

Théorie ergodique, théorie du potentiel : Étude d'extensions abéliennes

**Habilitation à diriger des recherches
de l'Université Paris-Saclay**

**présentée et soutenue à Orsay,
le 10 décembre 2025, par**

Damien THOMINE

Composition du jury

Jérôme Buzzi

Directeur de Recherche,
Université Paris-Saclay

Rapporteur et examinateur

Jean-René Chazottes

Directeur de Recherche,
École Polytechnique

Examinateur

Mark Demers

Professeur,
Fairfield University

Rapporteur

Florence Merlevède

Professeure des Universités,
Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Examinatrice

Thierry de la Rue

Chargé de Recherche HDR,
Université de Rouen Normandie

Examinateur

Hans-Henrik Rugh

Professeur des Universités,
Université Paris-Saclay

Examinateur

Benoît Saussol

Professeur des Universités,
Aix Marseille Université

Rapporteur et examinateur

Barbara Schapira

Professeure des Universités,
Université de Montpellier

Examinatrice

Théorie ergodique, théorie du potentiel :
Étude d'extensions abéliennes

Damien THOMINE

Titre : Théorie ergodique, théorie du potentiel : Étude d'extensions abéliennes

Mots clés : Théorie ergodique, Théorie du potentiel, Marche aléatoire, Métastabilité

Résumé : Ce mémoire présente des travaux à l'intersection de deux traditions mathématiques : d'une part l'analyse spectrale des opérateurs de transfert en théorie ergodique, et d'autre par la théorie probabiliste du potentiel, qui porte sur les chaînes de Markov.

Les extensions abéliennes sont une généralisation, dans le cadre des systèmes dynamiques, des marches aléatoires. Les techniques développées pour les marches aléatoires se transposent parfois à ces extensions : le théorème central limite et le théorème central limite local en sont des exemples.

Nous présentons ici une transposition de la théorie probabiliste du potentiel, et plus précisément le calcul de probabilités d'atteintes entre parties éloignées d'un tel système dynamique.

Ce sujet est en outre l'occasion de découvrir diverses facettes de la théorie des systèmes dynamiques : théorèmes limites en loi pour des sommes de Birkhoff ; résonances de Ruelle pour des billards de Sinaï ; identité de balayage, invariants d'induction et formule de Green-Kubo ; ou encore temps d'atteinte de petites cibles et états métastables pour n'en citer que quelques-uns.

Title : Ergodic theory, potential theory : A study of Abelian extensions

Keywords : Ergodic theory, Potential theory, Random walk, Metastability

Abstract : The works included in this memoir are at the intersection of two mathematical traditions : spectral analysis of transfer operators in ergodic theory on the one hand, and probabilistic potential theory - which applies to Markov processes - on the other hand.

Abelian extensions are a generalization, in the setting of dynamical systems, of random walks. Tools developed for random walks may sometimes be transposed to these extensions. This is the case, for instance, of the Central Limit Theorem and the Local Central Limit Theorem.

We present therein a transposition of the probabilistic potential theory, more precisely the computation of hitting probabilities between parts of such a system which are far enough one from the other.

This subject is also an opportunity to discover other aspects of dynamical systems : limits in distribution for Birkhoff sums ; Ruelle resonances for Sinaï billiards ; balayage identity, induction invariants and the Green-Kubo formula ; or hitting time of small targets and metastability.

Table des matières

I Théorie spectrale de l'opérateur de transfert	13
1 Dynamiques expansives	13
1.1 Transformations expansives	13
1.2 Transformations du cercle et de l'intervalle	13
1.3 Transformations markoviennes	16
2 Un point de vue mesuré	18
2.1 Mesures invariantes	18
2.2 Distorsion höldérienne et propriété de Gibbs	21
2.3 Transformations Gibbs-Markov	22
2.4 Exemples de transformations Gibbs-Markov	23
3 L'opérateur de transfert	35
3.1 Opérateur de Koopman	35
3.2 Définition de l'opérateur de transfert	36
3.3 Quasi-compacité	37
3.4 Exemples d'espaces de Banach adaptés	44
3.5 Perturbations	50
3.6 Application : Le théorème central limite	53
II \mathbb{Z}^d-extensions	59
4 Définition des \mathbb{Z}^d-extensions	59
4.1 Le gaz de Lorentz	59
4.2 Définition	62
5 Fonctions propres de l'opérateur de transfert	63
5.1 Fonctions propres et extensions abéliennes	63
5.2 Spectre périphérique, II : Ergodicité des extensions	64
5.3 Spectre périphérique, III : Apériodicité	65
5.4 Application : Résonances dans les billards de Sinaï	66
5.5 Pour aller plus loin : Résonances pour le flot billard	70
6 Théorème central limite local	71
6.1 Conservativité des \mathbb{Z}^d -extensions	71
6.2 Probabilité d'être en $[0]$	73
6.3 Loi du temps passé en $[0]$	75
6.4 Observables d'intégrale nulle, I : Méthode des moments	78
III Transformations induites et théorie du potentiel	83

7 Cadre probabiliste : Chaînes de Markov induites	83
7.1 Chaînes de Markov	83
7.2 Probabilités d'atteinte, I : Fonctions harmoniques	85
7.3 Probabilités d'atteinte, II : Premier retour	87
8 Transformations induites	90
8.1 Définition	90
8.2 Identité de balayage pour l'opérateur de Koopman	91
8.3 Identité de balayage pour l'opérateur de transfert	92
8.4 Pour aller plus loin : Induction probabiliste	94
9 Invariants par induction	95
9.1 Lemme de Kac	95
9.2 Formule de Green–Kubo	97
9.3 Observables d'intégrale nulle, II : Induction	99
9.4 Invariant de degré 3	101
9.5 Pour aller plus loin : Invariants de degré supérieur	104
IV Théorie du potentiel et \mathbb{Z}^d-extensions	107
10 Cadre probabiliste : Marches aléatoires	108
10.1 Probabilités d'atteinte de marches aléatoires	108
10.2 Interprétation électrocinétique	110
11 Cadre dynamique et stratégie	111
11.1 Probabilités de transition dans les \mathbb{Z}^d -extensions	111
11.2 Identité de balayage et opérateur de transfert	112
11.3 Potentiel et transformée de Fourier	113
11.4 Formes limites	114
11.5 Limite de l'opérateur potentiel discrétilisé	114
12 Systèmes à transitions rares	115
12.1 Événements rares	116
12.2 Systèmes à transitions rares	122
13 Calcul asymptotique des probabilités d'atteinte	125
13.1 Argument principal, cas mélangeant	125
13.2 Périodicité et structure des extensions ergodiques	129
13.3 Quelques exemples	131
13.4 Observables d'intégrale nulle, III : Formule de Green–Kubo	133
13.5 Pour aller plus loin : Autour de la théorie du potentiel	134
Conclusion	139
Bibliographie	143

Remerciements

Je remercie vivement Jérôme BUZZI, Mark DEMERS et Benoît SAUSSOL, qui ont accepté de lire et de rapporter ce texte, et ce malgré la barrière de la langue pour Mark. Merci également à Jean-René CHAZOTTES, Florence MERLEVÈDE, Thierry DE LA RUE, Hans-Henrik RUGH et Barbara SCHAPIRA pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je serai toujours reconnaissant à celles et ceux qui m'ont initié à la recherche mathématique et à la théorie ergodique, en particulier Viviane BALADI, Gerhard KELLER et Sébastien GOUËZEL. Les travaux que j'aborderai ici doivent aussi beaucoup à mes collaborateurs et collaboratrices. Je me dois de commencer par Françoise PÈNE, co-autrice de plusieurs des articles que je présenterai, complice dans des projets de diffusion des mathématiques, et qui m'a été un soutien précieux. Je remercie aussi, à ce titre, Alexey KOREPANOV et Douglas COATES. Enfin, bien que je ne les mentionnerai pas dans ce texte, les mathématiques formalisées sont devenues un autre de mes terrains de jeu, ce pour quoi je suis reconnaissant à Sébastien GOUËZEL, Patrick MASSOT ou encore Pietro MONTICONE, pour ne mentionner qu'eux.

Si ce mémoire consacre un travail de recherche, l'enseignement et la diffusion sont d'autres facettes du métier d'enseignant-chercheur. Là encore, sans pouvoir être exhaustif, j'aimerais remercier Anne BROISE et Mélanie GUENAIS pour tout ce qu'elles m'ont appris, ainsi que les projets que nous avons pu monter avec plus ou moins de succès. Merci aussi à Thomas MORAND ; le rôle de directeur de thèse est aussi un rôle où l'on apprend beaucoup. Merci enfin à tous les étudiants qui font que ce travail en vaut la peine.

Merci aux collègues et anciens collègues du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, et de l'équipe Topologie et Dynamique en particulier, pour leur accueil et leur soutien : dans un ordre essentiellement géographique et très lacunaire, Sylvain, Anne, Rémi, Jean, Thi, Frédéric(s), Ramanujan, Thierry, Dominique, Camille, Thomas, Daniel, Yves... La liste est heureusement longue, et malheureusement omettra de nombreuses personnes qui mériteraient d'en faire partie.

À Blandine, toujours.

Introduction

Au cours des dix années passées, un projet de recherche m'a particulièrement tenu à cœur. Il porte sur les applications de la *théorie probabiliste du potentiel* à une classe de systèmes dynamiques, les \mathbb{Z}^d -extensions, et a donné lieu à quatre publications [184, 185, 222, 226].

L'objet final de ce projet a été l'étude des probabilités de transitions dans des \mathbb{Z}^d -extensions récurrentes. Ces systèmes dynamiques généralisent les marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d . Le calcul de probabilités de transition de marches aléatoires est établi depuis longtemps, et fait appel à la théorie probabiliste du potentiel [213]. On s'attend à pouvoir développer une théorie similaire pour des \mathbb{Z}^d -extensions dont les transitions sont engendrées par un système dynamique chaotique.

Adapter la théorie du potentiel à de tels systèmes dynamiques ne se fait pas sans mal. Cela demande une assez large variété de techniques et des idées de nature dynamique : opérateur de transfert, perturbations de valeurs propres, méthode de Nagaev–Guivarc'h, temps d'atteinte de petits événements, théorèmes limites distributionnels... La seule formulation du cadre de recherche et des énoncés n'est pas évidente.

Ce mémoire, au-delà d'une présentation des principaux résultats de ce projet, se veut une introduction à ce domaine de recherche. J'y présenterai les principales idées et techniques en jeu, avec pour objectif de remettre dans leur contexte les problématiques et la stratégie de [226]. J'y ai inclus certaines démonstrations, souvent simplifiées, quand il m'a semblé que les techniques utilisées étaient suffisamment générales.

Les quatre travaux au centre de ce mémoire, par ordre chronologique d'écriture, sont les suivants :

Travaux portant sur la théorie probabiliste du potentiel

- [222] *Variations on a central limit theorem in infinite ergodic theory*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, **35** (2015), no. 5, 1610–1657.
- [185] *Probabilistic potential theory and induction of dynamical systems*. Avec Françoise Pène. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, **57** (2021), no. 3, 1736–1767.
- [184] *Potential kernel, hitting probabilities and distributional asymptotics*. Avec Françoise Pène. Ergodic Theory and Dynamical Systems, **40** (2020), no. 7, 1894–1967.
- [226] *Potential theory and \mathbb{Z}^d -extensions*. arXiv :2112.08339v1. Déposé le 15 décembre 2021. À paraître aux Mémoires de la Société Mathématique de France. 83 pp.

J'ai cependant pour objectif de présenter diverses techniques de théorie ergodique. J'en profiterai pour aborder, à l'occasion, mes autres travaux de recherche, qui ne sont pas si éloignés.

Autres travaux de l'auteur

- [220] *A spectral gap for transfer operators of piecewise expanding maps.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, **30** (2011), no. 3, 917–944.
- [221] *A generalized central limit theorem in infinite ergodic theory.* Probability Theory and Related Fields, **158** (2014), no. 3-4, 597–636.
- [223] *Local time and first return time for periodic semi-flows.* Israel Journal of Mathematics, **215** (2016), no. 1, 53–98.
- [224] *Sinaï billiard maps with Ruelle resonances.* Nonlinearity, **33** (2020), no. 12, 6971.
- [225] *Keplerian shear in ergodic theory.* Annales Henri Lebesgue, **3** (2020), 649–676.
- [186] *Central limit theorems for the \mathbb{Z}^2 -periodic Lorentz gas.* Avec Françoise Pène. Israel Journal of Mathematics, **241** (2021), 539–582.

Afin de les distinguer des autres travaux, à partir de maintenant, les articles de recherche auxquels j'ai contribué seront cités en **rouge**.

Ce texte est structuré comme suit. La première partie, *Théorie spectrale de l'opérateur de transfert*, est une introduction générale aux systèmes dynamiques chaotiques, y compris du point de vue mesuré. J'y introduit ensuite les outils principaux de ces travaux : l'opérateur de transfert, ses propriétés spectrales et ses perturbations. Cette partie se termine par une démonstration, classique, du théorème central limite pour des systèmes dynamiques par la méthode de Nagaev–Guivarc'h.

Dans la seconde partie, \mathbb{Z}^d -extensions, nous introduirons lesdites extensions, qui généralisent les marches aléatoires. Les méthodes spectrales de la première partie, poussées dans leurs retranchements, donneront les premiers théorèmes de [185]. J'en profiterai aussi pour parler de résonances de Ruelle dans les billards [224].

La troisième partie, *Transformations induites et théorie du potentiel*, part dans une autre direction. Les objets centraux sont la notion de système induit et ses liens avec la théorie du potentiel via l'identité de balayage. Si cette partie est essentiellement extraite de [184], je reviendrai brièvement sur certains de mes travaux de thèse [221, 222].

Tous les éléments sont alors en place pour la quatrième partie, *Théorie du potentiel et \mathbb{Z}^d -extensions*, qui se concentre sur [226].

Enfin, j'ai choisi d'achever ce mémoire sur une conclusion qui présente un autre point de vue sur ces recherches : non pas une synthèse, mais un récit du déroulement de ce projet.

Les buts d'un tel mémoire sont multiples : introduction à un domaine de recherche, revue – partielle et partielle – de la littérature, présentation d'un projet de recherche achevé, offre de nouvelles pistes de recherches... J'espère avant tout que tout lecteur ou lectrice y trouvera quelque chose qui l'intéressera.

Première partie

Théorie spectrale de l'opérateur de transfert

Dans un premier temps, nous allons présenter divers exemples de systèmes dynamiques, du point de vue topologique (Section 1 : *Dynamiques expansives*) et mesuré (Section 2 : *Un point de vue mesuré*).

Nous nous attarderons, dans la Section 2, sur deux points plus spécialisés. D'une part, la théorie ergodique sera abordée dans le cadre de mesures potentiellement infinies, afin de pouvoir s'appliquer par la suite aux \mathbb{Z}^d -extensions. D'autre part, nous introduirons les transformations Gibbs-Markov, dont les propriétés sont utilisées extensivement dans [226], et jouent donc un rôle particulier dans le projet de recherche associé.

Enfin, la Section 3 : *L'opérateur de transfert* est dédiée aux opérateurs de transfert et aux propriétés spectrales de leur action sur des espaces de Banach bien choisis. Nous y aborderons notamment les espaces de distributions anisotropes, très utiles dans l'étude des transformations Anosov et des billards de Sinaï, ainsi que les perturbations d'opérateurs et leur application à la démonstration d'un théorème central limite.

1 Dynamiques expansives

1.1 Transformations expansives

Nous nous concentrerons dans cette partie du mémoire sur des dynamiques uniformément hyperboliques, et plus précisément des dynamiques expansives. Un cas particulier en est donné par les transformations uniformément dilatantes du cercle.

Définition 1.1 (Transformations expansives et uniformément expansives).

Soit (A, d) un espace métrique et $T : A \rightarrow A$ mesurable. Le système dynamique (A, d, T) est expansif s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \neq y$, il existe $n \geq 0$ tel que $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \delta$. Autrement dit, la dynamique va séparer d'au moins δ toute paire de points distincts.

Le système dynamique (A, d, T) est uniformément expansif s'il existe $\Lambda > 1$ et $\delta > 0$ tels que, pour tous x, y tels que $d(x, y) \leq \delta$,

$$d(T(x), T(y)) \geq \Lambda d(x, y).$$

L'expansivité uniforme implique l'expansivité avec la même constante δ . L'expansivité garantit une forme d'instabilité de la dynamique. Une erreur, aussi petite qu'elle soit, sur la condition initiale conduit à des trajectoires qualitativement différentes, à distance au moins δ l'une de l'autre à un instant donné. Donnons quelques exemples de telles dynamiques.

1.2 Transformations du cercle et de l'intervalle

Un exemple simple de dynamique expansive est donné par les *transformations uniformément dilatantes du cercle* ou de l'intervalle.

Définition 1.2 (Transformation $C^{1+\theta}$ uniformément dilatante du cercle).

Soit $\theta \in (0, 1)$. Une transformation $T : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ est $C^{1+\theta}$ uniformément dilatante¹ si :

1. Pour simplifier notre présentation, nous demandons ici que la transformation T elle-même soit uniformément dilatante. En général, il suffit d'exiger que T ait une itérée dilatante, c'est-à-dire qu'il existe $N \geq 1$ tel que $\min_{\mathbb{S}_1} |(T^N)'| > 1$.

- $T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$ et T' est θ -höldérienne,
- $\Lambda := \min_{\mathbb{S}_1} |T'| > 1$.

Une transformation $\mathcal{C}^{1+\theta}$ uniformément dilatante du cercle est uniformément expansive avec la même constante Λ . La condition de régularité de la dérivée T' n'a pas encore d'influence, mais sera primordiale quand nous étudierons les aspects mesurés de telles transformations.

Exemple 1.3.

Soient n un entier tel que $|n| \geq 2$ et t un réel tel que $|t| < \frac{\sqrt{\Phi}e^{1-\Phi}}{2\pi}(|n|-1) \simeq 0.109(|n|-1)$, où Φ est le nombre d'or. Alors la transformation

$$T_{n,t} : \begin{cases} \mathbb{S}_1 & \rightarrow \mathbb{S}_1 \\ x & \mapsto nx + te^{\sin(2\pi x)} \end{cases}$$

est une transformation analytique uniformément dilatante du cercle.

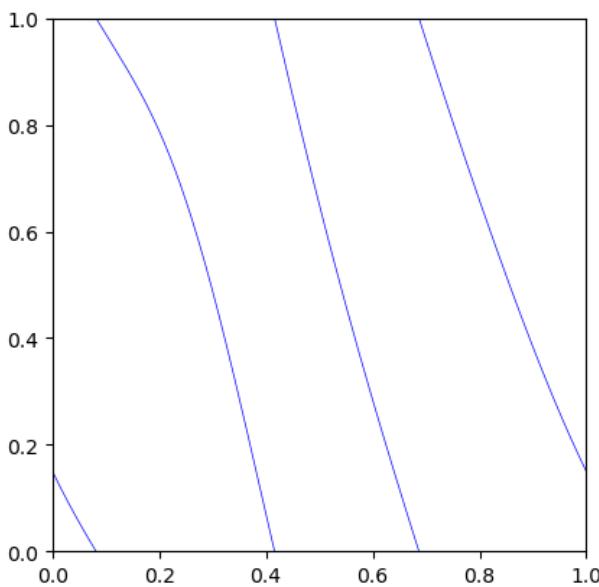


FIGURE 1 – Graphe de la transformation $T_{-3,0,15}$.

Donnons deux autres exemples de transformations expansives de l'intervalle, elles aussi ayant un caractère uniformément hyperbolique. Commençons par la famille des β -transformations. qui ne sont pas globalement $\mathcal{C}^{1+\theta}$ mais seulement lisses par morceaux.

Définition 1.4 (β -transformation de l'intervalle).

Soit $\beta > 1$. La β -transformation est définie par :

$$T_\beta : \begin{cases} [0, 1) & \rightarrow [0, 1) \\ x & \mapsto \beta x [1] \end{cases}$$

Soient $\beta > 1$ et $x \neq y \in [0, 1]$. La β -transformation T_β a une nombre fini de discontinuités, dont la taille est donc minorée par un $\delta_0 > 0$. Tant que $T^n(x)$ et $T^n(y)$ sont dans le même domaine de continuité de T^n , leur distance est multipliée par un facteur β à chaque itération. Comme $d(T^n(x), T^n(y))$ est borné par 1, les points $T^n(x)$ et $T^n(y)$ vont finir par tomber dans des domaines de continuité différents de T , disons à un instant $N \geq 1$. Si $T^N(x)$ et $T^N(y)$ sont trop proches, ils vont être très

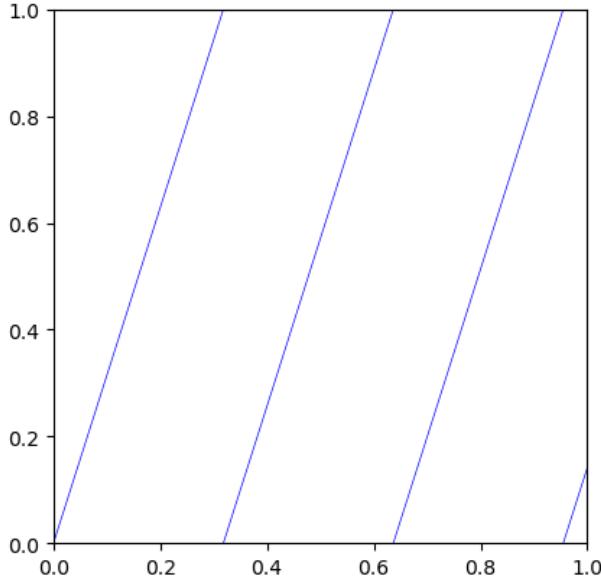


FIGURE 2 – Graphe de la β -transformation T_π .

proches et de part et d'autre d'une même discontinuité, et donc $T^{N+1}(x)$ et $T^{N+1}(y)$ vont être séparés d'au moins $\delta_0/2$. On peut donc s'assurer que $\max\{d(T^N(x), T^N(y)), d(T^{N+1}(x), T^{N+1}(y))\}$ est borné inférieurement par une constante strictement positive, et donc que T_β est expansive.

