  est une norme invariante par conjugaison sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . De plus,

$$\nu_D \leq \nu_{ZZ}.$$

Les remarques déjà faites sur la comparaison entre norme de fragmentation et norme discriminant s'appliquent encore, et donnent :

**Théorème 13.11.**

$\nu_{ZZ} \leq 2$  sur  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{std}})$ , ou plus généralement pour tout contactomorphisme supporté par une boule de Darboux.

$$\nu_{ZZ} \leq 4 \text{ sur } (\mathbb{S}_{2n+1}, \xi_{\text{std}}).$$

**Corollaire 13.12.**

$$\nu_{ZZ} \leq 2\nu_{\text{frag}}.$$

**13.2.3 Pseudo-norme d'oscillation**

Pour  $[\varphi] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ , soit  $\nu^+([\varphi])$  (respectivement  $\nu^-([\varphi])$ ) le nombre minimal de termes positifs (respectivement négatifs) dans une décomposition de  $[\varphi]$  comme mot en  $\widetilde{\mathcal{E}}_+ \cup \widetilde{\mathcal{E}}_-$ . Remarquons que  $\nu^+([\varphi])$  et  $\nu^-([\varphi])$  ne sont pas en général atteints pour le même représentant de  $[\varphi]$  ou, si le représentant est le même, par la même décomposition comme mot en  $\widetilde{\mathcal{E}}_+ \cup \widetilde{\mathcal{E}}_-$ .

**Définition 13.13** (Pseudo-norme d'oscillation).

Pour  $[\varphi] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ , on définit la pseudo-norme d'oscillation  $\nu_{Osc}$  par :

$$\nu_{Osc}([\varphi]) := \nu^+([\varphi]) - \nu^-([\varphi]).$$

**Proposition 13.14.**

$\nu_{Osc}$  est une pseudo-norme invariante par conjugaison, et une norme si et seulement si  $(M, \xi)$  est ordonnable. Si  $(M, \xi)$  est ordonnable, alors  $\nu_{Osc}$  est compatible avec l'ordre d'Eliashberg et Polterovich : si  $a \leq b \leq c$ , alors  $\nu_{Osc}(ba^{-1}) \leq \nu_{Osc}(ca^{-1})$ . De plus,

$$\nu_{Osc} \leq \nu_{ZZ}.$$

Il n'est pas évident *a priori* que les normes  $\nu_{Osc}$  et  $\nu_{ZZ}$  soient comparables, c'est-à-dire que  $\nu_{Osc} \geq C\nu_{ZZ}$  pour une certaine constance  $C$  si  $(M, \xi)$  est orientable.

**13.3 Graphe d'un contactomorphisme**

Pour finir, détaillons la notion de graphe utilisée précédemment. Là encore, les variétés de contact sont supposées orientables.

**Définition 13.15** (Graphe d'un contactomorphisme).

Soit  $\varphi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$ , avec  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$  pour une 1-forme  $\alpha$ . Soit  $g$  telle que  $\varphi^*\alpha = e^g\alpha$ . On définit le graphe de  $\varphi$  par :

$$\text{Gr}(\varphi) := \{(q, \varphi(q), g(q)) : q \in M\} \subset M \times M \times \mathbb{R}.$$

**Remarque 13.16** (Produit de contact).

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact, avec  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$  pour une 1-forme  $\alpha$ . Le produit de contact de  $(M, \alpha)$  est la variété de contact  $(M \times M \times \mathbb{R}, \beta)$  avec  $\beta = e^\theta\alpha_1 - \alpha_2$ , et :

- $\alpha_1 = p_1^* \alpha$ , où  $p_1$  est la projection du premier facteur sur  $M$  ;
- $\alpha_2 = p_2^* \alpha$ , où  $p_2$  est la projection du second facteur sur  $M$  ;
- $\theta \in \mathbb{R}$ .

Si  $\varphi$  est un contactomorphisme, alors  $\text{Gr}(\varphi)$  est une legendrienne pour le produit de contact.