Enfin, donnons un exemple ayant une infinité de branches, la transformation de Gauss.

Définition 1.5 (Transformation de Gauss).

La transformation de Gauss est donnée par

$$T : \begin{cases} (0, 1] & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \frac{1}{x} [1] \end{cases}$$

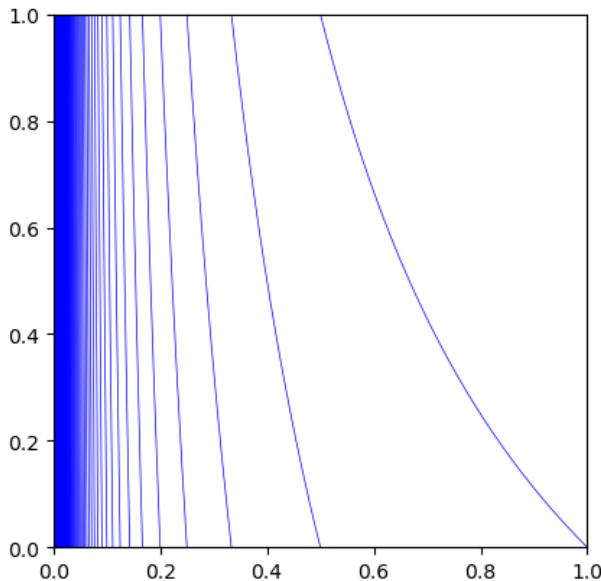


FIGURE 3 – Graphe de la transformation de Gauss.

Cette transformation n'est pas expansive au sens de la Définition 1.1, mais va néanmoins exhiber le même type d'instabilité. De plus, elle constituera un exemple simple dans la suite de ce texte.

Remarquons que l'ensemble de définition de la transformation de Gauss n'est pas stable par T ; un sous-ensemble stable serait, par exemple, $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. De plus, la dérivée de la transformation de Gauss en 1 est de -1 , ce qui est a priori un autre obstacle à l'expansivité uniforme. On peut cependant modifier la métrique pour faire de T une transformation uniformément expansive sur chaque intervalle $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ avec constante d'expansivité uniforme, par exemple en choisissant

$$d(x, y) := \left| \int_x^y \frac{1}{1+t} dt \right| = \left| \ln \left(\frac{1+x}{1+y} \right) \right|. \quad (1.1)$$

Remarque 1.6 (Développement en fraction continue).

La transformation de Gauss T est intimement liée aux développements en fractions continues des réels. Soit $x \in (0, 1)$ irrationnel. Alors $T^n(x)$ est bien défini pour tout n , et x admet un développement en fractions continues :

$$x = [0 : b_1, b_2, \dots] = 0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}}.$$

De plus, $\frac{1}{b_1+1} < x < \frac{1}{b_1}$ et $T(x) = [0 : b_2, b_3, \dots]$. Par récurrence, pour tout $k \geq 1$, l'entier b_k est l'unique entier tel que $T^{k-1}(x) \in \left(\frac{1}{b_k+1}, \frac{1}{b_k}\right)$.

1.3 Transformations markoviennes

Une seconde classe d'exemples est constituées de systèmes symboliques, dont les plus simples sont les sous-décalages de type fini.

Définition 1.7 (Sous-décalage de type fini).

Soit I un ensemble fini et M une matrice $|I| \times |I|$ à coefficients dans $\{0, 1\}$. Le sous-décalage de type fini défini par M est la donnée de l'espace $\Sigma_M^+ := \{x \in I^\mathbb{N} : M_{x_n x_{n+1}} = 1 \forall n \geq 0\}$, et de la transformation

$$\sigma : \begin{cases} \Sigma_M^+ & \rightarrow \Sigma_M^+ \\ (x_n)_{n \geq 0} & \mapsto (x_{n+1})_{n \geq 0} \end{cases},$$

l'espace $\Sigma_M^+ \subset I^\mathbb{N}$ étant bien un compact σ -invariant.

Un élément $x \in I^\mathbb{N}$ peut être vu comme un chemin infini sur le graphe (orienté, à boucles) complet dont les sommets sont les éléments de I . Une matrice de transition M équivaut à la donnée de transitions autorisées pour de tels chemins, et Σ_M^+ à l'espace des chemins autorisés.

Rien ne dit *a priori* que Σ_M^+ est non vide. Pour cela, on peut faire une hypothèse plus forte : l'irréductibilité du système (Σ_M^+, σ) , exprimée ici comme propriété combinatoire de la matrice M .

Définition 1.8 (Irréductibilité).

Soit I un ensemble fini. Une matrice de transition M sur I est dite irréductible si, pour tous $i, j \in I$, il existe $n \geq 1$ tel que $(M^n)_{ij} \geq 1$.

Sous cette condition, l'espace topologique Σ_M^+ est un compact non vide. Il peut être muni d'une métrique générant sa topologie. Le choix le plus fréquent consiste à définir le *temps de séparation*

$$s(x, y) := \inf\{n \geq 0 : x_n \neq y_n\}, \quad (1.2)$$

puis, pour un $\theta \in (0, 1)$ quelconque, de poser

$$d_\theta(x, y) := \theta^{-s(x, y)}. \quad (1.3)$$

La transformation σ est alors θ -lipschitzienne, et le système (Σ_M^+, T) est expansif. Le système (Σ_M^+, T) est de plus *markovien* : il existe une partition $\alpha = \{\{x \in \Sigma_M^+ : x_0 = i\}, i \in I\}$ de Σ_M^+ telle que l'image $T(a)$ de tout élément $a \in \alpha$ est une union d'éléments de α (ou, autrement dit, est $\sigma(\alpha)$ -mesurable). Une telle partition permet de définir des *cylindres* : ce sont les sous-ensembles de Σ_M^+ de la forme

$$\bar{a} = [a_0, \dots, a_{n-1}] := \{x \in \Sigma_M^+ : x_k = a_k \forall k < n\} \in \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\alpha,$$

où $n \geq 0$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \alpha^n$.

Certaines transformations de la Sous-section 1.2 peuvent se coder symboliquement. Pour cela, on construit une partition α de l'espace A , et à un point $x \in A$ on associe la suite des éléments de la partition auxquels appartient $T^n(x)$. Cela donne une application $h : A \rightarrow \alpha^{\mathbb{N}}$. Les transformations de la Sous-section 1.2 étant expansives, si les éléments de la partition sont assez petits (de diamètre plus petit que la constante δ intervenant dans la définition de la propriété d'expansivité), h est injective. De plus, h vérifie la relation de commutation

$$h \circ T = \sigma \circ h. \quad (1.4)$$

La dynamique des sous-décalages de type fini est facile à étudier ; on peut espérer, en choisissant une partition bien choisie, que l'image $h(A)$ est un tel sous-décalage. C'est le cas pour une transformation uniformément dilatante du cercle. Soient n le degré de la transformation T et x_0 un point fixe de T . Écrivons $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ les préimages de x_0 . Choisissons $\alpha := \{[x_i, x_{i+1}) : i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$. Alors $T(a) = \mathbb{S}_1$ pour tout $a \in \alpha$, ce qui assure que $h(\mathbb{S}_1) = \alpha^{\mathbb{N}}$.

Un des défauts de cette stratégie est que, dans cet exemple, h n'est pas continue : en effet, l'espace A est connexe non trivial, et l'espace d'arrivé $\alpha^{\mathbb{N}}$ a une topologie totalement discontinue. Les points qui posent problème sont ceux dont l'orbite passe par un des x_i . Heureusement, ces points sont dénombrables, donc comparativement rares. Quand nous introduirons des mesures, ces ensembles de points problématiques seront typiquement négligeables du point de vue de la mesure.

La situation est plus complexe pour les β -transformations. Ces transformations ne sont pas mesurablement conjuguées les unes aux autres, ne serait-ce que pour des questions d'entropie. Pour des raisons de cardinalité, seul un nombre dénombrable de β -transformations peuvent être conjuguées à un sous-décalage de type fini. C'est le cas si β est un *nombre de Pisot*, c'est-à-dire un entier algébrique supérieur à 1 dont tous les conjugués sont inférieur à 1 strictement. Par exemple, pour le nombre d'or $\beta = \phi$, le choix de partition $\alpha = \{[0, \phi^{-1}), [\phi^{-1}, 1)\}$ permet de conjuguer mesurablement la ϕ -transformation au sous-décalage sur deux symboles de matrice de transition

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application de Gauss met en évidence une autre limite de la conjugaison avec des sous-décalages de type fini. On dispose d'un partition évidente de l'intervalle $(0, 1]$:

$$\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] : n \geq 1 \right\},$$

telle que $T(a) = [0, 1)$ pour tout $a \in \alpha$. Cependant, cette partition n'est pas finie. L'extension de la notion de sous-décalage à des alphabets infinis est délicate : un nombre infini de symboles permet une diversité de comportements telle qu'il est plus difficile de formuler des énoncés généraux, ce qui incite à ajouter des hypothèses supplémentaires. Par exemple, dans le but d'étudier les mesures de Gibbs

d'un sous-décalage sur un alphabet dénombrable, R.D. Mauldin, M. Urbański [172] et O. Sarig [203] utilisent la propriété de *grandes images et préimages* : il existe une partie finie $J \subset I$ telle que, pour tout $i \in I$, il existe $j_{\text{in}}, j_{\text{out}} \in J$ tels que

$$M_{j_{\text{in}} i} = 1 \quad \text{et} \quad M_{i j_{\text{out}}} = 1.$$

Cette condition garantit une forme de récurrence rapide et est nécessaire pour définir des mesures de Gibbs au sens de Bowen [203, Theorem 1]. Elle est satisfaite par une version symbolique de la transformation de Gauss (pour laquelle on peut prendre $J = \{(1/2, 1]\}$).

Pour plus d'informations sur le codage de transformations hyperboliques, en particulier des constructions détaillées en dimension 2, nous renvoyons le lecteur à [6].

2 Un point de vue mesuré

Un système dynamique expansif est sensible aux conditions initiales : une différence aussi petite soit-elle des conditions initiales aboutira tôt ou tard à une divergence macroscopique des trajectoires (d'au moins δ , où δ est le paramètre introduit dans la Définition 1.1).

Dans le cas des transformations $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ uniformément dilatantes du cercle, cette divergence a lieu à vitesse exponentielle. En effet, soit $T : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ une telle transformation, et $\lambda := \min |T'|$. Il existe δ tel que, si $d(x, y) < \delta$, alors $d(T(x), T(y)) \geq \lambda d(x, y)$. En itérant, si $d(T^k(x), T^k(y)) < \delta$ pour tout $k < n$, alors $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \lambda^n d(x, y)$. Par conséquent, le temps de séparation de x et y (c'est-à-dire, ici, le temps nécessaire pour que leurs orbites soient distantes d'au moins δ) est d'au plus $\frac{|\ln(d(x, y)/\delta)|}{\ln(\lambda)}$, c'est-à-dire de l'ordre de $|\ln(d(x, y))|$. Remarquons au passage que la fonction $n \mapsto \min |T^{(n)}|$ est sur-multiplicative, donc $\min |T^{(n)}|^{\frac{1}{n}}$ converge vers un réel $\Lambda_{\min} \geq \lambda > 1$. Asymptotiquement, la divergence des trajectoires proches se fait à vitesse $\Lambda_{\min}^{(1-o(1))n} \geq \lambda^n$.

Face à cette imprévisibilité fondamentale, le point de vue de la théorie ergodique consiste à munir le système dynamique de mesures, et d'étudier le comportement d'orbites génériques. Pour de nombreux systèmes chaotiques et des mesures bien choisies, on observe numériquement un comportement proche d'objets probabilistes tels que des suites de variables aléatoires indépendantes ou des chaînes de Markov.

2.1 Mesures invariantes

Rappelons un peu de vocabulaire de théorie ergodique.

Définition 2.1 (Invariance, ergodicité, mélange).

Soit (A, T) un système dynamique mesurable sur un espace polonais et $\mu \in \mathcal{P}(A)$. On dit que :

- La mesure μ est invariante si $T_*\mu = \mu$, i.e. si $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$ pour tout borélien B .
- Le système dynamique (A, μ, T) est ergodique si μ est invariante et si tout ensemble mesurable T -invariant est de mesure 0 ou 1.
- Le système dynamique (A, μ, T) est mélangeant si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}B \cap C) = \mu(B)\mu(C)$ pour tous boréliens B, C .

Avec ces définitions, le mélange implique l'ergodicité, qui implique l'invariance. Il est possible de définir une notion intéressante de mélange pour des systèmes dynamiques non ergodiques [225], mais cela n'est pas l'objet de ce mémoire.

Exemple 2.2 (Transformation de Gauss).

Revenons à la transformation de Gauss T sur $[0, 1]$. Celle-ci préserve la mesure de probabilité $\mu = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x} dx$. Comme nous le verrons dans l’Exemple 3.18, le système dynamique $([0, 1], \mu, T)$ est mélangeant.

Nous parlerons beaucoup de systèmes dynamiques préservant une mesure infinie. La définition de l’invariance d’une telle mesure ne change pas, mais les notions d’ergodicité et de mélange sont plus subtiles.

Définition 2.3 (Invariance, ergodicité, mélange).

Soit (A, T) un système dynamique mesurable sur un espace polonais et μ une mesure σ -finie² invariante sur A . On dit que :

- Le système dynamique (A, μ, T) est ergodique si tout borélien B tel que $T^{-1}B = B$ est ou bien de mesure nulle, ou bien de complémentaire de mesure nulle.
- Un ensemble mesure $B \subset A$ est dit récurrent si, pour μ -presque tout $x \in B$, il existe $n \geq 1$ tel que $T^n(x) \in B$. Le système dynamique (A, μ, T) est conservatif si tout B mesurable est récurrent.
- Si de plus μ est une mesure de probabilité, le système dynamique (A, μ, T) est mélangeant si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$ pour tous boréliens A et B .

Avant de continuer, nous introduisons une notation commune et bien utile.

Notation 2.4 (Somme de Birkhoff).

Étant donné un système dynamique (A, T) et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (ou n’importe quel monoïde...), on note pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n^T f := \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$$

ses sommes de Birkhoff. Si la transformation T n’est pas ambiguë, nous noterons simplement $S_n f$.

2.1.1 Ergodicité et conservativité

En mesure finie, la conservativité se déduit de l’ergodicité par le lemme de récurrence de Poincaré. De plus, l’ergodicité est caractérisée par les théorèmes ergodiques de Birkhoff [29] et de von Neumann [232] :

Théorème 2.5 (Birkhoff, 1931 ; von Neumann, 1932 [29, 232]).

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant une mesure de probabilité. Il y a équivalence entre :

- (A, μ, T) est ergodique.
- Pour tout $f \in \mathbb{L}^1(A, \mu)$ et μ -presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n f}{n} = \int_A f \, d\mu.$$

- Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$ et dans $\mathbb{L}^2(A, \mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n f}{n} = \int_A f \, d\mu.$$

2. Dans ce mémoire, les mesures finies seront *a fortiori* σ -finies.

En mesure infinie, la conservativité ne découle plus de l'ergodicité : par exemple, la fonction $T : x \mapsto x + 1$ définit une transformation ergodique non conservative de (\mathbb{Z}, Leb) . Pour éviter ce cas de figure, nous parlerons en mesure infinie de systèmes ergodiques conservatifs, qui ont plusieurs caractérisations confortables.

Lemme 2.6.

Soit (A, T) un système dynamique mesurable sur un espace polonais et μ une mesure σ -finie invariante sur A . Il y a équivalence entre :

- (A, μ, T) est ergodique et conservatif.
- Pour tout B de mesure strictement positive, pour presque tout $x \in A$, il existe $n \geq 1$ tel que $T^n(x) \in B$.
- Pour tout B de mesure strictement positive, pour presque tout $x \in A$, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $T^{n_k}(x) \in B$ pour tout k .
- Pour toute fonction mesurable positive $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, si $\mu(f > 0) > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n f = +\infty$ presque partout.

De plus, les théorèmes ergodiques de Birkhoff et de von Neumann sont peu utiles en mesure infinie [1] [1, Exercice 2.2.1] : dans ce cadre, $\frac{S_n f}{n}$ converge presque sûrement vers 0 pour toute fonction intégrable f . Nous utiliserons à la place le théorème ergodique de Hopf [124, §14, Individueller Ergodensatz für Abbildungen], qui généralise le théorème ergodique de Birkhoff :

Théorème 2.7 (Théorème ergodique de Hopf).

Soit (A, μ, T) un système dynamique qui préserve une mesure σ -finie. Le système (A, μ, T) est ergodique et conservatif si et seulement si, pour toutes fonctions $f, g \in \mathbb{L}^1(A, \mu)$ telles que $\int_A g \, d\mu \neq 0$ et μ -presque partout,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n f}{S_n g} = \frac{\int_A f \, d\mu}{\int_A g \, d\mu}. \quad (2.1)$$

Si μ est une mesure de probabilité, on retrouve le théorème de Birkhoff en choisissant $g := \mathbf{1}_A$.

2.1.2 Mélange

En mesure finie, la notion de mélange peut souvent se quantifier. Il faut pour cela exprimer le mélange sous forme fonctionnelle et non à l'aide de boréliens³. En général, pour des systèmes dynamiques uniformément hyperboliques, on s'attend alors à une *décroissance exponentielle des corrélations*, c'est-à-dire à une perte rapide de la “mémoire” du système, comme dans l'exemple suivant :

Théorème 2.8.

Soit $T \in \mathcal{C}^2(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$ une transformation uniformément dilatante du cercle. Alors il existe une unique mesure de probabilité invariante $\mu = h(x)dx$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, il existe $C \geq 1$ et $\lambda > 0$ tels que pour toutes fonctions $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \text{Leb})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{C})$, pour tout $n \geq 0$,

$$\left| \int_{\mathbb{S}_1} f \circ T^n \cdot g \, d\mu - \int_{\mathbb{S}_1} f \, d\mu \int_{\mathbb{S}_1} g \, d\mu \right| \leq C e^{-\lambda n} \|f\|_{\mathbb{L}^1(A, \mu)} \|g\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{C})}. \quad (2.2)$$

Ce type de théorème reste valide dans un cadre beaucoup plus large⁴ [10, 38, 74, 75], y compris pour des flots [14, 79, 161] et pour des observables seulement höldériennes. Nous y reviendrons en Sous-sous-section 3.3.2.

3. La décroissance quantitative dépendant alors de la régularité des fonctions considérées, les indicatrices de boréliens pouvant être très peu régulières.

4. Il serait vain d'énumérer tous les systèmes ayant cette propriété, et plus encore tous les travaux portant dessus.

La notion de mélange, ainsi ses conséquences quantitatives dans certaines systèmes telles que la décroissance exponentielle des corrélations, nous sera souvent utile : convergence de la formule de Green-Kubo (Équation (3.16)), propriété de trou spectral (Sous-sous-section 3.3.2), ou encore contraction de cône (démonstration de la Proposition 12.7).

L'extension de la notion de mélange à la mesure infinie est délicate. Soit (A, μ, T) un système dynamique ergodique et conservatif préservant une mesure μ infinie. Une notion naturelle de mélange implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}B \cap C) = 0$ pour tous boréliens B, C de mesure finie [149]. Il existe néanmoins des variantes intéressantes de la notion de mélange. La plus fréquente consiste à renormaliser la quantité $\mu(T^{-n}B \cap C)$. Il est aussi possible d'adopter une approche fonctionnelle, c'est-à-dire d'étudier plus généralement⁵ des quantités du type $\int_A f \cdot g \circ T^n d\mu$; divers choix de classes de fonctions pour f et g mettent alors en évidence autant de phénomènes dynamiques.

Pour la première approche, nous renvoyons le lecteur aux travaux, par exemple⁶, de M. Thaler [218], S. Gouëzel [113], H. Bruin, I. Melbourne et D. Terhesiu [40, 173, 174] pour des transformations avec un point fixe neutre indifférent; et F. Pène, D. Terhesiu [179, 180, 187] ou encore D. Dolgopyat et P. Nándori [82] pour les billards de Sinai. Pour la seconde approche, le lecteur pourra par exemple consulter les travaux de C. Bonanno, P. Giulietti et M. Lenci [34, 157] ou encore D. Dolgopyat et P. Nándori [83].

2.2 Distorsion höldérienne et propriété de Gibbs

Soient $\theta \in (0, 1]$ et T une transformation uniformément dilatante $C^{1+\theta}$ du cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Notons $g := \frac{1}{|T'|}$. Trivialement, T a la propriété de *distorsion höldérienne* : il existe $C \geq 1$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{S}_1$ suffisamment proches,

$$\frac{1}{C} d(T(x), T(y))^\theta \leq \frac{g(x)}{g(y)} \leq C d(T(x), T(y))^\theta. \quad (2.3)$$

Cette propriété se transmet aux itérées de T . Notons $g^{(n)} := \frac{1}{|T^{(n)'}|}$ et d le degré topologique de T . Étant donné un intervalle ouvert I du cercle, l'ensemble $T^{-n}(I)$ est l'union de d^n intervalles ouverts. Alors :

Lemme 2.9.