**Définition 13.17** (Point discriminant).

Soit  $\varphi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$ , avec  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$  pour une 1-forme  $\alpha$ . Soit  $g$  telle que  $\varphi^* \alpha = e^g \alpha$ . On dit que  $q \in M$  est un point discriminant pour  $\varphi$  si :

- $\varphi(q) = q$  ;
- $g(q) = 0$ .

**Proposition 13.18.**

Un point  $q \in M$  est discriminant indépendamment du choix de  $\alpha$ .

Si  $q$  est discriminant pour  $\varphi$ , alors  $\psi(q)$  est discriminant pour  $\psi\varphi\psi^{-1}$ .

Soit  $\Delta := \{(q, q, 0) \in M \times M \times \mathbb{R}\}$ . Alors  $\text{Gr}(\varphi) \cap \Delta = \emptyset$  si et seulement si  $\varphi$  n'a pas de point discriminant.

## 14 Distance de Hofer (27 mai, Frédéric Bourgeois)

Dans ce qui suit,  $(M, \omega)$  est une variété symplectique. Le but de cet exposé est de définir la distance de Hofer, et de présenter quelques-unes de ses propriétés fondamentales, notamment le fait que c'est une distance.

### 14.1 Définition de la distance de Hofer

Rappelons tout d'abord quelques définitions utilisées lors de l'exposé 3.

**Définition 14.1** (Difféomorphisme symplectique).

Un difféomorphisme  $\psi$  de  $(M, \omega)$  est dit symplectique si  $\psi^*\omega = \omega$ .

On note  $\text{Symp}(M, \omega)$  le groupe des difféomorphismes symplectiques de  $(M, \omega)$ , et  $\text{Symp}_0(M, \omega)$  sa composante neutre.

**Définition 14.2** (Difféomorphisme hamiltonien).

Un difféomorphisme  $\psi$  de  $(M, \omega)$  est dit hamiltonien s'il existe  $H \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], \mathbb{R})$  tel que le champ de vecteurs  $(X_{H,t})_{t \in [0,1]}$  défini par  $i(X_{h,t})\omega = dH_t$  s'intègre en un flot  $(\psi_H^t)_{t \in [0,1]}$ , et  $\psi = \psi_H^1$ .

On note  $\text{Ham}(M, \omega)$  le groupe des difféomorphismes hamiltoniens de  $(M, \omega)$ .

Remarquons que  $\text{Ham}(M, \omega) \subset \text{Symp}_0(M, \omega)$  (car le flot  $(\psi_H^t)_{t \in [0,1]}$  réalise l'isotopie souhaitée), avec égalité si  $H^1(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ .

Si  $M$  est non compacte, on travaille plutôt avec les difféomorphismes à support compact, et on définit de façon similaire les groupes  $\text{Symp}_c(M, \omega)$ ,  $\text{Symp}_{c,0}(M, \omega)$  et  $\text{Ham}_c(M, \omega)$ .

Passons maintenant à la définition de l'énergie de Hofer.

**Définition 14.3** (Norme d'oscillation).

Pour tout  $H \in \mathcal{C}_c^\infty(M \times [0, 1], \mathbb{R})$ , on définit la norme d'oscillation de  $H$  par :

$$\|H\|_{\text{Osc}} := \int_0^1 [\max_{x \in M} H(x, t) - \min_{x \in M} H(x, t)] dt.$$

**Définition 14.4** (Énergie de Hofer).

Pour tout  $\psi \in \text{Ham}_c(M, \omega)$ , on définit l'énergie de Hofer de  $\psi$  par :

$$E(\psi) := \inf\{\|H\|_{\text{Osc}} \mid H \in \mathcal{C}_c^\infty(M \times [0, 1], \mathbb{R}), \psi_H^1 = \psi\}.$$

**Proposition 14.5.**

Pour tous  $\psi, \varphi \in \text{Ham}_c(M, \omega)$ ,

1.  $E(\psi) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $\psi = \text{id}$  (séparation) ;
2.  $E(\psi) = E(\psi^{-1})$  (symétrie) ;
3.  $E(\varphi\psi) \leq E(\varphi) + E(\psi)$  (inégalité triangulaire) ;
4.  $E(\varphi\psi\varphi^{-1}) = E(\psi)$  (invariance par conjugaison).