Soient $\theta \in (0, 1]$ et T une transformation uniformément dilatante $C^{1+\theta}$ du cercle. Il existe $C \geq 1$ telle que, pour tout intervalle ouvert I , pour tout $n \geq 0$, pour tous x, y dans la même composante connexe de $T^{-n}(I)$,

$$\frac{1}{C} d(x, y)^\theta \leq \frac{g^{(n)}(x)}{g^{(n)}(y)} \leq C d(x, y)^\theta. \quad (2.4)$$

Démonstration.

On se place sous les hypothèses du lemme, en supposant pour simplifier que $|I| \leq 1/2$. Il suffit de montrer que $\ln(g^{(n)})$ est θ -höldérienne avec une semi-norme höldérienne uniformément bornée. Par la formule de dérivation en chaîne,

$$\ln(g^{(n)}) = S_n \ln(g).$$

Soit C telle que $|\ln(g)(x') - \ln(g)(y')| \leq Cd(T(x'), T(y'))$ pour tous x', y' suffisamment proches. Soit $\lambda := \min |T'|$. Les points $T^k(x)$, $T^k(y)$ appartiennent à la même composante connexe de $T^{-(n-k)}(I)$ pour tout $k \leq n$, et comme $|I| \leq 1/2$, les distances se mesurent dans les intervalles

5. On retrouve la définition classique du mélange en choisissant $f = \mathbf{1}_C$ et $g = \mathbf{1}_B$.

6. La liste est loin d'être exhaustive !

$T^{-(n-k)}(I)$ (en particulier, la fonction $k \mapsto d(T^k(x), T^k(y))$ est bien croissante). On observe alors que $d(T^k(x), T^k(y)) \leq \lambda^{-(n-k)}d(T^n(x), T^n(y))$, d'où

$$\begin{aligned} |\ln(g^{(n)})(x) - \ln(g^{(n)})(y)| &\leq \sum_{k=1}^n Cd(T^k(x), T^k(y))^\theta \\ &\leq C \left(\sum_{k=1}^n \lambda^{-(n-k)\theta} \right) d(T^n(x), T^n(y))^\theta \\ &\leq \frac{C}{1-\lambda^{-\theta}} d(T^n(x), T^n(y))^\theta \end{aligned} \quad \square$$

La propriété de distorsion höldérienne est centrale dans l'étude des systèmes dynamiques hyperboliques en régularité $\mathcal{C}^{1+\theta}$. Par exemple, plaçons-nous sous les conditions du Lemme 2.9, en utilisant la même constante C . Soit $x \in T^{-n}(I)$ et J la composante connexe de I contenant x . Alors

$$|J| = \int_J \mathbf{1}(x) \, dx = \int_I \mathbf{1}(z) \cdot g^{(n)} \circ (T_{|T^{-n}(I)}^n)^{-1}(z) \, dz,$$

donc

$$C^{-1}|I|g^{(n)}(x) = C^{-1} \int_I g^{(n)}(x) \, dz \leq |J| \leq C \int_I g^{(n)}(x) \, dz = C|I|g^{(n)}(x).$$

Autrement dit, $\frac{|J|}{|I|}$ et $g^{(n)}(x)$ sont du même ordre de grandeur, uniformément en $x \in J$ et en $n \geq 0$: il s'agit d'un cas particulier de la *propriété de Gibbs* [38, Théorème 1.2] [10, Definition 1.18].

La propriété de distorsion höldérienne apparaît dans la démonstration d'inégalité de Lasota-Yorke, qui sera présentée en Sous-sous-section 3.3.3 et qui permet de montrer la quasi-compacité d'opérateurs de transfert, et de là l'existence de mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Elle est aussi un problème-clef dans le procédé d'induction probabiliste suggéré en Sous-section 8.4.

2.3 Transformations Gibbs-Markov

Les *transformations Gibbs-Markov* forment une classe de systèmes dynamiques symboliques dilatants mesurés, avec potentiellement une infinité de symboles. Comme mentionné en Sous-section 1.3, les comportements de transformations markoviennes sur une infinité de symboles peut être extrêmement divers. Afin de garantir une récurrence rapide, on y ajoute une propriété de grande image, qui peut être vue comme une version mesurée de la propriété de grande image topologique utilisée par R.D. Mauldin, M. Urbański et O. Sarig déjà évoquée. De plus, on impose une forme de distorsion lipschitzienne, pendant mesuré de la distorsion höldérienne⁷ de la sous-section 2.2. Cette classe de transformations comprend à la fois des transformations de nature géométrique (transformations de l'intervalle) et symbolique. Nous renvoyons le lecteur à [1, 4, 112] pour des introductions plus complètes à ces transformations.

Définition 2.10 (Transformations Gibbs-Markov).

Soient (A, d) un espace métrique polonais borné, \mathcal{A} sa tribu borélienne et μ une mesure de probabilité sur (A, \mathcal{A}) . Soit $T : A \rightarrow A$ mesurable. Soit α une partition modulo μ de A en sous-ensembles de mesure strictement positive. Supposons que T est une transformation markovienne pour la partition α , que α engendre \mathcal{A} , et que μ est T -invariante.

7. Dans ce cadre symbolique, les distances utilisées peuvent être aisément modifiées, de telle sorte que la distinction entre fonctions lipschitziennes et höldériennes est sans importance.

On dit que (A, α, d, μ, T) est une transformation Gibbs-Markov si elle a de plus les propriétés suivantes :

- Grande image : $\inf_{a \in \alpha} \mu(Ta) > 0$;
 - Dilatation : il existe $\Lambda > 1$ tel que $d(Tx, Ty) \geq \Lambda d(x, y)$ pour tous $a \in \alpha$ et $(x, y) \in a \times a$;
 - Distorsion lipschitzienne : il existe $C > 0$ tel que, pour tout $a \in \alpha$ et presque tous $(x, y) \in a \times a$,
- $$\left| \frac{d\mu}{d\mu \circ T|_a}(x) - \frac{d\mu}{d\mu \circ T|_a}(y) \right| \leq Cd(Tx, Ty) \frac{d\mu}{d\mu \circ T|_a}(x). \quad (2.5)$$

La partition image jouera un rôle important. Celle-ci est moins fine que α ; remarquons cependant que, si les images des éléments de α ont une mesure minorée, ce n'est pas nécessairement le cas des éléments de α^* .

Définition 2.11 (Partition image).

Soit (A, α, d, μ, T) une transformation Gibbs-Markov. Chaque élément de la partition α est envoyé, modulo μ , sur une union $T(a)$ d'éléments de α . On note $\alpha^* = \bigvee_{a \in \alpha} T(a)$ la partition image.

Remarque 2.12 (Invariance de la mesure).

Nous avons ajouté pour simplifier l'hypothèse que la mesure μ est T -invariante ; ce n'est pas le cas dans les références citées [1, 4, 112]. Si μ est seulement supposée non singulière, on peut trouver une mesure invariante équivalente pour lequel le système est encore Gibbs-Markov dès que la transformation est irréductible et $\text{Card}(\alpha^*) < +\infty$; voir par exemple [4, Théorème 3.1].

2.4 Exemples de transformations Gibbs-Markov

Nous présentons maintenant un certain nombre de systèmes dynamiques Gibbs-Markov, ou dont l'étude fait intervenir des transformations Gibbs-Markov. Plus qu'un simple inventaire ou une justification de l'étude de cette classe de transformations, il faut y voir une introduction aux objets qui apparaissent dans la plupart des travaux de l'auteur.

Revenons pour commencer sur un exemple explicite : la transformation de Gauss.

Exemple 2.13 (Transformation de Gauss).

Soit $T : x \mapsto \{1/x\}$ la transformation de Gauss sur $A = [0, 1]$. Nous avons vu que :

- T préserve la mesure de probabilité $\mu = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x} dx$, par l'Exemple 2.2.
- Il lui est associé une partition naturelle $\alpha = (a_n)_{n \geq 1}$, où $a_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, comme évoqué en Remarque 1.6.
- Comme mentionné en Équation (1.1), il lui est associée la distance

$$d(x, y) = \left| \int_x^y \frac{1}{1+t} dt \right| = \left| \ln \left(\frac{1+x}{1+y} \right) \right|.$$

Comme $T|_{a_n}$ est surjective pour tout n , on a $\mu(T(a_n)) = \mu(A) = 1$ pour tout n , donc la propriété de la grande image est satisfaite. La transformation T est dilatante grâce à ce choix de distance, avec constante $\Lambda = 2$. Finalement, le lecteur pourra vérifier la propriété de distorsion lipschitzienne ; ici, la famille de fonctions $\frac{d\mu}{d\mu \circ T|_{a_n}}$ est uniformément lipschitzienne, et le fait que $d(x, y) = \ln(2)\mu([x, y])$ aide à conclure.

Pour cette transformation, $\alpha^* = \{A\}$ est triviale.

2.4.1 Modèles probabilistes

Les sous-décalages de type fini munis de la mesure d'équilibre associée à un potentiel höldérien sont des transformations Gibbs-Markov. En particulier, les chaînes de Markov sur des espaces d'états finis sont Gibbs-Markov.

La possibilité d'avoir des espaces d'états infinis autorise des exemples plus variés. Par exemple, le décalage complet sur \mathbb{Z} , muni d'une mesure de probabilité produit, est une transformation Gibbs-Markov. En d'autres termes, on peut traiter dans ce cadre toutes les suites de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées sur \mathbb{Z} , ou sur n'importe quel ensemble dénombrable.

2.4.2 Flots d'Anosov

Les systèmes pouvant s'encoder par des sous-décalages de type fini rentrent aussi dans ce cadre. Le cas le plus connu est celui des *difféomorphismes Anosov* :

Définition 2.14 (Difféomorphisme Anosov).

Soit M une variété riemannienne compacte, et $T : M \rightarrow M$ un difféomorphisme. Le système (M, T) est dit Anosov s'il existe une décomposition continue de l'espace tangent à M en deux sous-fibrés E^s (le sous-espace stable) et E^u (le sous-espace instable) :

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$$

telle que, pour trois constantes $C \geq 0$ et $\Lambda_s, \Lambda_u > 1$, on ait :

- Invariance de la décomposition : $(DT)E^s = E^s$ et $(DT)E^u = E^u$,
- Contraction dans la direction stable : $\left\| DT_{|E^s}^n \right\| \leq C \Lambda_s^{-n}$ pour tout $n \geq 0$,
- Dilatation dans la direction instable : $\left\| DT_{|E^u}^{-n} \right\| \leq C \Lambda_u^{-n}$ pour tout $n \geq 0$.

Grâce au travaux de R. Bowen [37] et M. Ratner [197], on sait que les transformations Anosov peuvent être encodées par des sous-décalages de type fini. Le travail de Bowen s'applique aussi aux transformations Axiome A, c'est-à-dire ayant un attracteur compact vérifiant des conditions semblables à celles des transformations Anosov.

La stratégie consistant à encoder les trajectoires de la dynamique s'adapte aussi aux flots Anosov, c'est-à-dire à des flots $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de classe C^1 sur des variétés riemanniennes M tels que l'on ait une décomposition continue

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^0(x) \oplus E^u(x),$$

où E^0 est la direction du flot et les fibrés E^s et E^u vérifient des conditions similaires à celles de la Définition 2.14, ainsi qu'à des flots Axiome A. Dans ce cas, on peut trouver une section de Poincaré pour le flot telle que la transformation de premier retour admette un codage par un sous-décalage de type fini.

L'exemple le plus connu de flot Anosov est le flot géodésique sur une surface riemannienne compacte de courbure sectionnelle strictement négative. Quand M est une surface de courbure négative constante, des codages géométriquement explicites ont été développés ; ces techniques remontent dans un cadre Axiome A⁸ aux travaux de J. Hadamard [119] en 1898, et ont été perfectionnées notamment par C. Series [207].

8. Bien entendu, les travaux de J. Hadamard précèdent de beaucoup la notion de flot Axiome A. Il a néanmoins étudié le flot géodésique sur une surface hyperbolique géométriquement finie et de volume infini qui, quand on le restreint à son ensemble topologiquement récurrent, est Axiome A. Ce contexte précis (géométriquement fini, volume infini) rend le codage particulièrement naturel : l'ensemble des orbites récurrentes est homéomorphe à (un flot de suspension au-dessus d') un sous-décalage de type fini. Curieusement, les billards dispersifs planaires, qui en sont les analogues dans le cadre des billards de Sinaï, ont été étudiés beaucoup plus tard [104].

Fig. 2.

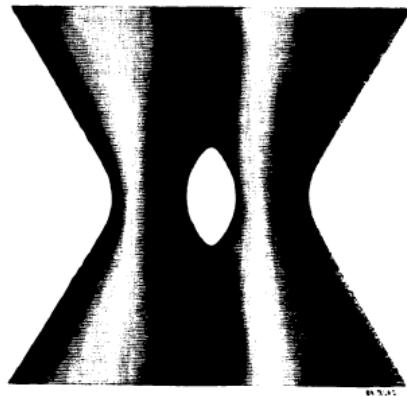


FIGURE 4 – Une surface hyperbolique sur laquelle J. Hadamard a étudié le flot géodésique [119, Figure 2].

Les transformations Gibbs-Markov permettent de coder des dynamiques plus diverses, en particulier non compactes. Par exemple, la surface modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est un orbifold de courbure constante égale à -1 et ayant une pointe (non bornée, mais de volume fini).

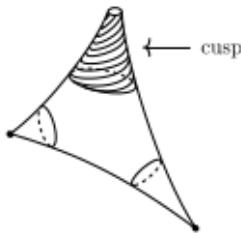


FIGURE 5 – Une représentation de la surface modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ par F. Dal’Bo [66, Chapitre II, Figure 9] ; [67, Chapitre II, Figure 9]. 2007, EDP Sciences ; 2011, Springer. Copyright 2007, Françoise Dal’Bo. Reproduit avec la permission de l’auteure.

Étant donnée une section de Poincaré bornée, les excursions depuis cette section ont, qualitativement, un nombre dénombrable de comportement possibles, correspondant au nombre de tours autour de la pointe avant de revenir. Le codage de la transformation de premier retour va donc se faire avec un alphabet infini dénombrable [209], mais vérifiant les axiomes des transformations Gibbs-Markov pour la mesure volume⁹. Ce codage a été utilisé notamment par J. Aaronson et M. Denker [2] pour étudier la récurrence du flot géodésique sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ muni de sa structure hyperbolique de volume fini invariante par $z \mapsto z + 1$.

Remarque 2.15 (Réduction à un système markovien unilatérale).

Un flot d’Anosov est un système dynamique inversible. Après avoir construit une section de Poincaré inversible, il sera codé par une transformation markovienne inversible, par exemple un sous-décalage de type fini bilatère¹⁰ :

$$\begin{aligned}\Sigma_M &:= \{x \in I^{\mathbb{Z}} : M_{x_n x_{n+1}} = 1 \ \forall n \in \mathbb{Z}\}, \\ T(x) &:= (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}} \quad \forall x \in \Sigma_M,\end{aligned}$$

9. On peut même obtenir ainsi la transformation de Gauss, dont la dynamique est intimement liée aux développements en fractions continues [66, 208].

10. Merci à M. Demers d’avoir souligné ce point.

pour une certaine matrice de transition M . L'espace Σ_M peut être métrisé, par exemple, par la distance $d(x, y) := 2^{-\inf\{|n| : x_n \neq y_n\}}$.

Ce cadre est différent de celui des décalages unilatéraux introduits en Sous-section 1.3 ; par exemple, le système (Σ_M, T) n'est pas expansif. On peut cependant se ramener à des décalages unilatéraux, grâce à un argument de R. Bowen. Pour toute fonction $f : \Sigma_M \rightarrow \mathbb{C}$ qui est θ -höldérienne, il existe une fonction $\theta/2$ -höldérienne u telle que $f_+ := f + u \circ T - u$ ne dépende que des coordonnées dans le futur $(x_n)_{n \geq 0}$. Quitte à remplacer f par f_+ , on se ramène donc au système markovien unilatéral Σ_M^+ .

Cette technique est très efficace pour analyser le comportement des sommes de Birkhoff de f . En effet,

$$S_n(f) = S_n(f_+) + u - u \circ T^n,$$

et le terme $(u - u \circ T^n)$ est en général négligeable devant $S_n(f_+)$.

Cependant, pour d'autres propriétés, telles que le mélange quantitatif (décroissance exponentielle des corrélations), la réduction à un sous-décalage unilatéral a des limites. Par exemple, étant donnée $\mu \in \mathcal{P}(\Sigma_M)$,

$$\int_{\Sigma_M} f \circ T^n \cdot g \, d\mu = \int_{\Sigma_M} f_+ \circ T^n \cdot g \, d\mu + \int_{\Sigma_M} (u \circ T^n - u \circ T^{n-1}) \cdot g \, d\mu,$$

et le dernier terme $\int_{\Sigma_M} (u \circ T^n - u \circ T^{n-1}) \cdot g \, d\mu$ n'est a priori pas négligeable. Les limites de cette stratégie ont incité à développer de nouvelles méthodes s'appliquant directement à des systèmes inversibles, contournant même le codage. Nous renvoyons le lecteur à la Sous-sous-section 3.4.4, introduisant des espaces de Banach de distributions anisotropes, pour l'un des principaux développements dans cette direction.

2.4.3 Transformations non-uniformément hyperboliques

Les transformations Gibbs-Markov se sont avérées utiles pour étudier des transformations *non-uniformément hyperboliques*. Nous nous restreignons aux transformations non-uniformément hyperboliques en dimension 1, ou du moins dont la direction instable est de dimension 1. Ces transformations sont de loin les transformations non-uniformément hyperboliques les plus étudiées, bien que de rares études ont été menées en dimension supérieure [89].

Soit A le cercle ou un intervalle compact. Une transformation $T : A \rightarrow A$ est dite *non-uniformément hyperbolique* s'il existe un ensemble fini de points I , fixés par T et tels que $T' \equiv 1$ sur I , et si de plus T est dilatante hors de I , c'est-à-dire que $T'(x) > 1$ pour tout $x \in A \setminus I$.

Si l'orbite d'un point arrive près de I , alors, la dérivée de T étant proche de 1, il lui faudra beaucoup de temps pour s'extraire d'un petit voisinage de I . Par conséquent, les orbites typiques pour la mesure de Lebesgue passent beaucoup de temps près de I . On observe un phénomène de *chaos intermittent* : les orbites typiques alternent de longues périodes de stabilité apparente (quand elles sont proches de I) et de courtes périodes de comportement chaotique.

De telles transformations ont été initialement étudiées par Y. Pomeau et P. Manneville [195], avec des motivations issues de l'hydrodynamique et de phénomènes convectifs chaotiques de façon intermittente¹¹. Des transformations non-uniformément hyperboliques apparaissent en effet lors de

11. Les cellules de convection de Rayleigh–Bénard en particulier.

bifurcations dans le modèle de Lorenz¹² [195]. Des études numériques de telles transformations ont été menées notamment par P. Gaspard et X.J. Wang [105], ainsi que des études théoriques par M. Thaler [216, 217].

La famille de transformations non-uniformément hyperboliques la plus couramment étudiée a été introduite plus tardivement par C. Liverani, B. Saussol et S. Vaienti [164].

Définition 2.16 (Transformations de Liverani–Saussol–Vaienti).

Soit $\eta \geq 0$. La transformation de Liverani–Saussol–Vaienti (ou transformation LSV) $T_\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de paramètre η est définie par :

$$T_\eta(x) = \begin{cases} x(1 + (2x)^\eta) & \forall x \in (0, 1/2] \\ 2x - 1 & \forall x \in (1/2, 1] \end{cases}. \quad (2.6)$$

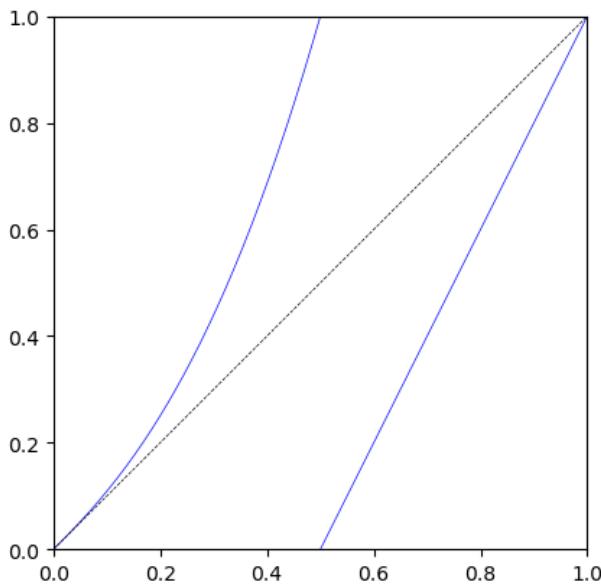


FIGURE 6 – Graphe de la transformation de Liverani – Saussol – Vaienti de paramètre $\eta = 1.5$.