La première de ces propriétés (la séparation) est délicate à démontrer ; pour l'instant, concentrons-nous sur les autres.

*Démonstration.*

Symétrie : on renverse le temps. Si  $(H_t)$  engendre  $(\psi_H^t)$ , alors  $(-H_t \circ \psi_H^t)$  engendre  $((\psi_H^t)^{-1})$ , et a la même oscillation que  $(H_t)$ .

Inégalité triangulaire : si  $(H_t)$  engendre  $(\psi_H^t)$  et  $(K_t)$  engendre  $(\varphi_K^t)$ , alors  $(H_t + K_t \circ (\psi_H^t)^{-1})$  engendre  $(\psi_H^t \circ \varphi_K^t)$ , et a une oscillation d'au plus  $\|H\|_{\text{Osc}} + \|K\|_{\text{Osc}}$  par l'inégalité triangulaire pour  $\|\cdot\|_{\text{Osc}}$ .

Invariance par conjugaison : si  $(H_t)$  engendre  $(\psi_H^t)$ , alors  $(H_t \circ \varphi)$  engendre  $(\varphi \circ \psi_H^t \circ \varphi^{-1})$ , et a la même oscillation que  $(H_t)$ .  $\square$

**Définition 14.6** (Distance de Hofer).

La distance de Hofer  $d_{\text{Hof}}$  sur  $\text{Ham}_c(M, \omega)$  est définie pour tous  $\psi, \varphi \in \text{Ham}_c(M, \omega)$  par :

$$d_{\text{Hof}}(\varphi, \psi) := E(\varphi^{-1}\psi).$$

Remarquons que :

$$d_{\text{Hof}}(\varphi, \psi) = \inf\{\|H - K\|_{\text{Osc}} \mid H, K \in \mathcal{C}_c^\infty(M \times [0, 1], \mathbb{R}), \psi_H^1 = \psi, \varphi_K^1 = \varphi\}.$$

En effet,  $((H_t - K_t) \circ \psi_H^t)$  engendre  $((\psi_H^t)^{-1} \circ \varphi_K^t)$ .

Les propriétés de l'énergie de Hofer se traduisent immédiatement en propriétés de la distance de Hofer :

**Proposition 14.7.**

Pour tous  $\psi, \varphi, \theta \in \text{Ham}_c(M, \omega)$ ,

1.  $d_{\text{Hof}}(\varphi, \psi) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $\psi = \varphi$  (séparation);
2.  $d_{\text{Hof}}(\varphi, \psi) = d_{\text{Hof}}(\psi, \varphi)$  (symétrie);
3.  $d_{\text{Hof}}(\varphi, \psi) \leq d_{\text{Hof}}(\varphi, \theta) + d_{\text{Hof}}(\theta, \psi)$  (inégalité triangulaire);
4.  $d_{\text{Hof}}(\theta\varphi, \theta\psi) = d_{\text{Hof}}(\varphi, \psi) = d_{\text{Hof}}(\varphi\theta, \psi\theta)$  (bi-invariance).

**Remarque 14.8.**

D'après Ostrover, Wagner, Buhovsky [10, 2], si  $(M, \omega)$  est fermée, alors toute pseudo-métrique finslérienne bi-invariante sur  $\text{Ham}(M, \omega)$  obtenue par intégration sur  $[0, 1]$  d'une pseudo-norme sur  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$  continue pour la topologie  $\mathcal{C}^\infty$  est soit identiquement nulle, soit équivalente à la distance de Hofer.

Par exemple, si on remplace  $\|\cdot\|_{\text{Osc}}$  ( $\sim \|\cdot\|_\infty$ ) par  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^p}$  pour un  $p \in [1, +\infty)$  sur  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}})$ , la pseudo-métrique obtenue est nulle [6]. Pour  $p = 1$ , on a  $d(\psi, \text{id}) = 0$  dès que  $\int_{M \times [0, 1]} H = 0$ .

## 14.2 Inégalité énergie-capacité

Passons maintenant à la démonstration du premier point de la Proposition 14.5 : si  $E(\psi) = 0$ , alors  $\psi = \text{id}$ . Elle repose sur le (difficile) théorème suivant, dû entre autres à Hofer, Zehnder, Usher :

**Théorème 14.9** (Inégalité énergie-capacité).

Pour tout  $\psi \in \text{Ham}_c(M, \omega)$ ,

$$E(\psi) \geq \sup\{c_{\text{HZ}}^0(U) : U \text{ ouvert}, \psi(U) \cap U \neq \emptyset\}. \quad (14.1)$$

De façon équivalente,

$$\inf\{E(\psi) : \psi(U) \cap U = \emptyset\} \geq c_{\text{HZ}}^0(U).$$

Le membre de gauche de l'équation ci-dessus est l'énergie de déplacement de  $U$ , tandis que le membre de droite est la capacité de Hofer-Zehnder de  $U$ .

**Définition 14.10** (Capacité de Hofer-Zehnder).

Soit  $U$  un ouvert de  $(M, \omega)$ . On pose :

$$\mathcal{H}(U) := \{H \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}_+) \mid \text{Supp}(H) \subset U, H^{-1}(\max(H)) \text{ contient un ouvert non vide}\}.$$

En particulier, le maximum d'un hamiltonien dans  $\mathcal{H}(U)$  doit être atteint. Un hamiltonien  $H \in \mathcal{H}(U)$  est dit  $HZ^0$ -admissible si  $\psi_H^t$  n'a pas d'orbite périodique non constante et contractile de période plus petite que 1. On pose alors :

$$c_{HZ}^0(U) = \sup\{\max H : H \in \mathcal{H}(U), H \text{ admissible}\}.$$

Cette définition mérite quelques remarques. Plus  $\max H$  est élevé, plus le gradient de  $H$  doit être élevé, et donc plus l'intensité du champ de vecteur  $X_H$  est élevée près du bord de  $U$  (la condition que le maximum doit être atteint sur un ouvert non vide permettant d'éviter certaines pathologies). Dans toutes les situations considérées, on peut montrer l'existence d'orbites périodiques ; ainsi, plus  $\max H$  est élevé, plus ces orbites périodiques sont de périodes petites. Autrement dit, la contrainte que les orbites périodiques soient de périodes au moins 1 force  $\max H$  à ne pas être trop grand, et d'autant plus petit que  $U$  est moins épais (en un sens symplectique).

L'exposant 0 dans l'expression  $c_{HZ}^0(U)$  signifie que la contrainte ne porte que sur les orbites contractiles ; si  $U$  n'est pas simplement connexe, on peut définir une autre capacité en faisant porter la contrainte sur toutes les orbites périodiques.

La capacité de Hofer-Zehnder est un exemple de capacité symplectique.

**Définition 14.11** (Capacité symplectique).

Une capacité symplectique est une application qui à une variété symplectique  $(M, \omega)$  associe un réel  $c(M, \omega) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  de telle sorte que :

- $c(M, \omega) \leq c(N, \sigma)$  s'il existe un plongement symplectique de  $(M, \omega)$  dans  $(N, \sigma)$  (monotonie) ;
- $c(M, \alpha\omega) = |\alpha|c(M, \omega)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  (homogénéité) ;
- $c(B_{2n}(1), \omega_{\text{std}}) = \pi = c(Z(1), \omega_{\text{std}})$ , où  $Z(1) = B_2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2}$  (compatibilité avec le non-squeezing theorem de Gromov).

La non-dégénérescence de  $E$  se déduit de l'inégalité énergie-capacité.