Cette famille de transformations a l'avantage d'avoir une combinatoire très simple, mais d'exhiber une grande variété de comportements quand η varie. De nombreuses transformations non-uniformément hyperboliques en dimension 1 vont se comporter comme une transformation LSV pour un paramètre bien choisi. Par exemple, l'application

$$T : \begin{cases} (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-\pi/2, \pi/2) \\ x \mapsto \tan(x) [\pi] \end{cases},$$

qui permet de comprendre le comportement du système dynamique $x \mapsto \tan(x)$ sur \mathbb{R} , a un point fixe neutre en 0. Comme $\tan(x) = x(1 + \frac{x^2}{3}) + O(x^5)$, la transformation T va se comporter qualitativement

12. Celui-ci est défini par les trois équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - z); \\ \dot{y} = -xz + rx - y; \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases}$$

dépendant de trois paramètres σ , b et r . Ce système est chaotique pour $\sigma = 10$, $b = 8/3$ et r assez grand. Le phénomène de chaos intermittent apparaît pour $r \simeq 166,06$.

comme la transformation LSV de paramètre $\eta = 2$. Pour prendre un autre exemple, l'application

$$T : \begin{cases} [0, 1) & \rightarrow [0, 1) \\ x & \mapsto \frac{1}{1-x} [1] \end{cases},$$

introduite par A. Rényi [198] en 1957 en tant que variante de la transformation de Gauss¹³, va se comporter qualitativement comme la transformation LSV de paramètre $\eta = 1$.

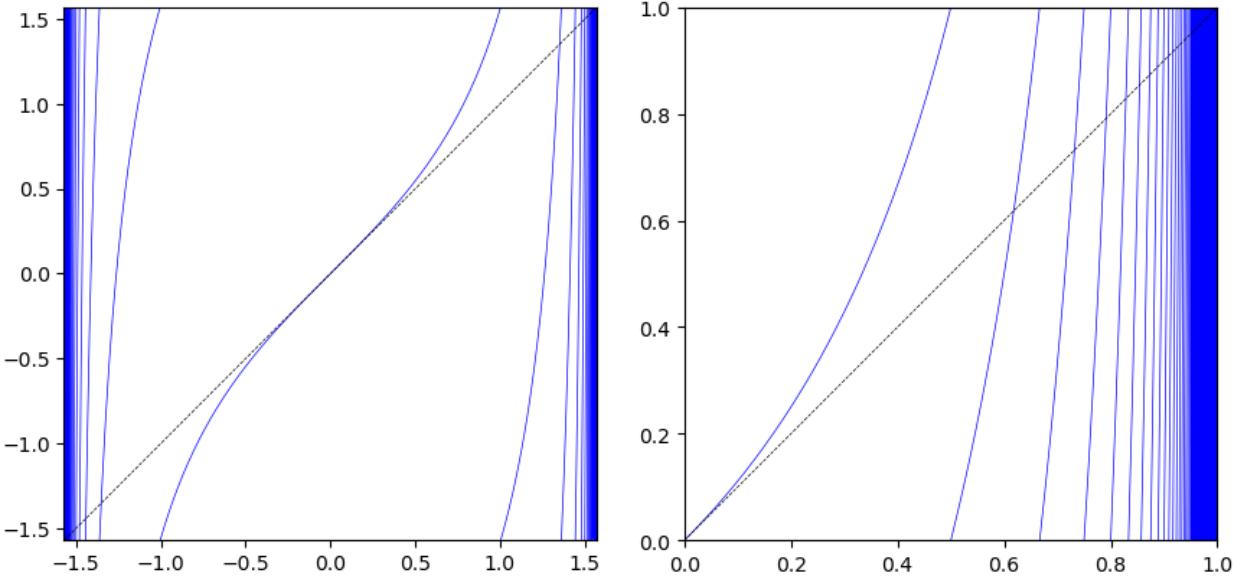


FIGURE 7 – Graphes des transformations $x \mapsto \tan(x)/\pi$ et $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ respectivement.

Pour toute valeur de η , le système dynamique $([0, 1], \text{Leb}, T_\eta)$ est ergodique, mais ne préserve pas la mesure pour $\eta > 0$. Il admet, à constante multiplicative près, une unique mesure invariante absolument continue $\mu_\eta = h_\eta(x) dx$. La fonction h_η a un pôle d'ordre η en 0 [216]. Ainsi, la transformation de Rényi définie ci-dessus préserve la mesure $\frac{1}{x} dx$ sur $[0, 1]$.

En particulier, pour $\eta \geq 1$, la mesure μ_η est infinie. Ce résultat quantifie au passage l'argument heuristique avancé précédemment : plus η est élevé, plus les orbites typiques pour la mesure de Lebesgue vont passer de temps près du point fixe neutre 0.

Les systèmes dynamiques $([0, 1], \mu_\eta, T_\eta)$ diffèrent en de nombreux points des systèmes hyperboliques. Mentionnons notamment :

- pour $\eta \in (0, 1)$, une décroissance polynomiale¹⁴ des corrélations [235, Theorem 5] : il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ lipschitziennes,

$$\left| \int_{[0,1]} f \cdot g \circ T_\eta^n d\mu_\eta - \int_{[0,1]} f d\mu_\eta \int_{[0,1]} g d\mu_\eta \right| \leq C \|f\|_{\text{Lip}} \|g\|_{\text{Lip}} n^{-(\frac{1}{\eta}-1)}, \quad (2.7)$$

et l'exposant est optimal [110, 202].

- le théorème central limite standard (avec renormalisation en $\frac{1}{\sqrt{n}}$) pour des observables höldériennes n'est valable que quand les corrélations de l'Équation (2.7) sont sommables, c'est-à-dire pour $\eta \in [0, 1/2]$ [235, Theorem 5].

13. Variante à laquelle est associée son propre type de développement en fractions continues.

14. Et non exponentielle, comme dans le cadre des transformations uniformément dilatantes du cercle – comparer avec le Théorème 2.8.

Nous ne détaillerons pas toutes les propriétés des transformations non-uniformément hyperboliques.

La méthode la plus fréquente pour étudier les transformations non-uniformément hyperboliques consiste à *induire* sur un sous-ensemble bien choisi. Pour les transformations LSV, on choisit d'induire sur $B = (1/2, 1]$. On définit le *temps de premier retour* en B par :

$$\varphi_{\eta,B}(x) := \inf\{n \geq 1 : T_\eta^n(x) \in B\}. \quad (2.8)$$

Posons $T_{\eta,B}(x) := T_\eta^{\varphi_{\eta,B}(x)}(x)$ pour $x \in B$. Alors $(B, \mu_\eta(\cdot|B), T_{\eta,B})$ est un système dynamique ergodique et préservant la mesure. De plus, en choisissant pour d' la distance usuelle et pour α la partition engendrée par les ensembles $(\{\varphi_{\eta,B} = n\})_{n \geq 1}$, le système $(B, \alpha, d', \mu_\eta(\cdot|B), T_{\eta,B})$ est Gibbs-Markov. On peut donc voir le comportement de $([0, 1], \mu_\eta, T_\eta)$ comme celui de la transformation hyperbolique $(B, \mu_\eta(\cdot|B), T_{\eta,B})$, entrecoupé de périodes d'attente de longueur $\varphi_{\eta,B}$. Ce procédé d'induction sera présenté plus en détail en Partie III.

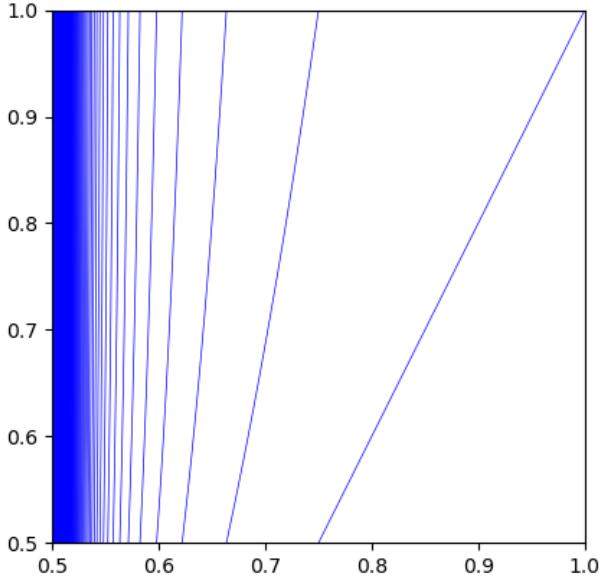


FIGURE 8 – Transformation induite par la transformation de Liverani – Saussol – Vaienti de paramètre $\eta = 1.5$ sur l'intervalle $(1/2, 1]$.

Le temps de premier retour a des queues lourdes : pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mu_\eta(\varphi_{\eta,B} \geq n | B) \simeq_{n \rightarrow +\infty} C n^{-\frac{1}{\eta}}. \quad (2.9)$$

Les temps d'attentes peuvent être donc très longs (d'espérance infinie si $\eta \geq 1$), ce qui rend le lien entre le système induit $(B, \mu_\eta(\cdot|B), T_{\eta,B})$ et le système initial $([0, 1], \mu_\eta, T_\eta)$ parfois subtil.

Remarque 2.17 (Transformation de Boole).

De façon similaire, la transformation de Gauss est la transformation induite sur $[0, 1]$ par la transformation de Boole $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$T(x) = \begin{cases} 1/x & \forall x \in (0, 1] \\ x - 1 & \forall x \in (1, +\infty) \end{cases}. \quad (2.10)$$

Cette transformation se comporte comme une transformation non-uniformément hyperbolique dont le point fixe neutre serait en $+\infty$, et plus précisément comme la transformation LSV de paramètre $\eta = 1$.

En effet, soit $\mu = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x} dx$ la mesure sur $[0, 1]$ invariante pour la transformation de Gauss, introduite à l'Exemple 2.2. Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\mu(\varphi_{[0,1]} \geq n) = \mu(T(x) > n) = \mu(x < 1/n) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(2)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(2)} n^{-1}.$$

Le temps de premier retour en $[0, 1]$ a donc une queue en Cn^{-1} , ce qui correspond bien au paramètre $\eta = 1$ dans l'Équation (2.9).

2.4.4 Transformations unimodales

Les transformations Gibbs-Markov sont intervenues dans l'étude de certaines transformations unimodales via la construction dite des *tours de Young*. Commençons par présenter ces transformations unimodales.

Définition 2.18 (Transformation unimodale).

Soit $A = [a, b]$ un segment et $T \in \mathcal{C}(A, A)$. La transformation T est dite unimodale s'il existe un point $c \in (a, b)$ tel que T soit strictement croissante (respectivement, strictement décroissante) sur $[a, c]$ et strictement décroissante (respectivement, strictement croissante) sur $[c, b]$.

Dans la suite de ce texte, on supposera de plus que les transformations unimodales considérées sont de classe \mathcal{C}^2 , et que $T''(c) \neq 0$.

La dynamique d'une transformation unimodale est soumise à la compétition de deux effets, la contraction près du point critique c et l'éventuelle expansion loin de c :

- Si c est périodique, disons de période $p \geq 1$, alors la dérivée de T^p vaut 0 pour tout point de l'orbite de c , qui est donc super-attractif. Les orbites périodiques attractives sont stables ; toute transformation \mathcal{C}^1 -proche de T aura donc encore une orbite de période p attractive. Dans ce cas, l'unique mesure de probabilité T -invariante supportée par un voisinage de cette orbite est la mesure uniforme sur celle-ci.
- À l'inverse, la dérivée de T peut être supérieure à 1 loin de c . Tant que la plupart des orbites ne passent pas trop souvent trop près de c , leur exposant de Lyapunov peut être strictement positif, ce qui entraîne de l'instabilité.

Le second cas peut être formalisé et quantifié par les *conditions de Collet-Eckmann* [58]. Nous en donnons ici la version utilisée par L.S. Young [235].

Définition 2.19 (Conditions de Collet-Eckmann).

Une transformation unimodale vérifie les conditions de Collet-Eckmann s'il existe des paramètres $M \geq 1$, $\alpha, \delta > 0$ et $\lambda > 1$ tels que :

- pour tout x tel que $x, \dots, T^{M-1}(x) \notin B(c, \delta)$, on a $|(T^M)'(x)| \geq \lambda^M$.
- pour tout $n \geq 0$ et tout x tel que $x, \dots, T^{n-1}(x) \notin B(c, \delta)$ et $T^n(x) \in B(c, \delta)$, on a $|(T^n)'(x)| \geq \lambda^n$.
- $|(T^n)'(T(c))| \geq \lambda^n$ pour tout $n \geq 0$.
- $|T^n(c) - c| \geq e^{-\alpha n}$ pour tout $n \geq 1$.

Ces conditions impliquent l'existence d'une mesure de probabilité μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue [26, 58].

Exemple 2.20 (Famille quadratique).

Pour tout $k \in [0, 4]$, définissons :

$$T_k : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto kx(1 - x) \end{cases} . \quad (2.11)$$

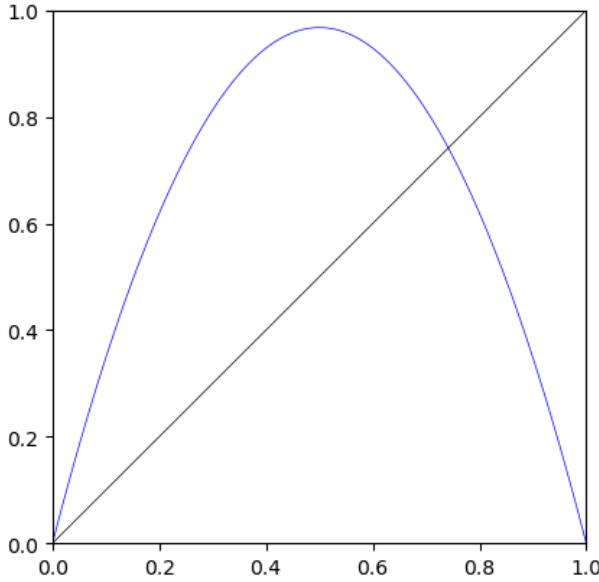


FIGURE 9 – Graphe de $T_{3,87}$.

D'après les travaux de M. Lyubich [169, Density theorem] d'une part, et J. Graczyk et G. Świątek d'autre part [115, 116], T_k possède une orbite périodique attractive pour tout k dans un ouvert dense de $[0, 4]$. Dans ce cas, le complémentaire du bassin d'attraction de cette orbite est de mesure de Lebesgue nulle, donc T_k n'admet pas de mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Sur ce sujet, nous renvoyons à l'article de revue [210].

Cependant, T_k satisfait les conditions de Collet-Eckmann pour k dans un ensemble de mesure de Lebesgue positive, et en particulier de densité 1 en 4. Par conséquent, pour la plupart des paramètres k proches de 4, la transformation T_k admet une mesure de probabilité invariante absolument continue d'exposant de Lyapunov strictement positif [26, 58, 126].

Dans le cadre des transformations unimodales, la construction des *tours de Young* consiste à trouver une partie $\Lambda \subset A = [a, b]$, une partition α (potentiellement infinie) de Λ et une fonction¹⁵ $R : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}^*$ tels que :

- $S(x) := T^{R(x)}(x) \in \Lambda$ pour μ -presque tout $x \in \Lambda$;
- R est constante sur les éléments de α ;
- $\{R \leq n\}$ est l'union d'un nombre fini d'éléments de α ;
- $(\Lambda, \alpha, d', \text{Leb}, S)$ est une transformation Gibbs-Markov¹⁶, où d' est la distance usuelle sur A ;
- pour tous x, y tels que $R(x) = R(y)$, les points x, y sont dans le même ensemble $a \in \alpha$, si et seulement si $T^k(x)$ et $T^k(y)$ sont dans la même composante connexe de $A \setminus \{c\}$ pour tout $0 \leq k < R(x) = R(y)$. Autrement dit, les éléments de α sont des ensembles de points qui restent ensemble jusqu'au temps markovien R ;

15. Parfois appelée *temps markovien*, car elle sera supposée constante sur les éléments de la *partition de Markov* α .

16. L.S. Young suppose de plus que les branches sont surjectives, ce qui découle naturellement de sa construction pour les transformations unimodales mais n'est en général pas nécessaire.

- la transformation T satisfait de bonnes estimées de dilatation et de distorsion¹⁷ entre les temps de retour markoviens.

La principale différence avec le procédé d'induction utilisé pour étudier les transformations non-uniformément hyperboliques en Sous-sous-section 2.4.3, ou avec l'utilisation de sections de Poincaré évoquées en Sous-partie 2.4.2 est que le temps R n'est en général pas le temps de premier retour en Λ . La flexibilité qui s'ensuit permet d'obtenir les estimées de dilatation et de distorsion pour $S = T^R$.

Cette construction s'applique aux transformations unimodales vérifiant les conditions de Collet-Eckmann.

Théorème 2.21. [235, Theorem 7]

Soit (I, T) une transformation unimodale vérifiant les conditions de Collet-Eckmann. Alors on peut construire une tour de Young vérifiant les conditions ci-dessus, et telle que $\mu(R \geq n) \leq e^{-\beta n}$ pour un certain $\beta > 0$, où μ est l'unique mesure de probabilité S -invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur Λ .

Afin de démontrer une propriété des transformations unimodales vérifiant les conditions de Collet-Eckmann, une stratégie courante consiste à démontrer cette propriété pour les transformations Gibbs-Markov, puis à montrer que cette propriété est héritée à travers la construction de Young. La borne exponentielle sur les queues de R fait que le système (I, Leb, T) a le comportement d'une transformation uniformément hyperbolique, là où les queues polynomiales dans le cas des transformations non-uniformément hyperboliques (Équation (2.9)) donnaient naissance à des phénomènes propres.

C'est ainsi que l'on peut démontrer l'existence d'une mesure de probabilité μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, mais aussi que les observables $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ höldériennes vont satisfaire un théorème central limite ou un principe des grandes déviations par rapport à μ . Nous renvoyons le lecteur à la Sous-partie 3.6 pour plus de détails.

Remarquons que les tours de Young ne sont pas le seul moyen de démontrer, disons, une décroissance exponentielle des corrélations, un théorème central limite ou des principes de grandes déviations pour de telles transformations unimodales. Citons par exemple les travaux antérieurs de G. Keller et T. Nowicki [143]. Cependant, cette construction a deux avantages. Le premier est de s'appliquer à plusieurs familles de transformations : si cette approche fonctionne, on démontre la propriété voulue d'un seul coup pour ces transformations unimodales, mais aussi par exemple pour les applications collisions de billards de Sinaï, que nous verrons en détail en Sous-sous-section 2.4.5. Le second est que les seules démonstrations connues de certaines propriétés utilisent fortement la structure de tour au-dessus d'une transformation Gibbs-Markov. Citons par exemple l'estimée d'erreur optimale dans le principe d'invariance presque sûre [145], ou les travaux de l'auteur sur les théorèmes limites de fonctions d'intégrales nulles en mesure infinie [221, 222].

2.4.5 Billards de Sinaï

Les *billards de Sinai* sont des modèles classiques de dynamique hyperbolique, mais dont certaines propriétés – en particulier le manque de régularité – posent de sérieux problèmes techniques. Dans leur version la plus commune, ils modélisent le rebond élastique d'une particule sur des obstacles strictement convexes. La présentation qui suit est succincte ; nous renvoyons si nécessaire au livre de N. Chernov et R. Markarian [53].

Soit $(O_i)_{i \in I}$ un ensemble fini de compacts du tore \mathbb{T}^2 , deux à deux disjoints, convexes, et dont le bord est de courbure strictement positive. Une particule à l'extérieur de ces obstacles se déplace à vitesse unitaire. Si cette particule touche le bord, sa trajectoire est réfléchie suivant les lois de

17. Que l'on ne détaillera pas.

réflexion de Descartes ; on peut donc supposer que son vecteur vitesse est alors sortant. L'espace des phases du flot de cette particule, c'est-à-dire l'ensemble des couples (position, vitesse) possibles, est donc :

$$\Omega := \left(\overline{\left\{ \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{i \in I} O_i \right\}} \times \mathbb{S}_1 \right)_{/\sim},$$

où $(x, \vec{v}) \sim (x, \vec{w})$ si $x \in \partial O_i$ pour un certain $i \in I$ et \vec{v}, \vec{w} sont symétriques l'un à l'autre par rapport à la droite tangente à ∂O_i en x . La trajectoire de la particule définit alors un flot continu $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur Ω . Enfin, ce flot, comme tout flot géodésique, est un flot de contact, et préserve la mesure de Liouville

$$\text{Liouv} = \frac{1}{2\pi [\text{Vol}(\mathbb{T}^2) - \sum_{i \in I} \text{Vol}(O_i)]} \mathbf{1}_{\mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{i \in I} O_i} dx d\phi.$$

Une telle table de billard est dite à *horizon fini* si toute trajectoire intercepte un obstacle en temps fini ; par compacité, le temps entre deux rebonds est alors borné.

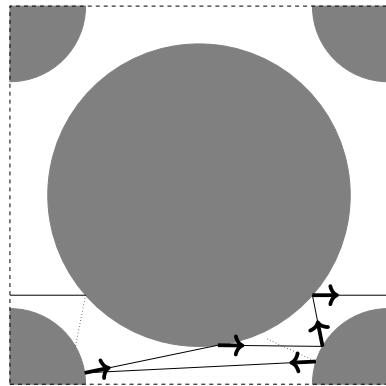


FIGURE 10 – Une trajectoire sur un billard de Sinai à horizon fini, avec le vecteur unitaire tangent à la trajectoire sortante dessiné à chaque collision. Ce billard sur un tore de côté 1 a deux obstacles circulaires de rayons respectifs 0,4 et 0,2.