*Démonstration de la non-dégénérescence de  $E$ .*

Supposons que  $\psi \neq \text{id}$ . Soit  $x^* \in M$  tel que  $\psi(x^*) \neq x^*$ , et soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\psi(B(x^*, \varepsilon)) \cap B(x^*, \varepsilon) = \emptyset$ . On a  $c_{HZ}^0(B(x^*, \varepsilon)) = \pi\varepsilon^2 > 0$ . Par l'inégalité énergie-capacité,  $E(\psi) \geq \pi\varepsilon^2 > 0$ .  $\square$

## 14.3 Propriétés plus avancées

Pour finir, présentons quelques propriétés plus avancées de la distance de Hofer.

### 14.3.1 Une distance non bornée

On ne connaît pas d'exemple de variété symplectique  $(M, \omega)$  telle que la distance de Hofer soit bornée sur  $\text{Ham}_c(M, \omega)$ .

### 14.3.2 Lien avec la topologie $\mathcal{C}^0$

**Théorème 14.12.**

Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $\psi \in \text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}})$ ,

$$E(\psi) \leq C \text{Diam}(\text{Supp}(\psi))d_{\mathcal{C}^0}(\text{id}, \psi).$$

Cependant,  $d_{\text{Hof}}$  n'est pas continue sur  $\text{Ham}_c(\mathbb{S}_{2n}, \omega_{\text{std}})$  muni de la topologie  $\mathcal{C}^0$ .

### 14.3.3 Ordre partiel sur $\text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}})$

De même que lors de l'Exposé 13, on peut définir :

$$\begin{aligned}\text{Ham}_c^+(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}}) &= \{\psi \in \text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}}) \mid \psi = \psi_H^1 \text{ pour un } H \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2n} \times [0, 1], \mathbb{R}), H \geq 0\} \\ \text{Ham}_c^-(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}}) &= \{\psi \in \text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}}) \mid \psi = \psi_H^1 \text{ pour un } H \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2n} \times [0, 1], \mathbb{R}), H \leq 0\}.\end{aligned}$$

#### Théorème 14.13.

$$\text{Ham}_c^+(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}}) \cap \text{Ham}_c^-(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}}) = \{\text{id}\}.$$

Il s'ensuit :

#### Corollaire 14.14.

La relation  $\leq$  définie par  $\varphi \leq \psi$  si l'on a  $\psi\varphi^{-1} \in \text{Ham}_c^+(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}})$  induit un ordre partiel sur  $\text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}})$ .

### 14.3.4 Comparaison avec un distance des mots

Supposons  $M$  fermée et connexe. Alors  $\text{Ham}(M, \omega)$  est simple. Soit  $\psi \neq \text{id}$  un difféomorphisme hamiltonien, et posons :

$$\begin{aligned}S &= \{\psi, \psi^{-1}\}, \\ \bar{S} &= \bigcup_{\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)} \varphi S \varphi^{-1}.\end{aligned}$$

Alors  $\bar{S}$  engendre  $\text{Ham}(M, \omega)$ . Soit  $d_{\bar{S}}$  la distance des mots associée. Alors :

$$d_{\bar{S}}(\varphi, \text{id}) \geq \frac{1}{E(\psi)} d_{\text{Hof}}(\varphi, \text{id}). \quad (14.2)$$

## 15 Simplicité uniforme des groupes de difféomorphismes (3 juin, Patrick Massot)

La simplicité des groupes de difféomorphismes a été abordée au cours de l'exposé 11. Le but de cet exposé est de montrer comment améliorer ce résultat (difficile) pour obtenir la simplicité *uniforme* de ces groupes, et en particulier d'éclairer le :

**Théorème 15.1** (Burago, Ivanov, Polterovich en dimension 3 [3]; Tsuboi [15]).

Soit  $M$  une variété différentielle compacte connexe sans bord de dimension  $n \neq 2, 4$ . Soit  $r \geq 1$  avec  $r \neq n + 1$ . Alors  $\text{Diff}_0^r(M)$  est uniformément simple : il existe  $N \geq 0$  tel que, pour tous  $f \in \text{Diff}_0^r(M)$  et  $g \in \text{Diff}_0^r(M) \setminus \{\text{id}\}$ , il existe  $k \leq N$  et  $(h_i)_{1 \leq i \leq k}$  tels que :

$$f = \prod_{i=1}^k h_i g^{\pm 1} h_i^{-1}.$$

Dans la suite, on notera  $G = \text{Diff}_0^r(M)$ .

**Corollaire 15.2.**

Sous les hypothèses du théorème précédent, toute distance bi-invariante sur  $G$  est bornée.

### 15.1 Observations fondamentales

Pour commencer, rappelons comment construire des normes invariantes par conjugaison (et de là des distances bi-invariantes) sur  $G$ . Soit  $S$  une partie génératrice de  $G$ , et soit  $\nu_S$  la distance des mots associée :

$$\nu_S(g) = \min\{k \geq 0 \mid \exists s_1, \dots, s_k \in S, g = \prod_{i=1}^k s_i^{\pm 1}\}.$$

Si  $G$  est invariante par conjugaison, alors  $\nu_S$  l'est aussi. On peut prendre par exemple :

- $S = [G, G]$ . Si  $G$  est parfait,  $S$  engendre  $G$ , et la norme obtenue est la *norme des commutateurs*.
- $S = \{g \mid \text{Supp}(g) \subset \text{boule}\}$ , en particulier pour les sous-groupes d'homéomorphismes ou de difféomorphismes.

Profitons-en pour faire les deux observations suivantes, que nous utiliserons par la suite :

- Soient  $g, h \in G$ . Si  $\text{Supp}(g) \cap \text{Supp}(h) = \emptyset$ , alors  $gh = hg$ .
- $\text{Supp}(hgh^{-1}) = h(\text{Supp}(g))$ .

Présentons maintenant deux lemmes importants

### 15.2 Troc commutateurs/conjugaisons

Le premier lemme permet de transformer des commutateurs en conjugaisons.

**Lemme 15.3.**

Soient  $a, b, g \in G$ . Si  $\text{Supp}(a) \cap g(\text{Supp}(b)) = \emptyset$ , alors  $[a, b]$  est un produit d'au plus 4 conjugaisons de  $g$  ou  $g^{-1}$ .

*Démonstration.*

Soit  $\alpha := g^{-1}ag$ . Par hypothèse,  $\alpha$  et  $b$  sont à supports disjoints, donc  $\alpha b = b\alpha$ . De là :

$$\begin{aligned} [a, b] &= aba^{-1}b^{-1} \\ &= (g\alpha g^{-1})b(g\alpha^{-1}g^{-1})b^{-1} \\ &= g\alpha g^{-1}\alpha^{-1}\alpha b g\alpha^{-1}b^{-1}b g^{-1}b^{-1} \\ &= g(\alpha g^{-1}\alpha^{-1})(b\alpha g\alpha^{-1}b^{-1})(b g^{-1}b^{-1}), \end{aligned}$$



où le fait que  $ab = ba$  a été utilisé pour obtenir la dernière ligne. □

### 15.3 Réduction des commutateurs

Le second lemme permet de réduire le nombre de commutateurs dans expression.