Le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est malheureusement seulement $1/2$ -höldérien, sa dérivée étant singulière au niveau des trajectoires tangentes. On dispose de plus d'une section de Poincaré naturelle, constituée des collisions de la particule avec un obstacle, c'est-à-dire des couples (s, \vec{v}) où $s \in \bigcup_{i \in I} \partial O_i$. On peut paramétriser le vecteur \vec{v} par son angle θ à la normale ; l'espace d'état de l'*application collision* est alors

$$A := \bigcup_{i \in I} \partial O_i \times [-\pi/2, \pi/2],$$

et l'application collision T préserve la mesure

$$\mu = \frac{1}{2 \sum_{i \in I} |\partial O_i|} \cos(\theta) d\theta ds.$$

La transformation T n'est cependant pas continue aux points dont les trajectoires sortantes sont tangentes à un obstacle, et sa différentielle tend vers l'infini près de ces singularités¹⁸.

L'ergodicité du système (A, μ, T) , et par extension du flot $(\Omega, \text{Liouv}, (\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}})$, a été démontrée par Y. Sinai [211]. On dispose de plus d'un théorème central limite pour le système (A, μ, T) et des

18. Comme T préserve μ , le cocycle dérivé est conjugué à un cocycle à valeurs dans $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. Cette explosion de la différentielle est donc une explosion dans $\text{SL}_2(\mathbb{R})$.

observables höldériennes [41], en horizon fini comme infini. Le théorème central limite pour le flot est plus délicat. En horizon fini, il se déduit aisément du théorème pour l'application collision. En horizon infini, le flot peut passer un temps très long – et, crucialement, qui n'est pas de carré intégrable – entre deux collisions. Cela donne lieu à un théorème central limite avec une renormalisation non standard (en $\sqrt{t \ln(t)}$ au lieu de \sqrt{t}) [31, 215].

Comme pour les transformations unimodales, les billards de Sinaï à horizon fini se prêtent à une approche par les tours de Young.

Théorème 2.22. *[234, Theorem 6]*

Soit (A, μ, T) l'application collision d'un billard de Sinaï d'horizon fini. Alors on peut construire une tour de Young vérifiant les conditions exposées en Sous-partie 2.4.4, et telle que $\mu(R \geq n|\Lambda) \leq e^{-\beta n}$ pour un certain $\beta > 0$.

Tout comme pour les transformations unimodales, on peut en déduire un théorème central limite, des estimées de grandes déviations, mais aussi des résultats utilisant de façon plus profonde la structure des tours au-dessus de transformation Gibbs-Markov.

2.4.6 Variations autour des billards de Sinaï

Le théorème central limite non standard pour le flot billard en horizon infini est dû à de longues attentes entre deux collisions avec une paroi courbée. Le même phénomène apparaît avec le *billard stade*, introduit par L. Bunimovich.

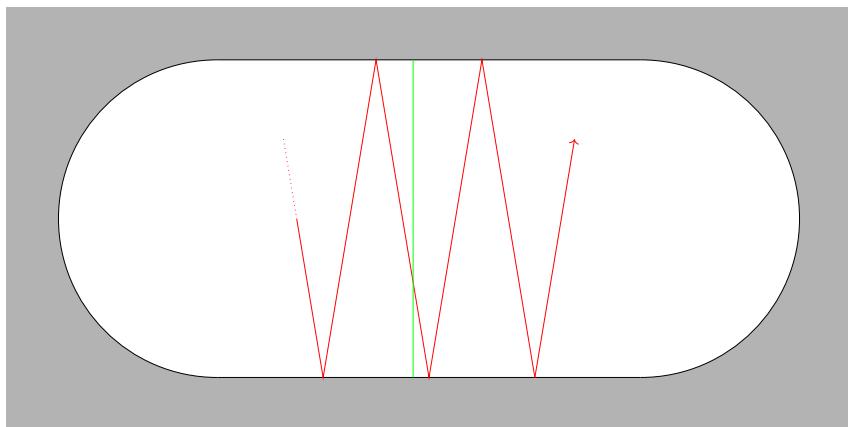


FIGURE 11 – Une table de billard stade, constituée d'un rectangle et de deux demi-disques. Une particule ponctuelle rebondit à l'intérieur de la table. Les trajectoires rouge et verte représentent chacune un morceau d'orbite d'une telle particule.

Le billard stade est intimement lié aux billards de Sinaï à horizon infini : ce billard reste ergodique [42], mais les corrélations décroissent plus lentement [20, 54] et le système satisfait un théorème central limite critique avec renormalisation en $\sqrt{n \ln(n)}$ [19].

Théorème 2.23. *[19, Theorem 1.1]*

Soit (A, μ, T) l'application collision d'un billard stade, où $\mu \in \mathcal{P}(A)$ est la mesure de Liouville normalisée. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction höldérienne d'intégrale nulle.

Notons I la moyenne de f sur l'ensemble des points $(x, 0) \in A$ tels que x appartient à l'un des deux bords rectilignes du billard¹⁹, ℓ la longueur d'un des bords rectilignes, et r le rayon d'un des

19. L'orbite d'un tel point $(x, 0)$ sous le flot billard consistera donc à faire des allers-retours entre les deux bords rectilignes opposés du billard, avec des collisions perpendiculaires au bord. L'orbite verte de la Figure 11 en est un exemple.

demi-cercles.

Alors la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n f}{\sqrt{n \ln(n)}}\right)_{n \geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance

$$\sigma^2 = \frac{4 + 3 \ln(3)}{4 - 3 \ln(3)} \frac{\ell^2 I^2}{4r(\pi r + \ell)}.$$

Revenons aux billards en horizon infini. Si les obstacles sont strictement convexes mais la courbure de leur bord s'annule en certains points, on peut obtenir une décroissance polynomiale des corrélations [236] ; de même avec des billards ayant des pointes [17, 54, 237].

Si l'on relâche les hypothèses sur la forme des obstacles, on peut considérer par exemples des obstacles rectangulaires aux bords horizontaux ou verticaux. Ce modèle, ou du moins sa \mathbb{Z}^2 -extension, est dit modèle du *vent dans les arbres*, et appelle des outils complètement différents : comme il s'agit alors de flots de translation sur des surfaces plates, le flot de renormalisation – qui est un flot sur l'espace de Teichmüller de la surface de translation – va jouer un rôle primordial, et on peut démontrer par exemple des diffusions sur- ou sous-critiques dans le plan [71, 72].

Les billards de Sinaï en dimension supérieure ou égale à 3 sont mal compris : la combinatoire des singularités devient plus riche, ce qui fait échouer certains arguments qui jouent un rôle central en dimension 2 [21].

3 L'opérateur de transfert

L'ensemble des travaux évoqués ici utilise l'*opérateur de transfert*, et très souvent une approche spectrale. Nous introduisons dans un premier temps l'opérateur de composition, aussi appelé *opérateur de Koopman*. Dans ce qui suit, et sauf mention du contraire, (A, μ, T) est un système dynamique préservant une mesure σ -finie.

3.1 Opérateur de Koopman

Afin de pouvoir déployer l'arsenal conséquent de l'algèbre linéaire et, plus généralement, de l'analyse fonctionnelle, on associe à la dynamique des opérateurs. Le plus simple est l'*opérateur de Koopman*.

Définition 3.1 (Opérateur de Koopman).

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant une mesure σ -finie, et $p \in [1, \infty]$. L'opérateur de Koopman est l'isométrie

$$\mathcal{K} : \begin{cases} \mathbb{L}^p(A, \mu) & \rightarrow \mathbb{L}^p(A, \mu) \\ f & \mapsto f \circ T \end{cases}. \quad (3.1)$$

Remarque 3.2.

Les espaces \mathbb{L}^p ne sont pas les seuls espaces sur lesquels on peut définir l'opérateur de Koopman. Par exemple, si A est un espace topologique et T est continue, alors \mathcal{K} est une contraction faible sur $C(A, \mathbb{C})$. Si A est une variété différentielle de classe C^k compacte et T est de classe C^k , alors \mathcal{K} agit continûment sur $C^k(A, \mathbb{C})$.

De nombreuses propriétés de la transformation (A, μ, T) se lisent dans les propriétés de l'opérateur de Koopman. Par exemple, (A, μ, T) est ergodique si et seulement si 1 est une valeur propre simple de $\mathcal{K} \curvearrowright \mathbb{L}^\infty(A, \mu)$. Nous référions le lecteur par exemple à [88] pour de plus amples informations.

Malheureusement, les propriétés spectrales de l'action de \mathcal{K} sur des espaces de fonctions le rendent en général difficile à manipuler. Par exemple, dès que μ est ergodique et non atomique, le spectre $\text{Sp}(\mathcal{K} \curvearrowright \mathbb{L}^2(A, \mu))$ de l'action de \mathcal{K} sur $\mathbb{L}^2(A, \mu)$ contient le cercle unité [137, Proposition 3.5].

Dans le cadre élémentaire des transformations uniformément dilatantes du cercle, si l'on se restreint à des sous-espaces de fonctions usuels, la situation est encore pire. Par exemple, si T est une telle transformation dilatante du cercle de facteur d'expansion $\lambda > 1$, alors l'action de l'opérateur de Koopman multiplie la dérivée par un facteur d'au moins λ (et donc la dérivée k -ième par un facteur λ^k , ou la semi-norme α -höldérienne par un facteur λ^α).

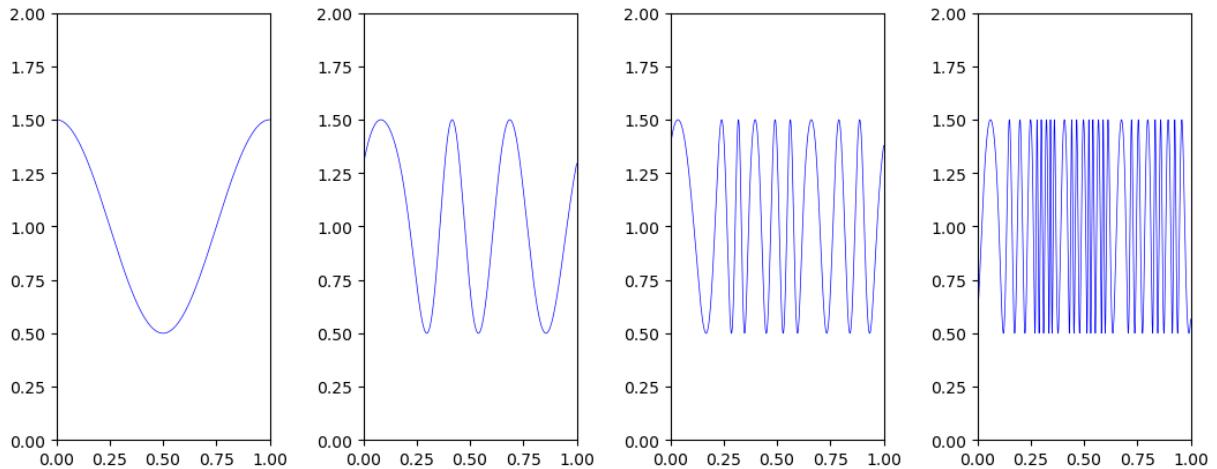


FIGURE 12 – De gauche à droite : graphes de $f \circ T^k$ pour $0 \leq k \leq 3$, où $T = T_{-3,0,15}$ est la transformation dilatante du cercle définie à l'Exemple 1.3 et $f(x) = 1 + \frac{\cos(2\pi x)}{2}$.

Plus généralement, dans le cadre de transformations hyperboliques, l'action de \mathcal{K} sur des espaces de fonctions höldériennes, lipschitziennes ou de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 1$ aura un rayon spectral strictement plus grand que 1.

De plus, si f est une fonction propre pour \mathcal{K} associée à la valeur propre λ , alors

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(A, \mu)} = \|f \circ T\|_{\mathbb{L}^\infty(A, \mu)} = \|\mathcal{K}(f)\|_{\mathbb{L}^\infty(A, \mu)} = \|\lambda f\|_{\mathbb{L}^\infty(A, \mu)} = |\lambda| \|f\|_{\mathbb{L}^\infty(A, \mu)},$$

donc toute valeur propre de \mathcal{K} est de norme 1. Par conséquent, le spectre de l'action de \mathcal{K} sur de tels espaces contient (beaucoup) de spectre essentiel.

3.2 Définition de l'opérateur de transfert

Une solution consiste à utiliser non pas l'opérateur de Koopman mais son dual, l'*opérateur de transfert*.

Définition 3.3 (Opérateur de transfert).

Soit (A, μ, T) un système dynamique, où μ est une mesure σ -finie non singulière, c'est-à-dire telle que $T_*\mu \ll \mu$.

Soit $f \in \mathbb{L}^1(A, \mu)$. Alors $f\mu$ est une mesure finie sur A , donc $T_*(f\mu)$ est aussi une mesure finie sur A . De plus, $T_*(f\mu) \ll \mu$. On pose

$$\mathcal{L}(f) := \frac{dT_*(f\mu)}{d\mu}.$$

On appelle \mathcal{L} l'opérateur de transfert relativement à μ sur $\mathbb{L}^1(A, \mu)$. Par construction, $\mathcal{L} \curvearrowright \mathbb{L}^1(A, \mu)$ linéairement, est de norme au plus 1, et

$$\int_A \mathcal{L}(f) \cdot g \, d\mu = \int_A f \cdot g \circ T \, d\mu \quad \forall f \in \mathbb{L}^1(A, \mu), \forall g \in \mathbb{L}^\infty(A, \mu). \quad (3.2)$$

Supposons que l'opérateur de Koopman agisse continûment sur $\mathbb{L}^1(A, \mu)$; c'est en particulier le cas si μ est T -invariante. Soient $p \in (1, +\infty]$ et $q := \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué à p . L'opérateur de transfert \mathcal{L} relativement à μ est défini sur $\mathbb{L}^p(A, \mu)$ par pré-dualité :

$$\int_A \mathcal{L}(f) \cdot g \, d\mu = \int_A f \cdot g \circ T \, d\mu \quad \forall f \in \mathbb{L}^p(A, \mu), \forall g \in \mathbb{L}^q(A, \mu). \quad (3.3)$$

En effet, l'application $g \mapsto \int_A f \cdot g \circ T \, d\mu$ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{L}^q(A, \mu)$, et est donc bien représentée par un unique $\mathcal{L}(f) \in \mathbb{L}^p(A, \mu)$.

De nombreuses propriétés du système (A, μ, T) peuvent se traduire en propriétés de l'opérateur de transfert. Par exemple :

- Si $f \in \mathbb{L}^1(A, \mu)$, alors

$$\int_A \mathcal{L}(f) \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

- La mesure μ est T -invariante si et seulement si $\mathcal{L}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Alors \mathcal{L} est une contraction faible sur tous les espaces $\mathbb{L}^p(A, \mu)$, avec $p \in [1, \infty]$.
- Si T préserve μ , alors (A, μ, T) est ergodique si et seulement si 1 est une valeur propre simple de $\mathcal{L} \curvearrowright \mathbb{L}^1(A, \mu)$.

Exemple 3.4 (Transformations de l'intervalle).

Si (A, T) est une transformation \mathcal{C}^1 par morceaux de l'intervalle ayant un nombre dénombrable de branches et si $T' \neq 0$ presque partout pour la mesure de Lebesgue, alors l'opérateur de transfert par rapport à la mesure de Lebesgue admet une formule explicite :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \sum_{y \in T^{-1}(\{x\})} \frac{1}{|T'(y)|} f(y).$$

L'opérateur de transfert peut se définir sur d'autres espaces que les espaces $\mathbb{L}^p(A, \mu)$. On peut procéder par exemple :

- Par dualité : si T est une transformation de classe \mathcal{C}^k , alors \mathcal{K} agit sur $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{C})$, donc on peut définir un opérateur dual \mathcal{L} agissant sur $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{C})^*$.
- Par densité : si \mathcal{L} est définie et bornée sur un sous-espace dense d'un espace de Banach, on peut l'étendre par continuité à tout cet espace.

3.3 Quasi-compacité

Une étude numérique élémentaire permet d'observer que l'opérateur de transfert d'une dynamique dilatante lisse du cercle a de bien meilleures propriétés de convergence. On peut en particulier espérer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{C})$, la suite de fonctions $(\mathcal{L}^n(f))_{n \geq 0}$ converge, où \mathcal{L} est l'opérateur de transfert relativement à la mesure de Lebesgue.

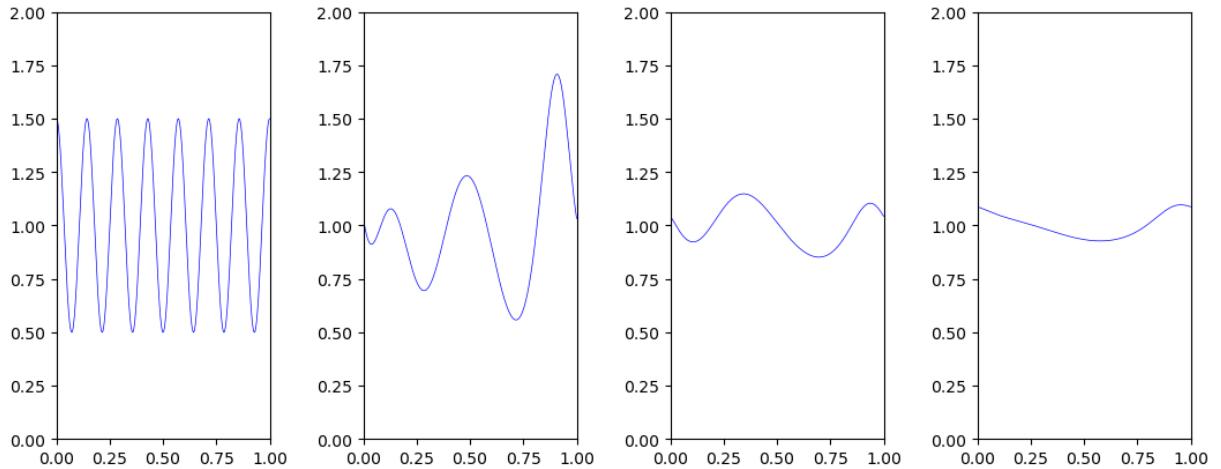


FIGURE 13 – De gauche à droite : graphes de $\mathcal{L}^k(f)$ pour $0 \leq k \leq 3$, où $T = T_{-3,0,15}$ est la transformation dilatante du cercle définie à l’Exemple 1.3, \mathcal{L} est l’opérateur de transfert relativement à la mesure de Lebesgue, et $f(x) = 1 + \frac{\cos(14\pi x)}{2}$.

3.3.1 Rayon spectral essentiel

Le phénomène observé est une conséquence de la *quasi-compacité* de \mathcal{L} .

Définition 3.5 (Rayon spectral essentiel).

Soient \mathcal{B} un espace de Banach et $M : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ un opérateur. Le rayon spectral essentiel $\rho_{\text{ess}}(M \curvearrowright \mathcal{B})$ est l’infimum des $r > 0$ tels que $\text{Sp}(M \curvearrowright \mathcal{B}) \cap B(0, r)^c$ consiste en un nombre fini de valeurs propres de multiplicité finie.

De façon équivalente, $\rho_{\text{ess}}(M \curvearrowright \mathcal{B})$ est l’infimum des $r > 0$ tels que l’on puisse écrire $M = N + K$, où N est un opérateur de rayon spectral au plus r et K est compact.

Toujours de façon équivalente, $\rho_{\text{ess}}(M \curvearrowright \mathcal{B})$ est le rayon spectral de la projection de M dans l’algèbre de Banach $L(\mathcal{B}, \mathcal{B})/K(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, où $K(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ est l’idéal bilatère des opérateurs compacts.

Un opérateur M est dit quasi-compact si $\rho_{\text{ess}}(M \curvearrowright \mathcal{B}) < \rho(M \curvearrowright \mathcal{B})$.

En particulier, un opérateur $M \in L(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ est compact si et seulement si $\rho_{\text{ess}}(M \curvearrowright \mathcal{B}) = 0$.

Dans le cas des opérateurs de transfert, on peut définir des *résonances de Ruelle* à l’aide de la quasi-compacité.

Définition 3.6 (Résonances de Ruelle).

Soient \mathcal{B} un espace de Banach sur lequel agit un opérateur de transfert \mathcal{L} , éventuellement à poids. Les résonances de Ruelle de \mathcal{L} sont les valeurs propres de \mathcal{L} de module strictement supérieur à $\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B})$.

Les résonances de Ruelle sont en général robustes, au sens où, sous des conditions très générales, elles ne dépendent pas de l’espace de Banach \mathcal{B} choisi [16, Lemme A.1] et sont stables sous une large classe de perturbations [141].

3.3.2 Spectre périphérique, I : Ergodicité et mélange

Nous allons maintenant aborder le *spectre périphérique* de l’opérateur de transfert. Cette notion est l’occasion de revenir sur les propriétés d’ergodicité et de mélange, d’aborder des décompositions propres de l’opérateur de transfert, et d’introduire une décomposition périodique de transformations ergodiques. Cette notion sera approfondie dans la Sous-section 5.3.

Soit (A, μ, T) un système dynamique non singulier et \mathcal{L} l'opérateur de transfert associé agissant sur un espace de Banach $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}^1(A, \mu)$. Supposons de plus que \mathcal{B} est dense dans $\mathbb{L}^1(A, \mu)$ et que $\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}) < 1$.

Soit λ une valeur propre de \mathcal{L} et f une fonction propre associée. Alors

$$|\lambda| \|f\|_{\mathbb{L}^1(A, \mu)} = \|\mathcal{L}(f)\|_{\mathbb{L}^1(A, \mu)} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^1(A, \mu)},$$

donc $|\lambda| \leq 1$. De plus, $\mathcal{L}^*(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \circ T = \mathbf{1}$, donc $1 \in \text{Sp}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B})$. Par conséquent, $\rho(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}) = 1$.