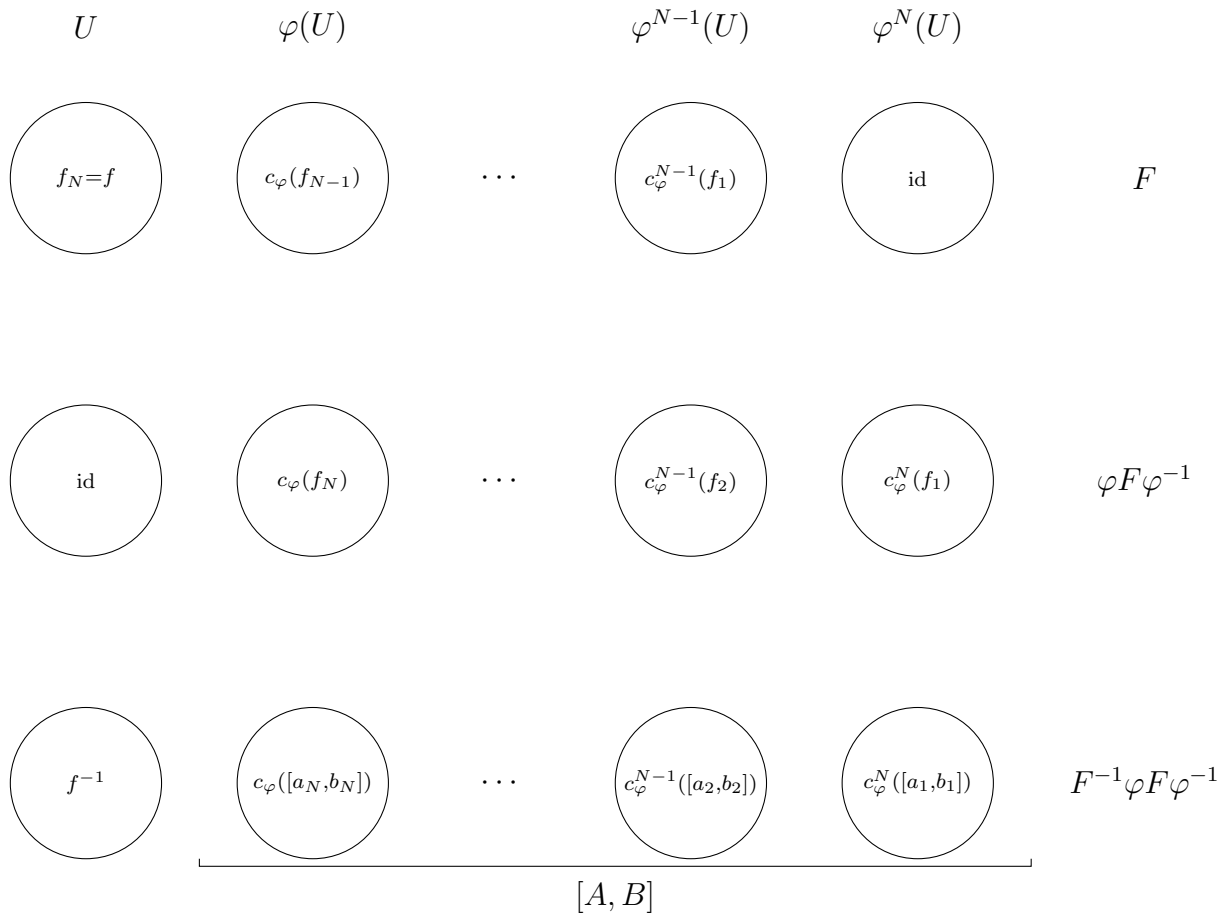
**Lemme 15.4.**

Soit  $U \subset M$ . Supposons qu'il existe  $\varphi \in G$  tel que les  $(\varphi^i(U))_{i \geq 0}$  soient deux à deux disjoints.

Soit  $f \in G$  et  $N \geq 0$ . Si  $f$  est produit de  $N$  commutateurs  $[a_i, b_i]$  avec  $\text{Supp}(a_i), \text{Supp}(b_i) \subset U$ , alors  $f$  est produit de 2 commutateurs.

*Démonstration.*

On a  $f = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ . Pour  $0 \leq k \leq N$ , posons  $f_k = \prod_{i=1}^k [a_i, b_i]$ , avec en particulier  $f_0 = \text{id}$  et  $f_N = f$ . Posons de plus  $F = \prod_{i=1}^N \varphi^{N-i} f_i \varphi^{-(N-i)}$ . Dans ce qui suit, on note  $c_\varphi$  la conjugaison par  $\varphi$ .



Conjugaison de  $F$  et  $\varphi$ .

On a donc  $F^{-1} \varphi F \varphi^{-1} = f^{-1} [A, B]$ , soit  $f = [A, B] [F, \varphi^{-1}]$ . □

### 15.4 Conclusion

Soit  $n \geq 0$  et  $r \geq 1$  avec  $r \neq n + 1$ . Le groupe  $\text{Diff}_{c,0}^r(\mathbb{R}^n)$  étant simple, les Lemmes 15.3 et 15.4 permettent de montrer immédiatement que  $\text{Diff}_{c,0}^r(\mathbb{R}^n)$  est uniformément simple.