Définition 3.7 (Spectre périphérique).

Dans le cadre ci-dessus, le spectre périphérique de $\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}$ est l'ensemble des valeurs propres de \mathcal{L} de module 1.

Le spectre périphérique est intéressant car il permet de transcrire et d'affiner les propriétés ergodiques élémentaires de la Sous-section 2.1. La valeur propre 1 permet déjà de lire les propriétés d'ergodicité et de mélange :

Proposition 3.8.

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et \mathcal{L} l'opérateur de transfert associé agissant sur un espace de Banach \mathcal{B} . Supposons de plus que $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}^2(A, \mu)$ continûment, que \mathcal{B} est dense dans $\mathbb{L}^2(A, \mu)$ et que $\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}) < 1$. Alors :

- Les blocs de Jordan des valeurs propres périphériques sont triviaux.
- (A, μ, T) est ergodique si et seulement si $1 \in \text{Sp}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B})$ est de multiplicité 1.
- (A, μ, T) est mélangeant si et seulement si le spectre périphérique de $\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}$ est réduit à $\{1\}$ de multiplicité 1.

La démonstration de cette proposition fait apparaître des raisonnements dont nous aurons besoin par la suite ; nous la détaillons donc.

Démonstration.

Premier point : Si une valeur propre périphérique avait un bloc de Jordan non trivial, alors on pourrait trouver une fonction f telle que $(\mathcal{L}^n(f))_{n \geq 0}$ croisse polynomialement dans \mathcal{B} , ce qui contredirait la contractivité faible de \mathcal{L} dans $\mathbb{L}^2(A, \mu)$.

Deuxième point : Pour tout λ dans le spectre périphérique, notons π_λ le projecteur spectral de \mathcal{L} sur le sous-espace propre associé, et Q la restriction de \mathcal{L} au spectre non périphérique. Alors, par le premier point,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}) \\ \lambda \text{ périphérique}}} \lambda \pi_\lambda + Q \\ \mathcal{L}^n &= \sum_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}) \\ \lambda \text{ périphérique}}} \lambda^n \pi_\lambda + Q^n \\ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^k &= \pi_1 + \frac{1}{n} \sum_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}) \\ \lambda \text{ périphérique} \\ \lambda \neq 1}} \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \pi_\lambda + Q^n. \end{aligned}$$

De plus, $\|Q^n\|_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} = O(r^n)$ avec $r \in (0, 1)$. Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^k(f) = \pi_1(f).$$

En dualisant, pour tous $f \in \mathcal{B}$ et $g \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f \cdot \frac{1}{n} S_n g \, d\mu = \int_A \pi_1(f) \cdot g \, d\mu.$$

Si (A, μ, T) est ergodique, par le théorème ergodique de von Neumann, cette limite est aussi égale à $\int_A f \, d\mu \cdot \int_A g \, d\mu$. Ceci étant vrai pour tout $g \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$, on conclut que $\pi_1(f) = (\int_A f \, d\mu) \cdot \mathbf{1}$, c'est-à-dire que $1 \in \text{Sp}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B})$ est de multiplicité 1. Réciproquement, si $1 \in \text{Sp}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B})$ est de multiplicité 1, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f \cdot \frac{1}{n} S_n g \, d\mu = \int_A f \, d\mu \cdot \int_A g \, d\mu.$$

Cette propriété s'étend par densité à tout $f \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$. Par le théorème ergodique de von Neumann, cette limite est aussi égale à $\int_A f \cdot \mathbb{E}(g|\mathcal{I}) \, d\mu$, où \mathcal{I} est la tribu des boréliens T -invariants. Par conséquent, $\mathbb{E}(g|\mathcal{I}) \, d\mu = \int_A g \, d\mu$, donc (A, μ, T) est ergodique.

Troisième point : Supposons le spectre périphérique réduit à $\{1\}$ de multiplicité 1. Alors on dispose d'une décomposition propre $\mathcal{L} = \mathbf{1} \otimes \mu + Q$, où $\|Q^n\|_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} = O(r^n)$ avec $r \in (0, 1)$. Mais alors, pour tout $f \in \mathcal{B}$ et $g \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$,

$$\int_A f \cdot g \circ T^n \, d\mu = \int_A \mathcal{L}^n(f) \cdot g \, d\mu = \int_A f \, d\mu \cdot \int_A g \, d\mu + O(r^n) \|f\|_{\mathcal{B}} \|g\|_{\mathbb{L}^2(A, \mu)}.$$

En particulier, pour tous $f \in \mathcal{B}$ et $g \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f \cdot g \circ T^n \, d\mu = \int_A f \, d\mu \cdot \int_A g \, d\mu.$$

Cette propriété s'étend elle aussi par continuité à toute fonction $f \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$. Le système (A, μ, T) est donc mélangeant. Réciproquement, si le spectre périphérique n'est pas réduit à $\{1\}$, soit λ une valeur propre périphérique différente de 1, et $f \neq \mathbf{1}$ une fonction propre associée. Soit $g \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$ telle que $\int_A f \cdot g \, d\mu \neq 0$. Alors, pour tout $n \geq 0$,

$$\int_A f \cdot g \circ T^n \, d\mu = \int_A \mathcal{L}^n(f) \cdot g \, d\mu = \lambda^n \int_A f \cdot g \, d\mu,$$

ce qui contredit le mélangeant. □

Le point le plus important pour la suite de ce mémoire est que, si le spectre périphérique de $\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}$ est réduit à $\{1\}$ de multiplicité 1, alors \mathcal{L} a un trou spectral : il existe $r \in (0, 1)$ tel que $\mathcal{L} = \mathbf{1} \otimes \mu + Q$ et $\|Q^n\|_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} = O(r^n)$. On peut ainsi démontrer la décroissance exponentielle des corrélations telle qu'au Théorème 2.8 :

Corollaire 3.9 (Décroissance exponentielle des corrélations).

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et mélangeant. Soit \mathcal{L} l'opérateur de transfert associé agissant sur un espace de Banach $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}^2(A, \mu)$. Supposons de plus que \mathcal{B} est dense dans $\mathbb{L}^2(A, \mu)$ et que $\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}) < 1$. Alors il existe $C \geq 0$ et $\rho \in [0, 1)$ tels que, pour tout $n \geq 0$, tout $f \in \mathcal{B}$ et tout $g \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$,

$$\left| \int_A f \cdot g \circ T^n \, d\mu - \int_A F \, d\mu \cdot \int_A g \, d\mu \right| \leq C \rho^n \|f\|_{\mathcal{B}} \|g\|_{\mathbb{L}^2(A, \mu)}. \quad (3.4)$$

La référence la plus complète sur le sujet est l'ouvrage de V. Baladi [10].

Ceci reste valable sous conditions même si T ne préserve pas la mesure de référence. Par exemple, dans le cas de la Figure 13, l'opérateur \mathcal{L} agissant sur \mathcal{C}^1 est somme d'un opérateur Q de rayon spectral strictement inférieur à 1 et d'un opérateur de rang 1 de la forme $h \otimes \nu$, où h est de classe \mathcal{C}^1 . Alors, quelque soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{C})$, la suite $\mathcal{L}^n(f)$ converge à vitesse exponentielle vers un multiple de h , et $h(x)dx$ est une mesure T -invariante.

Exemple 3.10 (Transformation dyadique).

Pour la transformation dyadique $T : x \rightarrow 2x$ [1] sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} et la mesure de Lebesgue, on utilise $\mathcal{B} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, muni de la semi-norme $|f|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})} := \|f'\|_\infty$ et de la norme $\|f\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})} := \|f\|_\infty + |f|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})}$. On montre à l'aide de la formule de l'Exemple (3.4) que

$$|\mathcal{L}(f)|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})} \leq \frac{1}{2}|f|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})}.$$

De plus, $\|g\|_\infty \leq \frac{1}{4}|g|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})}$ pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ d'intégrale nulle. Donc, pour tout $n \geq 0$,

$$\left\| \mathcal{L}^n(f) - \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} f(x) dx \right\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})} \leq \frac{5}{4} 2^{-n} \|f\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})}.$$

En particulier, \mathcal{L} est somme d'un opérateur de rang 1 et d'un opérateur de rayon spectral au plus $1/2$, donc $\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})) \leq 1/2$; on a en fait égalité, comme peut se voir en construisant des fonctions de Weierstrass \mathcal{C}^1 et propres pour \mathcal{L} .

Quand on ne suppose pas que (A, μ, T) est mélangeante, son spectre périphérique n'est pas nécessairement trivial. Allons plus loin dans l'interprétation dynamique de ce spectre périphérique.

Proposition 3.11.

Soit (A, μ, T) un système dynamique ergodique préservant la mesure de probabilité et \mathcal{L} l'opérateur de transfert associé agissant sur un espace de Banach $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}^2(A, \mu)$. Supposons de plus que \mathcal{B} est dense dans $\mathbb{L}^2(A, \mu)$, stable par multiplication et conjugaison complexe, et que $\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}) < 1$. Alors :

- *Le spectre périphérique est un sous-groupe fini de \mathbb{S}_1 , et chacune de ses valeurs propres est de multiplicité 1.*
- *Soit N l'ordre de ce sous-groupe. Alors il existe une partition $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ de A telle que $T(A_k) = A_{k+1}$ pour tout k , et que $(A_k, \mu(\cdot|A_k), T^N)$ soit mélangeante pour tout k .*

Démonstration.

Soit λ une valeur propre périphérique, et f un vecteur propre associé. Remarquons tout d'abord que

- $|f| = |\mathcal{L}(f)| \leq \mathcal{L}(|f|)$, donc par contractivité faible $|f| = \mathcal{L}(|f|)$. Le système dynamique étant ergodique, $|f|$ est constante. Sans perte de généralité, on pourra supposer $f = e^{i\theta}$ de module 1.
- \bar{f} est une fonction propre de \mathcal{L} pour la valeur propre $\bar{\lambda}$.

Par conséquent,

$$\|f \circ T - \bar{\lambda}f\|_{\mathbb{L}^2(A, \mu)}^2 = \int_A (f \circ T - \bar{\lambda}f)(\bar{f} \circ T - \lambda\bar{f}) d\mu = 2\|f\|_{\mathbb{L}^2(A, \mu)}^2 - 2\|f\|_{\mathbb{L}^2(A, \mu)}^2 = 0.$$

Autrement dit, f est un vecteur propre de l'opérateur de Koopman pour la valeur propre $\bar{\lambda}$.

Soient λ_1, λ_2 deux valeurs propres périphériques, et f_1, f_2 deux fonctions propres associées. Alors

$$\mathcal{L}(f_1 f_2) = \mathcal{L}(\lambda_1 f_1 \circ T \cdot \lambda_2 f_2 \circ T) = \lambda_1 \lambda_2 f_1 f_2.$$

Comme f_1 et f_2 sont de module constant, elles ne s'annulent pas, donc $f_1 f_2$ est fonction propre de $\lambda_1 \lambda_2 \in \text{Sp}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B})$. Le spectre périphérique est clos par multiplication et conjugaison complexe, donc c'est un sous-groupe de \mathbb{S}_1 ; comme il est discret, c'est un sous-groupe fini. Soit N son ordre.

Soit f un vecteur propre d'une valeur propre périphérique λ . Alors f^N est fonction propre pour la valeur propre 1, donc constante. Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $f = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \{2\pi \frac{k}{N} : k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$.

Si le spectre périphérique est réduit à $\{1\}$, la Proposition 3.8 permet de conclure. Sinon, choisissons $\lambda = e^{i\frac{2\pi}{N}}$. L'égalité $f \circ T = \bar{\lambda}f$ devient $\theta \circ T = \theta - \frac{2\pi}{N}$. Les ensembles $A_k = \{\theta = -2\pi \frac{k}{N}\}$ forment alors une partition de A telle que $T(A_k) = A_{k+1}$ pour tout k .

Soient f_1, f_2 deux fonctions propres d'une même valeur propre périphérique λ' . Soit $k \geq 0$ tel que $\lambda' \lambda^k = 1$. Alors $f^k f_1$ et $f^k f_2$ sont deux fonctions propres de la valeur propre 1, donc sont colinéaires. Donc f_1 et f_2 sont colinéaires : λ' est une valeur propre simple.

Enfin, on peut écrire explicitement une décomposition spectrale de \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \lambda^k f^k \otimes \bar{f}^k d\mu + Q,$$

où $\|Q\|_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} < 1$. De là,

$$\mathcal{L}^N = \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f^k \otimes \bar{f}^k d\mu + Q^N.$$

Le mélange de chaque $(A_k, \mu(\cdot | A_k), T^N)$ suit des mêmes arguments que dans le troisième point de la démonstration de la Proposition 3.8. \square

On dira alors que N est la *période* de (A, μ, T) et $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ la *décomposition en composantes périodiques* du système. La Proposition 3.11 affirme que le spectre de l'opérateur de transfert d'une dynamique ergodique a la forme donnée par la Figure 14.

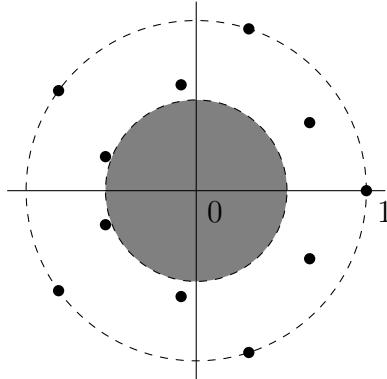


FIGURE 14 – Spectre d'un opérateur de transfert $\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}$ avec une période de 5. Il y a potentiellement une infinité de résonances de Ruelle s'accumulant sur le spectre essentiel.

Remarque 3.12 (Régularité des composantes périodiques).

Dans les conditions de la Proposition 3.11, une fonction propre associée à $e^{i2\pi \frac{k}{N}}$ est

$$f_k = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e^{-i2\pi \frac{k\ell}{N}} \mathbf{1}_{A_\ell}.$$

Par combinaison linéaire de ces fonctions propres, les indicatrices $\mathbf{1}_{A_\ell}$ appartiennent à \mathcal{B} , ce qui constraint la régularité des ensembles A_ℓ .

Remarque 3.13 (Théorie de Perron-Frobenius).

Les arguments esquissés ici sont des version fonctionnelles de la théorie de Perron-Frobenius [10, Chapter 1], appliquée par exemple à une chaîne de Markov de matrice de transition P :

- $1 = \rho(P)$ est valeur propre de P .
- P est irréductible si et seulement si 1 est valeur propre simple de P .
- P est apériodique si et seulement si le spectre périphérique de P est réduit à $\{1\}$ de multiplicité 1 .
- Si le spectre périphérique de P est non trivial, on peut déduire une décomposition de l'espace d'états en composantes périodiques.

Ce lien est d'autant plus profond que l'on peut coder une chaîne de Markov par un système dynamique, puis faire correspondre les propriétés spectrales la matrice de transition et celles de l'opérateur de transfert du système dynamique associé.

3.3.3 Montrer la quasi-compacité

Hors quelques méthodes ad-hoc telles que dans l'Exemple 3.10, il existe deux grandes approches pour montrer la quasi-compacité d'un opérateur.

La première consiste à démontrer directement l'existence d'un trou spectral, par exemple par des méthodes de couplage²⁰ ou de contraction de cônes dans \mathcal{B} , utilisant notamment la métrique de Hilbert (voir [30] et [10, Chapter 2], [201] dans un cadre complexe). Cela peut donner des estimées explicites sur le trou spectral, qui sont en général beaucoup plus proches de 1 que du rayon spectral essentiel.

Une deuxième méthode, qui donne parfois des estimées optimales sur le rayon spectral essentiel [46, 47, 59, 139], passe par des *inégalités de Döblin–Fortet* [78] (aussi appelées inégalités de *Ionescu–Tulcea–Marinescu* [125] ou *Lasota–Yorke* [150]) et des théorèmes tels que [120, 178] :

Théorème 3.14 (Hennion, 1993 ; d'après Nussbaum, 1970).

Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_s)$ un espace de Banach et $\|\cdot\|_w$ une norme sur \mathcal{B} . Soit $\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}$ continûment. Supposons que :

- $\mathcal{L} : (\mathcal{B}, \|\cdot\|_s) \rightarrow (\mathcal{B}, \|\cdot\|_w)$ est compact.
- Il existe des suites $(R_n)_{n \geq 0}$, $(r_n)_{n \geq 0}$ positives telles que, pour tout $f \in \mathcal{B}$ et $n \geq 0$,

$$\|\mathcal{L}^n(f)\|_s \leq r_n \|f\|_s + R_n \|f\|_w. \quad (3.5)$$

$$Alors \rho_{\text{ess}}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} r_n^{\frac{1}{n}}.$$

On parlera de *norme forte* pour $\|\cdot\|_s$ et de *norme faible* pour $\|\cdot\|_w$.

Par exemple, si T est une transformation \mathcal{C}^2 dilatante du cercle qui ne préserve pas nécessairement la mesure de Lebesgue, on peut montrer qu'il existe des constantes C , C' telles que, pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{C})$ et tout $n \geq 0$,

$$\|\mathcal{L}^n(f)\|_{\mathcal{C}^1} \leq \frac{C}{\min |(T^{(n)})'|} \|f\|_{\mathcal{C}^1} + C' \|f\|_{\mathcal{C}^0}.$$

20. Qui ont l'avantage d'être encore efficaces en l'absence de trou spectral et de décroissance exponentielle des corrélations : voir [227] dans le cadre de chaînes de Markov, et [235] dans le cadre de systèmes dynamiques. Ces méthodes ont été utilisées intensivement par D. Dolgopyat conjointement avec la notion de *paires standards* [162].

Une telle estimée dépend crucialement de la propriété de distorsion lipschitzienne vue en Sous-section 2.2. En appliquant le Théorème 3.14 avec les espaces de Banach \mathcal{C}^0 et \mathcal{C}^1 , on obtient

$$\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})) \leq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \min |(T^n)'|^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{\min |T'|} < 1;$$

la compacité de l'injection $\mathcal{C}^1 \hookrightarrow \mathcal{C}^0$ découlant du théorème d'Arzelà-Ascoli. Dans le cas de la transformation dyadique, $\min |T'| = 2$; les inégalités larges ci-dessus sont toutes des égalités et on retrouve l'estimée de l'Exemple 3.10.

3.4 Exemples d'espaces de Banach adaptés

Le choix de paires de normes adaptées $\|\cdot\|_s, \|\cdot\|_w$ est crucial pour pouvoir appliquer, par exemple, le Théorème 3.14, et ainsi débuter une analyse spectrale du système dynamique. Ces espaces doivent parfois être taillés sur mesure pour la dynamique, ce qui peut s'avérer particulièrement difficile. Ainsi, la conception d'espaces de Banach adaptés au flot du billard de Sinai a demandé une quinzaine d'années pour se conclure [14].

3.4.1 Transformations dilatantes, dilatantes par morceaux

La présence de directions contractantes apporte des difficultés conceptuelles que nous aborderons dans la suite de ce mémoire. Commençons par des dynamiques dilatantes, en nous restreignant à décrire les normes fortes; les normes faibles seront en générales des espaces semblables, mais de régularité plus faible (fonctions continues, $\mathbb{L}^p\dots$).

Pour les sous-décalages de type fini, le choix le plus classique consiste à travailler avec l'espace des fonctions höldériennes [10, 38].

Pour des transformations dilatantes de classe \mathcal{C}^k du cercle, avec $k \geq 2$, on pourra travailler par exemple avec l'espace $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{S}_1, \mathbb{C})$. On peut de même étudier des transformations $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ avec²¹ $k + \alpha > 1$, quitte à introduire encore une fois des espaces de fonctions höldériennes.

La notion de régularité admet de nombreuses variations; on peut aussi travailler aussi avec des espaces de Sobolev, la compacité étant alors assurée par le théorème de Rellich–Kondrachov. Dans le cadre des transformations dilatantes de classe \mathcal{C}^2 du cercle, il est possible de démontrer particulièrement simplement la quasi-compacité de $\mathcal{L} \curvearrowright W^{1,1}(\mathbb{S}_1, \mathbb{C})$ [102].

En dimension 1, la classe des systèmes $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ par morceaux introduit une difficulté supplémentaire. La dynamique n'étant en général pas markovienne, l'opérateur de transfert associé ne préserve pas en général les fonctions continues. Il faut donc se restreindre à des espaces de fonctions de basse régularité, qui admettent en particulier des fonctions non continues. L'exemple le plus classique est l'espace des fonctions à variation bornée [150], mais il en existe des variantes : fonctions à oscillations bornées [140], espaces de Sobolev [15] [220]...

En dimension supérieure, les systèmes $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ dilatants par morceaux présentent un nouvel obstacle important : la dilatation et le découpage en morceaux peuvent interagir de telle sorte que le système dynamique ne possède pas, ou bien possède un nombre infini, de mesures de probabilités absolument continues [49, 228]. Cet effet se contrôle à l'aide d'estimations sur les angles entre discontinuités, ou sur le nombre de discontinuités, des itérées de la transformation, ce qui a donné lieu à une littérature importante et encore active [13, 15, 63, 108, 204] [220].

²¹ Une régularité \mathcal{C}^1 ne suffit pas : on perd alors la propriété si importante de distorsion höldérienne. La dynamique \mathcal{C}^1 est beaucoup moins rigide.