Le cas de variétés générales est un peu plus délicat. Soit  $M$  une variété compacte connexe sans bord de dimension  $2n + 1 \geq 7$ . Par la théorie de Morse, on dispose d'une décomposition  $M = H_0 \text{ sup } H_1$ ,

où  $H_0, H_1$  sont des sous-variété de codimension 0 à bord, et se rétractent par isotopie sur des sous-variétés sigulières  $\Sigma_0, \Sigma_1$  de dimension au plus  $n$ .

Si  $f = f_0 f_1$  avec  $\text{Supp}(f_i) \subset H_i$ , alors  $f$  est un produit d'au plus 16 conjugués de  $g^{\pm 1}$ , où  $g$  déplace  $\Sigma_0 \subset \Sigma_1$ .

Par hypothèse,  $f$  est dans la composante neutre de  $\text{Diff}^r(M)$ . Il existe donc une isotopie  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\text{id}$  à  $f$ . Si  $f_t(\Sigma_0) \cap \Sigma_1 = \emptyset$  pour tout  $t$ , alors on peut trouver  $h_0, h_1$  comme on veut, en partant du champ de vecteurs  $X_t = \frac{df}{dt} \circ f_t^{-1}$  que l'on coupe par une fonction plateau.

## Références

- [1] A. Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*. En français. Commentarii Mathematici Helvetici, **53** (1978), no. 2, 174–227.
- [2] L. Buhovsky et Y. Ostrover, *On the uniqueness of Hofer’s geometry*. Geometric and Functional Analysis, **21** (2011), no. 6, 1296–1330.
- [3] D. Burago, S. Ivanov et L. Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*. Groups of Diffeomorphisms, 221–250, Advanced Studies in Pure Mathematics, **52**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2008.
- [4] V. Colin et S. Sandon, *The discriminant and oscillation lengths for contact and Legendrian isotopies*. Journal of the European Mathematical Society (JEMS), **17** (2015), no. 7, 1657–1685.
- [5] R. D. Edwards et R. C. Kirby, *Deformations of spaces of imbeddings*. Annals of Mathematics, **93** (1971), no. 2, 63–88.
- [6] Y. Eliashberg et L. Polterovich, *Bi-invariant metrics on the group of Hamiltonian diffeomorphisms*. International Journal of Mathematics, **4** (1993), no. 5, 727–738.
- [7] Y. Eliashberg et L. Polterovich, *Partially ordered groups and geometry of contact transformations*. Geometric and Functional Analysis, **10** (2000), no. 6, 1448–1476.
- [8] F. Le Roux et K. Mann, *Strong distortion in transformation groups*. Bulletin of the London Mathematical Society, **50** (2018), no. 1, 46–62.
- [9] K. Mann et C. Rosendal, *Large-scale geometry of homeomorphism groups*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, **38** (2018), no. 7, 2748–2779.
- [10] Y. Ostrover et R. Wagner, *On the extremality of Hofer’s metric on the group of Hamiltonian diffeomorphisms*. International Mathematics Research Notices (IMRN) (2018), no. 35, 2123–2141.
- [11] C. Rosendal, *A topological version of the Bergman property*. Forum Mathematicum, **21** (2009), no. 2, 299–332.
- [12] C. Rosendal, *Coarse geometry of topological groups*. Disponible à l’adresse <http://homepages.math.uic.edu/~rosendal/PapersWebsite/Coarse-Geometry-Book23.pdf>, version de février 2019.
- [13] T. Rybicki, *Commutators of contactomorphisms*. Advances in Mathematics, **225** (2010), no. 6, 3291–3326.
- [14] T. Rybicki, *Boundedness of certain automorphism groups of an open manifold*. Geometriae Dedicata, **151** (2011), 175–186.
- [15] T. Tsuboi, *On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds*. Commentarii Mathematici Helvetici, **87** (2012), no. 1, 141–185.