3.4.2 Transformations Gibbs-Markov : Espaces de fonctions lipschitziennes

Un cas particulier, mais particulièrement important pour ce mémoire, est celui des transformations Gibbs-Markov, dont la lectrice pourra trouver une présentation dans [1, Chapter 4] et [112, Chapitre1]. Nous allons maintenant détailler le choix d'espaces de Banach et les inégalités de Döblin–Fortet pour ces transformations. Plusieurs bons espaces de Banach sont disponibles ; en voici deux particulièrement intéressants pour la suite.

Définition 3.15 (Espaces Lip^1 et Lip^∞).

Soit (A, α, d, μ, T) une transformation Gibbs-Markov, et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Pour tout $a \in \alpha$, définissons la semi-norme lipschitzienne de f sur a par

$$|f|_{\text{Lip}(a)} := \text{ess sup}_{\substack{x, y \in a \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}. \quad (3.6)$$

De cette famille de semi-normes locales on déduit deux semi-normes globales :

$$|f|_{\text{Lip}^1(A, \mu)} := \sum_{a \in \alpha} \mu(a) |f|_{\text{Lip}(a)} \quad \text{et} \quad |f|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)} := \sup_{a \in \alpha^*} |f|_{\text{Lip}(a)}. \quad (3.7)$$

Enfin, on en tire deux normes :

$$\|f\|_{\text{Lip}^1(A, \mu)} := \|f\|_{\mathbb{L}^1(A, \mu)} + |f|_{\text{Lip}^1(A, \mu)} \quad \text{et} \quad \|f\|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)} := \|f\|_{\mathbb{L}^\infty(A, \mu)} + |f|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)}. \quad (3.8)$$

On note $\text{Lip}^1(A, \mu)$ l'espace des fonctions $\mathbb{L}^1(A, \mu)$ de norme $\text{Lip}^1(A, \mu)$ finie, et de même pour $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$.

L'espace $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$ joue le rôle de l'espace des fonction lipschitziennes pour une transformation dilatante du cercle, ou pour un sous-décalage de type fini :

Théorème 3.16. [112, Corollaire 1.1.14]

Soit (A, α, d, μ, T) une transformation Gibbs-Markov de facteur de dilatation Λ . Alors $\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L} \curvearrowright \text{Lip}^\infty(A, \mu)) \leq \Lambda^{-1}$. En particulier, l'action de \mathcal{L} sur $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$ est quasi-compacte.

Remarque 3.17 (Composantes périodiques des transformations Gibbs-Markov).

Soit (A, α, d, μ, T) une transformation Gibbs-Markov ergodique. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ sa décomposition en composantes périodiques. D'après la Remarque 3.12, les indicatrices $\mathbf{1}_{A_k}$ appartiennent à $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$. Autrement dit, chaque A_k est une union de cylindres de longueur bornée. Mais, comme $A_k = T^{\ell N}(A_k)$ pour tout ℓ , les A_k sont en fait $\sigma(\alpha^*)$ -mesurables.

Exemple 3.18 (Transformation de Gauss).

La partition image de la transformation de Gauss est triviale, donc la seule composante périodique possible est $(0, 1]$ tout entier. Par conséquent sa période N vaut 1, et la transformation de Gauss $((0, 1], \mu, T)$ est mélangeante.

L'espace $\text{Lip}^1(A, \mu)$, beaucoup plus gros que $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$, joue un rôle particulier grâce à la propriété clef suivante :

Théorème 3.19. [112, Corollaire 1.1.14]

Soit (A, α, d, μ, T) une transformation Gibbs-Markov. L'opérateur \mathcal{L} envoie continûment l'espace $\text{Lip}^1(A, \mu)$ dans $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$.

Cette propriété, très forte, fait tout le sel des transformations Gibbs-Markov. On en déduit par exemple :

Corollaire 3.20.

Soit (A, α, d, μ, T) une transformation Gibbs-Markov. Il existe une constante C telle que, pour tout $a \in \alpha$ et $f \in \text{Lip}^\infty(A, \mu)$,

$$\|\mathcal{L}(\mathbf{1}_a f)\|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)} \leq C\mu(a) \|f\|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)}. \quad (3.9)$$

Démonstration.

L'opérateur $f \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{1}_a f)$ sur $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$ est la composition de l'opérateur $f \mapsto \mathbf{1}_a f$ de $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$ dans $\text{Lip}^1(A, \mu)$, et de l'opérateur \mathcal{L} de $\text{Lip}^1(A, \mu)$ dans $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$. Le premier a pour norme $\mu(a)$, et le second est borné par le Théorème 3.19. \square

3.4.3 Transformations Gibbs-Markov : Temps d'arrêt

Le Corollaire 3.20 est déjà remarquable. Nous allons le généraliser ici pour en obtenir une version qui s'avèrera cruciale pour nos applications. Au passage, nous ferons le lien avec un objet central de la théorie des processus stochastique : les temps d'arrêts. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter l'annexe de [226].

Définition 3.21 (Temps d'arrêt pour des processus stochastiques).

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une filtration sur un espace probabilisé (Ω, μ) . Une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt si $\{\varphi \leq n\}$ est \mathcal{F}_n -mesurable pour tout $n \geq 0$.

Une transformation Gibbs-Markov (A, α, d, μ, T) est équipée d'une filtration naturelle :

$$\mathcal{F}_n := \sigma \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} \alpha \right).$$

Avec cette définition, \mathcal{F}_0 est triviale, et $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ est la tribu borélienne de A . Une fonction est \mathcal{F}_n -mesurable si et seulement si elle est essentiellement constante sur les cylindres de longueur n . Nous en tirons une définition de temps d'arrêt adaptée aux transformations Gibbs-Markov, en éliminant de plus des cas dégénérés (fonctions constantes nulles, ou fonctions valant $+\infty$ avec probabilité positive).

Définition 3.22 (Temps d'arrêt pour des transformations Gibbs-Markov).

Soit (A, α, d, μ, T) une transformation Gibbs-Markov. Une fonction $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt si $\{\varphi \leq n\}$ est \mathcal{F}_n -mesurable pour tout $n \geq 0$, et si $1 \leq \varphi < +\infty$ presque sûrement.

Nous allons résumer quelques opérations que permettent ces temps d'arrêts. D'une part, nous disposons d'une partition adaptée : en notant α_n l'ensemble des cylindres de longueur n , il s'agit de

$$\alpha_\varphi := \bigsqcup_{n \geq 1} \{\bar{a} \in \alpha_n : \mu(\bar{a}) > 0 \text{ et } \bar{a} \subset \{\varphi = n\}\}. \quad (3.10)$$

On y associe aussi une transformation définie presque partout sur A :

$$T_\varphi : x \mapsto T^{\varphi(x)}(x), \quad (3.11)$$

qui ne préserve en général pas la mesure μ . L'opérateur de transfert associé à T_φ est :

$$\mathcal{L}_\varphi(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^n (\mathbf{1}_{\{\varphi=n\}} f). \quad (3.12)$$

Ces temps d'arrêts vont avoir deux propriétés très intéressantes. D'une part, on a une inégalité de Döblin–Fortet :

Proposition 3.23. [226, Corollaire A.6]

Soit (A, α, d, μ, T) une transformation Gibbs-Markov. Il existe une constante C telle que, pour tout temps d'arrêt φ , tout $n \geq 1$, et toute $f \in \text{Lip}^\infty(A, \mu)$,

$$\|\mathcal{L}_\varphi^n(f)\|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)} \leq C \left[\Lambda^{-n} \|f\|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)} + \|f\|_{\mathbb{L}^1(A, \mu)} \right].$$

En particulier, $\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\varphi \curvearrowright \text{Lip}^\infty(A, \mu)) \leq \Lambda^{-1}$.

Si de plus T_φ préserve μ , alors l'opérateur \mathcal{L}_φ est quasi-compact. En fait, $(A, \alpha_\varphi, d, \mu, T_\varphi)$ est alors Gibbs-Markov ; cependant, la Proposition 3.23 a l'avantage de ne faire intervenir que l'espace $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$ associé à la transformation initiale (A, α, d, μ, T) , et non l'espace beaucoup plus gros de fonctions localement lipschitziennes pour la distance d et la partition α_φ .

D'autre part, comme annoncé, on peut généraliser le Corollaire 3.20 :

Proposition 3.24. [226, Corollaire A.7]

Soit (A, α, d, μ, T) une transformation Gibbs-Markov. Il existe une constante C telle que, pour tout temps d'arrêt φ , tout $\bar{a} \in \alpha_\varphi$ et toute $f \in \text{Lip}^\infty(A, \mu)$,

$$\|\mathcal{L}_\varphi(\mathbf{1}_{\bar{a}} f)\|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)} \leq C\mu(\bar{a}) \|f\|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)}. \quad (3.13)$$

On peut même supposer que φ est un temps d'arrêt seulement sur \bar{a} , et prend par exemple la valeur $+\infty$ ailleurs ; cela s'avèrera utile pour démontrer la Proposition 6.2.

3.4.4 Espaces de distributions anisotropes : Motivation

Jusqu'à présent, nous n'avons appliqué la méthode spectrale qu'à des systèmes dynamiques dilatants, tels que des transformations dilatantes de l'intervalle ou des transformations Gibbs-Markov. Dans les quelques exemples que nous avons mentionnés de systèmes non dilatants (transformations unimodales, flots géodésiques, billards), nous évoquons la possibilité de se ramener à l'aide d'un codage à des transformations dilatantes. Une autre stratégie consiste à trouver de bons espaces de Banach adaptés à des transformations hyperboliques ayant à la fois des directions stables et des directions instables, et ce sans avoir à encoder la dynamique. Pour cela, des espaces de distributions anisotropes se sont révélés extrêmement puissants.

Au vu de l'importance du sujet et de sa technicité, il en existe de nombreux textes introductifs ou de revue. Nous conseillons notamment les introductions de M. Demers [73], C. Liverani [163] et M. Jézéquel [128], ainsi que l'article de revue de V. Baladi [12].

Soit T une transformation contractante. Si nous faisons agir son opérateur de transfert sur l'espace \mathcal{C}^1 , nous rencontrons alors le même problème qu'avec l'opérateur de Koopman de transformations dilatantes, présenté en Sous-section 3.1. Par exemple, si l'on considère la transformation

$$T : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [-1, 1] \\ x & \mapsto x/2 \end{cases},$$

alors l'opérateur de transfert par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$\mathcal{L} : \begin{cases} \mathbb{L}^1([-1, 1], \text{Leb}) & \rightarrow \mathbb{L}^1([-1, 1], \text{Leb}) \\ f & \mapsto [x \mapsto 2f(2x)\mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}(x)] \end{cases}.$$

En particulier, cet opérateur double la semi-norme \mathcal{C}^1 de f , et $\rho(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{C})) = 2$. D'autre part, l'action de l'opérateur de Koopman de T sur les fonctions \mathcal{C}^1 est beaucoup plus sympathique, étant donné que

$$|f \circ T^n|_{\mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{C})} \leq 2^{-n} |f|_{\mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{C})},$$

et donc, de même que dans l’Exemple 3.10, l’action de T sur $\mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{C})$ est quasi-compakte.

Pour résumer :

- Si T est dilatante, l’action de l’opérateur de Koopman T sur \mathcal{C}^1 (ou un espace similaire) n’a pas de bonnes propriétés, mais l’action de l’opérateur de transfert \mathcal{L} sur \mathcal{C}^1 a des chances d’être quasi-compakte.
- Si T est contractante, l’action de l’opérateur de Koopman T sur \mathcal{C}^1 a des chances d’être quasi-compakte, mais l’action de \mathcal{L} sur \mathcal{C}^1 n’a pas de bonnes propriétés.

Changeons de point de vue. L’opérateur de transfert \mathcal{L} est le dual de l’opérateur de Koopman T ; le spectre de l’action de \mathcal{L} sur \mathcal{C}^1 est donc le même que le spectre de l’action de T sur $(\mathcal{C}^1)^*$, définie comme l’extension de l’action de T sur \mathcal{C}^0 à $(\mathcal{C}^1)^*$ par densité. Autrement dit, on peut récupérer la quasi-compacité quitte à travailler avec des *distributions* plutôt qu’avec des *fonctions*. Par conséquent :

- Si T est dilatante, l’action de l’opérateur de Koopman T sur $(\mathcal{C}^1)^*$ (ou un espace similaire) et celle de l’opérateur de transfert \mathcal{L} sur \mathcal{C}^1 ont des chances d’être quasi-compactes.
- Si T est contractante, l’action de l’opérateur de Koopman T sur \mathcal{C}^1 (ou un espace similaire) et celle de l’opérateur de transfert \mathcal{L} sur $(\mathcal{C}^1)^*$ ont des chances d’être quasi-compactes.

La difficulté consiste alors à réunir les deux points de vue quand une transformation a simultanément des directions dilatantes et des directions contractantes. Cela peut se faire à l’aide d’*espaces de distributions anisotropes*, dont les objets sont des distributions lisses dans les directions instables et duales de lisses dans les directions stables; l’action de l’opérateur de transfert a alors de bonnes chances d’agir d’être quasi-compakte.

3.4.5 Espaces de distributions anisotropes : Exemples

On peut définir à peu de frais et très explicitement des espaces de distributions anisotropes sur le tore grâce aux séries de Fourier.

Définition 3.25 (Espaces de Sobolev).

Soient $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$. L’espace de Sobolev sur \mathbb{T}^n de paramètre t est

$$H^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (1 + \|\xi\|^2)^t |\widehat{f}(\xi)|^2 < +\infty \right\},$$

muni de la norme $\|f\|_{H^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})}^2 := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (1 + \|\xi\|^2)^t |\widehat{f}(\xi)|^2$.

Soit $f \in H^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$. Plus le paramètre t est élevé, plus les coefficients de Fourier de f décroissent vite, donc plus f est régulière. Ainsi :

- Si $t \geq 0$, alors $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ et peut donc être représentée par une fonction.
- D’après le théorème de plongement de Sobolev, f a une version $\mathcal{C}^{r+\alpha}$ dès que $r + \alpha \leq t - \frac{n}{2}$.
- $H^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})^* = H^{-t}(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$, donc les paramètres t négatifs sont des espaces de distributions duales de fonctions régulières.

On peut définir des espaces de Sobolev anisotropes sur \mathbb{T}^n en replaçant le poids $\xi \mapsto (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{t}{2}}$ par une fonction qui croît dans certaines directions et décroît dans d’autres. Nous en donnons maintenant l’exemple dans le cadre des automorphismes hyperboliques du tore.

Soit $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ un automorphisme du tore \mathbb{T}^n n’ayant aucune valeur propre de module 1. Alors A est une transformation Anosov du tore. En effet, posons

$$E^s := \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\ |\lambda| < 1}} E_\lambda,$$

où E_λ est l'espace caractéristique de la valeur propre λ , en adaptant la construction si certaines valeurs propres sont complexes²². Définissons de même E^u à l'aide des valeurs propres de module strictement plus grand que 1. Alors les trois conditions de la Définition 2.14 sont bien satisfaites.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$. La transformation A préserve la mesure de Lebesgue, donc l'opérateur de transfert par rapport à celle-ci n'est autre que $\mathcal{L}(f) = f \circ A^{-1}$. Dans le domaine fréquentiel, pour tout $\xi \in \mathbb{Z}^n$,

$$\widehat{\mathcal{L}(f)}(\xi) = \widehat{f \circ A^{-1}}(\xi) = \widehat{f}(A^*\xi).$$

La matrice A^* ayant le même spectre que A , on dispose de sous-espaces stables et instables $(E^u)^*$ et $(E^s)^*$ dans l'espace cotangent $(\mathbb{R}^n)^*$ de \mathbb{T}^n . Grâce aux propriétés de contraction de A^* (en temps positif pour $(E^s)^*$, en temps négatif pour $(E^u)^*$), la dynamique de A^* sur l'espace projectif est une dynamique Nord-Sud généralisée : si $[\xi] \in \mathbb{P}((\mathbb{R}^n)^* \setminus (E^s)^*)$, alors l'ensemble ω -limite de la suite $((A^n)^*[\xi]))_{n \geq 0}$ est contenu dans $\mathbb{P}((E^u)^*)$; et de même en temps négatif en inversant $(E^u)^*$ et $(E^s)^*$. On peut trouver des *cônes invariants*, c'est-à-dire :

- Un voisinage ouvert $(C^u)^*$ de $\mathbb{P}((E^u)^*) \subset \mathbb{P}((\mathbb{R}^n)^*)$ tel que²³ $A^*(C^u)^* \subset (C^u)^*$;
- Un voisinage ouvert $(C^s)^*$ de $\mathbb{P}((E^s)^*)$ tel que $\overline{(A^{-1})^*(C^s)^*} \subset (C^s)^*$;
- Ces voisinages pouvant être choisis tels que $\overline{(C^u)^*}$ et $\overline{(C^s)^*}$ soient disjoints.

On peut alors trouver une fonction de poids adaptée à l'action de A^* sur $\mathbb{P}((\mathbb{R}^n)^*)$ et à ces cônes. Pour simplifier²⁴, on supposera que l'on a trouvé une fonction $\alpha : \mathbb{P}((\mathbb{R}^n)^*) \rightarrow [-1, 1]$ telle que :

- $\alpha \equiv 1$ sur $(C^u)^*$;
- $\alpha \equiv -1$ sur $(C^s)^*$;
- $\xi \mapsto (1 + \|\xi\|^2)^{\alpha([\xi])}$ soit une fonction de Lyapunov pour l'action de A^* sur $(\mathbb{R}^n)^*$, c'est-à-dire que $(1 + \|A^*\xi\|^2)^{\alpha(A^*[\xi])} \geq (1 + \|\xi\|^2)^{\alpha([\xi])}$.

Pour tout $t \geq 0$, on définit alors un espace de Sobolev anisotrope

$$H_\alpha^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (1 + \|\xi\|^2)^{t\alpha([\xi])} |\widehat{f}(\xi)|^2 < +\infty \right\},$$

la norme associée étant donc égale à la norme H^t pour les fonctions dont les fréquences sont supportées dans $(C^u)^*$, et égale à la norme H^{-t} pour les fonctions dont les fréquences sont supportées dans $(C^s)^*$. Les distributions anisotropes appartenant à ces espaces sont donc bien en ce sens régulières dans la direction instable et duales de régulières dans la direction stable. Un bref calcul montre que, pour $f \in H_\alpha^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ telle que $\widehat{f}(0) = 0$ (c'est-à-dire de moyenne nulle),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^n(f)\|_{H_\alpha^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})}^2 &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (1 + \|\xi\|^2)^{t\alpha([\xi])} \left| \widehat{f}((A^*)^n \xi) \right|^2 \\ &\leq \|f\|_{H_\alpha^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})}^2 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (1 + \|\xi\|^2)^{t\alpha([\xi])} (1 + \|(A^*)^n \xi\|^2)^{t\alpha([(A^*)^n \xi])}. \end{aligned}$$

Posons $F_n(\xi) := (1 + \|\xi\|^2)^{t\alpha([\xi])} (1 + \|(A^*)^n \xi\|^2)^{t\alpha([(A^*)^n \xi])}$. Si $\xi \neq 0$, alors $\|\xi\| \geq 1$, et donc

$$4^{-t} \|\xi\|^{2t\alpha([\xi])} \|(A^*)^n \xi\|^{2t\alpha([(A^*)^n \xi])} \leq F_n(\xi) \leq 4^t \|\xi\|^{2t\alpha([\xi])} \|(A^*)^n \xi\|^{2t\alpha([(A^*)^n \xi])}.$$

Quitte à perdre une constante, on pourra donc remplacer $F_n(\xi)$ par $\|\xi\|^{2t\alpha([\xi])} \|(A^*)^n \xi\|^{2t\alpha([(A^*)^n \xi])}$ si $\xi \neq 0$.

Pour $0 \leq k < n$, quand on applique $(A^*)^k$ à une fréquence $\xi \neq 0$:

22. On remplacera par exemple E_λ par l'intersection avec \mathbb{R}^n de $E_\lambda \oplus E_{\bar{\lambda}} \subset \mathbb{C}^n$.

23. Par exemple, en prenant un petit voisinage V de $\mathbb{P}((E^u)^*)$, et en choisissant $(C^u)^* := \bigcup_{n \geq 0} (A^n)^*(V)$.

24. Voir à propos de ces conditions un théorème de K.R. Meyer [175], ainsi que la condition de décroissance [93, Definition 5.4].

- Tant que $(A^*)^k \xi$ reste dans le cône $(C^s)^*$, l'action de A^* est contractante d'un facteur au moins (en moyenne, sur des temps suffisamment longs) Λ_s et $\alpha = -1$. Par conséquent, $F_k(\xi)$ est divisé par un facteur environ Λ_s^{2t} à chaque fois que l'on incrémente k .
- Tant que $(A^*)^k \xi$ reste dans le cône $(C^u)^*$, l'action de A^* est dilatante d'un facteur au moins (en moyenne, sur des temps suffisamment longs) Λ_u et $\alpha = 1$. Par conséquent, $F_k(\xi)$ est divisé par un facteur environ Λ_u^{2t} à chaque fois que l'on incrémente k .
- La trajectoire $((A^*)^k \xi)_{k \geq 0}$ passe un temps borné hors de $(C^s)^* \cup (C^u)^*$, car la dynamique sur l'espace projectif est de type Nord-Sud. Comme la fonction $\xi \mapsto (1 + \|\xi\|^2)^{t\alpha([\xi])}$ est supposée de Lyapunov, la quantité $F_k(\xi)$ n'augmente pas pendant ce temps.

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C telle que

$$\|\mathcal{L}^n(f)\|_{H_\alpha^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})} \leq C(\min\{\Lambda_u^{-1}, \Lambda_s^{-1}\}^t + \varepsilon)^n \|f\|_{H_\alpha^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})}.$$

Finalement $\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L} \curvearrowright H_\alpha^t(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})) \leq \min\{\Lambda_u^{-1}, \Lambda_s^{-1}\}^t$, et \mathcal{L} a pour seule résonance de Ruelle la valeur propre 1 associée aux fonctions constantes.

Remarquons que, comme dans le cas de l'application dyadique, l'opérateur de transfert n'a pas de résonance de Ruelle non triviale : on obtient non seulement une estimation de son rayon spectral essentiel, mais aussi sa contractivité sur l'espace des distributions de moyenne nulle. Cette spécificité n'est pas générique parmi les difféomorphismes Anosov, au moins en dimension deux [5], et vient du fait que A est linéaire.

L'exemple ci-dessus a pour vocation de présenter dans un cadre idéalisé une définition simple d'espace de Banach anisotrope ainsi que le mécanisme assurant la contractivité de l'opérateur de transfert ou, plus généralement, sa quasi-compacité. V. Baladi distingue trois types d'espaces de distributions anisotropes [12] :

- *Espaces de Triebel*, utilisés par exemple par V. Baladi et S. Gouëzel [15].
- *Espaces géométriques*, utilisés par exemple pour la transformation billard [74] ou le flot billard [14]. Dans ce cadre, les définitions font typiquement intervenir des espaces de fonctions höldériennes ou \mathcal{C}^k ainsi que des objets géométriques tels que des courbes stables ou instables.
- *Espaces microlocaux*, utilisés par exemple par F. Faure et M. Tsujii [86, 91–93]. La présentation ci-dessus rentre dans ce cadre.

3.5 Perturbations

La quasi-compacité d'un opérateur de transfert autorise une méthode très puissante, qui consiste à analyser le comportement des résonances de Ruelle sous des perturbations bien choisies de cet opérateur. Cette méthode permet notamment d'émuler en dynamique hyperbolique des arguments probabilistes reposant sur le comportement en 0 de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Nous en verrons quelques applications par la suite : théorème central limite (Sous-sous-section 3.6.1), théorème central limite local (Sous-section 6.3), et calcul d'opérateurs potentiel (Sous-section 11.5).

3.5.1 Régularité des résonances de Ruelle

Soit M une matrice et λ une valeur propre simple de M . Alors la valeur propre λ dépend continûment de M . Plus précisément :

- Il existe $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tels que, pour toute matrice $N \in B(M, \varepsilon)$, il existe un unique $\lambda_N \in B(\lambda, r)$ qui soit valeur propre de N .
- La fonction $\lambda \mapsto \lambda_N$ ainsi définie sur $B(M, \varepsilon)$ est continue.

Cela se démontre par exemple grâce à la continuité des racines simples d'un polynôme en fonction de ses coefficients, associée à la dépendance continue du polynôme caractéristique en la matrice. Il y a cependant d'autres arguments qui se généralisent à la dimension infinie, et permettent de démontrer de plus la continuité des projecteurs spectraux.

Soit λ une valeur propre simple d'un opérateur $\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}$ isolée dans le spectre de \mathcal{L} . Soit π le projecteur spectral associé. On peut alors écrire π à l'aide d'une intégrale de chemin de la résolvante de \mathcal{L} :

$$\pi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mathcal{L} - \zeta I)^{-1} d\zeta,$$

où γ est un chemin autour de λ dans le complémentaire de $\text{Sp}(\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B})$ (voir [136, Chapter VIII.1.4]). Une telle intégrale dépend de façon lisse de \mathcal{L} , et donc de façon régulière du paramètre pour des familles paramétrées d'opérateurs.

Soit donc $(\mathcal{L}_\xi)_{\xi \in I}$ une famille \mathcal{C}^k d'opérateurs agissant sur \mathcal{B} , telle que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$. Alors il $\varepsilon, \delta > 0$ tels que, si $|\xi| < \delta$, alors $\text{Sp}(\mathcal{L}_\xi \curvearrowright \mathcal{B}) \cap B(\lambda, \varepsilon) = \{\lambda_\xi\}$ soit un singleton. De plus, les valeurs propres $\xi \mapsto \lambda_\xi$ et les projecteurs spectraux $\xi \mapsto \pi_\xi$ dépendent de façon \mathcal{C}^k du paramètre ξ .

Enfin, comme les projecteurs spectraux π_ξ sont de rang 1, on peut les écrire sous la forme $\pi_\xi = h_\xi \otimes \mu_\xi$, où $\mu_\xi(h_\xi) = 1$. Il reste un degré de liberté, que l'on fixe dans ce texte par la convention $\mu(h_\xi) = 1$. Sous cette convention, $\xi \mapsto \mu_\xi$ et $\xi \mapsto h_\xi$ sont elles aussi \mathcal{C}^k si ξ est suffisamment petit.

Remarque 3.26 (Réponse linéaire).

Les résultats de perturbations esquissés ci-dessus supposent que l'on travaille avec la topologie forte pour les opérateurs sur \mathcal{B} . C'est suffisant pour les besoins de ce texte, mais dans certains contextes dynamiques, on ne peut garantir la continuité des familles d'opérateurs de transfert que sous une norme plus faible. C'est typiquement le cas dans la question de la réponse linéaire, c'est-à-dire la dépendance de la mesure invariante absolument continue μ en la transformation T .

Dans ce contexte, un théorème de C. Liverani et G. Keller [141] garantit la continuité du spectre et des projecteurs spectraux sous des conditions plus faibles. Nous renvoyons au texte de revue de V. Baladi pour plus de détails sur la réponse linéaire [11].

Signalons pour terminer une autre approche des perturbations d'opérateurs *via* le théorème des fonctions implicites dans des espaces de Banach, développée par P. Giulietti, B. Kloeckner, A. O. Lopes et D. Marcon Farias [106].

3.5.2 Opérateurs tordus et perturbations

Illustrons ces perturbations dans le cadre des transformations Gibbs-Markov, tout en sachant que la méthode exposée ici fonctionne dès que l'on a une bonne action de l'opérateur de transfert, et est donc beaucoup plus générale. Les objets centraux seront les *opérateurs de transfert tordus*.

Définition 3.27 (Opérateur de transfert tordu).

Soit (A, α, d, μ, T) une transformation Gibbs-Markov ergodique et $F \in \text{Lip}^1(A, \mu)$ à valeurs réelles. La famille à 1 paramètre réel d'opérateurs définis sur $\mathbb{L}^1(A, \mu)$ par

$$\mathcal{L}_\xi(h) := \mathcal{L}(e^{i\xi F} h)$$

sont²⁵ des opérateurs de transfert tordus.

²⁵ Un cas particulier, qui sera le plus important dans ce texte.

Plaçons-nous dans le cadre de la Définition 3.27. Comme $F \in \text{Lip}^1(A, \mu)$, on peut vérifier que la famille $\xi \mapsto \mathcal{L}_\xi$ est \mathcal{C}^1 . En particulier, il existe $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tels que, pour tout $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, l'opérateur \mathcal{L}_ξ a une seule valeur propre $\lambda_\xi \in B(1, r)$; et celle-ci est de multiplicité 1.

Nous allons montrer ici comment calculer effectivement un développement limité de cette fonction λ . Notons h_ξ la fonction propre de \mathcal{L}_ξ associée à la valeur propre simple λ_ξ , telle que $\int_A h_\xi \, d\mu = 1$.

On dérive en 0 l'identité $\mathcal{L}_\xi(h_\xi) = \lambda_\xi h_\xi$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_\xi(h_\xi) + \mathcal{L}_\xi(\partial_\xi h_\xi) &= \lambda'_\xi h_\xi + \lambda_\xi(\partial_\xi h_\xi) \\ i\mathcal{L}(F) + \mathcal{L}((\partial_\xi h_\xi)|_{\xi=0}) &= \lambda'_0 \mathbf{1} + (\partial_\xi h_\xi)|_{\xi=0} \end{aligned} \quad (3.14)$$

En intégrant contre μ , on obtient

$$i \int_A F \, d\mu + \int_A (\partial_\xi h_\xi)|_{\xi=0} \, d\mu = \lambda'_0 + \int_A (\partial_\xi h_\xi)|_{\xi=0} \, d\mu,$$

d'où $\lambda'_0 = i \int_A F \, d\mu$.

Supposons de plus que $F \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$ et que $\int_A F \, d\mu = 0$. Alors $\xi \mapsto \lambda_\xi$ est de classe \mathcal{C}^2 , et sa dérivée en 0 est nulle. Cherchons le terme suivant dans son développement limité.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}''_\xi(h_\xi) + 2\mathcal{L}'_\xi(\partial_\xi h_\xi) + \mathcal{L}_\xi(\partial_{\xi\xi}^2 h_\xi) &= \lambda''_\xi h_\xi + 2\lambda'_\xi(\partial_\xi h_\xi) + \lambda_\xi(\partial_{\xi\xi}^2 h_\xi) \\ -\mathcal{L}(F^2) + 2i\mathcal{L}(F(\partial_\xi h_\xi)|_{\xi=0}) + \mathcal{L}((\partial_{\xi\xi}^2 h_\xi)|_{\xi=0}) &= \lambda''_0 \mathbf{1} + (\partial_{\xi\xi}^2 h_\xi)|_{\xi=0} \end{aligned}$$

Une fois de plus, en intégrant contre μ , on obtient

$$-\int_A F^2 \, d\mu + 2i \int_A F(\partial_\xi h_\xi)|_{\xi=0} \, d\mu = \lambda''_0.$$

De plus, $(\partial_\xi h_\xi)|_{\xi=0} = i(\text{Id} - \mathcal{L})^{-1}\mathcal{L}(F)$ se calcule²⁶ grâce à l'Équation (3.14). On obtient au final

$$\lambda''_0 = -\int_A F^2 \, d\mu - 2 \int_A F \cdot (\text{Id} - \mathcal{L})^{-1}\mathcal{L}(F) \, d\mu = - \left[\int_A F^2 \, d\mu + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A F \cdot F \circ T^n \, d\mu \right], \quad (3.15)$$

où la somme du membre de droite converge absolument si (A, μ, T) est mélangeante²⁷, et au sens de Cesàro si (A, μ, T) est seulement ergodique²⁸.

La formule

$$\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F) := \int_A F^2 \, d\mu + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A F \cdot F \circ T^n \, d\mu \quad (3.16)$$

s'appelle *formule de Green–Kubo*. Elle a joué un rôle central dans les recherches que nous présentons dans ce mémoire. Nous la retrouverons par la suite, en particulier en Sous-section 9.2. Pour l'instant, nous nous restreignons à deux remarques élémentaires.

D'une part, pour tout ξ , l'opérateur \mathcal{L}_ξ est une contraction faible sur $\mathbb{L}^1(A, \mu)$. Par conséquent, toute valeur propre de $\mathcal{L} \curvearrowright \text{Lip}^1(A, \mu)$ est de module au plus 1. On en déduit que $\lambda''_0 \leq 0$, et donc $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F) \geq 0$.

D'autre part, le cas dégénéré $\lambda''_0 = 0$ se caractérise aisément. Par [112, Théorème 4.1.4], pour tout $F \in \text{Lip}^1(A, \mu) \cap \mathbb{L}^2(A, \mu)$, il y a équivalence entre :

26. Remarquons au passage que, comme (A, μ, T) est ergodique, la restriction de $(\text{Id} - \mathcal{L})$ aux fonctions $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$ d'intégrale nulle est inversible, et $\mathcal{L}(F)$ appartient bien à ce sous-espace!

27. Grâce à la décroissance exponentielle des corrélations évoquée en Corollaire 3.9.

28. Convergence obtenue en combinant la décroissance exponentielle des corrélations avec la description du spectre périphérique de la Sous-sous-section 3.3.2.

- $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F) = 0$.
- La fonction F est un *cobord* : il existe h mesurable telle que $F = h \circ T - h$.
- Il existe $h \in \text{Lip}^\infty(A, \mu)$ telle que $F = h \circ T - h$.

Remarque 3.28 (Familles à plusieurs paramètres).

Dans cette parties, nous sommes restés dans le cadre le plus simple d'une perturbation à un seul paramètre. De nombreux travaux utilisent des familles à plusieurs paramètres d'opérateurs de transfert. Ce type de famille à plusieurs paramètres apparaît naturellement lorsque l'on souhaite contrôler plusieurs quantités dynamiques en interaction, par exemple une donnée spatiale et une donnée temporelle, ou bien une donnée spatiale et la croissance des sommes de Birkhoff d'une observable.

Sans prétention à l'exhaustivité, mentionnons les travaux de A. Katsuda, T. Sunada, M. Pollicott et R. Sharp sur le comptage d'orbites périodiques sur des variétés de courbures négatives \mathbb{Z}^d -périodiques [138, 194], dans la lignée duquel se place un article plus récent de l'auteur sur le temps local de semi-flots \mathbb{Z}^d -périodiques [223]. Enfin, V. Petkov et L. Stoyanov ont utilisé ces techniques pour démontrer des grandes déviations pour des flots avec cibles décroissantes [189].

Remarque 3.29 (Convergence de la formule de Green–Kubo).

La formule de Green–Kubo (3.16) apparaît dans le théorème central limite dans un cadre beaucoup plus général que celui des transformations Gibbs–Markov. On peut se demander, plus généralement, quand cette formule converge.

Cette comme converge dès que les auto-corrélations de f sont sommables. C'est le cas, par exemple, si le système dynamique (A, μ, T) est Anosov mélangeant, μ une mesure d'équilibre pour un potentiel höldérien, et f est höldérienne d'intégrale nulle, ce qui garantit par que les intégrales $(\int_A f \cdot f \circ T^n d\mu)_{n \geq 0}$ décroissent exponentiellement en n . Plus généralement, une condition de trou spectral sur l'opérateur de transfert et de mélange du système suffit.

La somme converge aussi dans des contextes non-uniformément hyperboliques, tels que des observables höldériennes d'intégrale nulle de transformations de Pomeau–Manneville de paramètre $\alpha \in (0, 1/2)$ par [235] ainsi que d'automorphismes ergodiques du tore [62, 152].

Si le système dynamique (A, μ, T) est non mélangeant, une convergence au sens de Cesàro peut donner un sens à l'Équation (3.16). Ainsi, quand l'on dispose d'une action quasi-compacte de l'opérateur de transfert, la convergence au sens de Cesàro permet d'éliminer les oscillations périodiques des intégrales $(\int_A f \cdot f \circ T^n d\mu)_{n \geq 0}$ causées par les résonances périphériques.

3.6 Application : Le théorème central limite

Pour finir cette Section, nous présentons la méthode de Nagaev–Guivarc'h [118, 176, 177], qui consiste à utiliser ces perturbations d'opérateurs afin de démontrer un théorème central limite. Cette démonstration est un cas simple d'une stratégie générale, qui sera aussi employée pour estimer le temps local de \mathbb{Z}^d -extension en Sous-partie 6.2, et représente une partie significative de [226] (voir la Sous-section 11.5). Pour cette raison, nous détaillons cet argument.

3.6.1 Opérateurs perturbés et théorème central limite

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées, de carré intégrable et d'espérance nulle. Notons Φ leur fonction caractéristique et $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} X_k$. Rappelons que le théorème central limite se démontre aisément à l'aide du critère de Lévy. En effet,

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(e^{i\xi \frac{1}{\sqrt{n}} S_n} \right) &= \mathbb{E} \left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{\xi}{\sqrt{n}} X_k} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left(e^{i \frac{\xi}{\sqrt{n}} X_k} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{i \frac{\xi}{\sqrt{n}} X_0} \right)^n = \Phi \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^n.\end{aligned}$$

Or $\Phi(\eta) = 1 - \frac{\mathbb{E}(X_0^2)\eta^2}{2} + o(\eta^2)$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(e^{i\xi \frac{1}{\sqrt{n}} S_n} \right) = e^{-\frac{\mathbb{E}(X_0^2)\xi^2}{2}}.$$

D'après le critère de Lévy, la suite de variables aléatoires $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \right)_{n \geq 1}$ converge donc en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\mathbb{E}(X_0^2)$.

Les perturbations d'opérateurs permettent de démontrer un théorème central limite en émultant le raisonnement ci-dessus. Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant une mesure de probabilité. Soit $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On cherche à approcher la loi de $S_n F$ quand n tend vers l'infini.

Comme en Sous-sous-section 3.5.2, notons $\mathcal{L}_\xi = \mathcal{L} \left(e^{i\xi F} \cdot \right)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \geq 0$ et $h \in \mathbb{L}^1(A, \mu)$,

$$\mathcal{L}_\xi^n(h) := \mathcal{L}^n \left(e^{i\xi S_n F} h \right),$$

et en particulier

$$\mathbb{E} \left(e^{i\xi \frac{1}{\sqrt{n}} S_n F} \right) = \int_A \mathcal{L}^n \left(e^{i \frac{\xi}{\sqrt{n}} S_n F} \mathbf{1} \right) d\mu = \int_A \mathcal{L}_{\frac{\xi}{\sqrt{n}}}^n(\mathbf{1}) d\mu. \quad (3.17)$$

Supposons maintenant que (A, μ, T) est une transformation Gibbs-Markov mélangeante et que $F \in \text{Lip}^1(A, \mu) \cap \mathbb{L}^2(A, \mu)$ est d'intégrale nulle. On dispose alors pour tout η suffisamment petit d'une décomposition propre

$$\mathcal{L}_\eta = \lambda_\eta h_\eta \otimes \pi_\eta + R_\eta.$$

De plus, comme (A, μ, T) est mélangeante, $\rho(R_0 \curvearrowright \text{Lip}^\infty(A, \mu)) < 1$. On peut alors trouver $C > 0$ et $\rho \in [0, 1)$ tels que $\|R_\eta^n\|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu) \rightarrow \text{Lip}^\infty(A, \mu)} \leq C\rho^n$ pour tout η suffisamment petit. De plus, $\pi_\eta(h_\eta) = 1$, et on peut supposer que $\mu(h_\eta) = 1$ pour tout η suffisamment petit. De là,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(e^{i\xi \frac{1}{\sqrt{n}} S_n F} \right) &= \lambda_{\frac{\xi}{\sqrt{n}}}^n \mu \left(h_{\frac{\xi}{\sqrt{n}}} \right) \pi_{\frac{\xi}{\sqrt{n}}}(\mathbf{1}) + \int_A R_{\frac{\xi}{\sqrt{n}}}^n(\mathbf{1}) d\mu \\ &= \lambda_{\frac{\xi}{\sqrt{n}}}^n (1 + o(1)) + O(\rho^n).\end{aligned}$$

Or $\lambda_\eta = 1 - \frac{\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F)\eta^2}{2} + o(\eta^2)$ d'après la Sous-sous-section 3.5.2. Par le même raisonnement que pour le théorème central limite classique, la suite de variables aléatoires $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n F \right)_{n \geq 1}$ converge vers une variable aléatoire gaussienne de variance $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F)$.

Finissons par deux raffinements. D'une part, il suffit que (A, μ, T) soit ergodique. Comme vu en Sous-sous-section 3.3.2, l'opérateur \mathcal{L} peut alors avoir des valeurs propres périphériques $(e^{i2\pi \frac{k}{N}})_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$. Soient $h_k \otimes \pi_k$ les projecteurs propres associés, de telle sorte que, pour tout η suffisamment petit,

$$\mathcal{L}_\eta = \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \lambda_{k, \eta} h_{k, \eta} \otimes \pi_{k, \eta} + R_\eta.$$

Alors $\mu(h_k) = 0$ pour tout $k \neq 0$. Par passage à la limite, les contributions des valeurs propres $\lambda_{k,\frac{1}{\sqrt{n}}}$ avec $k \neq 0$ à l'Équation (3.17) tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On se retrouve avec la même limite que dans le cas mélangeant.

D'autre part, si x est choisi non pas selon μ , mais selon une mesure de probabilité $\nu = h d\mu$ avec $\nu \in \text{Lip}^\infty(A, \mu)$, l'Équation (3.17) devient

$$\mathbb{E} \left(e^{i\xi \frac{1}{\sqrt{n}} S_n F} \right) = \int_A \mathcal{L}_{\frac{\xi}{\sqrt{n}}}^n(h) d\mu.$$

La suite du calcul est identique, donc on obtient le même théorème central limite. Par densité de $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$ dans $\mathbb{L}^1(A, \mu)$, on a finalement démontré

Théorème 3.30 (Théorème central limite).

Soit (A, μ, T) une transformation Gibbs-Markov ergodique. Soit $\nu \ll \mu$ une mesure de probabilité. Soit $F \in \text{Lip}^1(A, \mu)$ telle que $\int_A F^2 d\mu < +\infty$ et $\int_A F d\mu = 0$. Alors la suite de variables aléatoires $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n F \right)_{n \geq 1}$ dans (A, ν) converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F)$.

Par conséquent, dans ce contexte, ou bien les sommes de Birkhoff sont typiquement de l'ordre de \sqrt{n} , ou bien F est un cobord et elles sont bornées presque sûrement ; il n'y a pas de comportement intermédiaire.

Pour conclure, en suivant la technique de Nagaev–Guivarc'h, on peut plus généralement transposer à des systèmes dynamiques des calculs de théorie des probabilités utilisant des fonctions caractéristiques de variables aléatoires, et en particulier leur développement limité en des points précis. Elle nécessite deux ingrédients :

- Une traduction exacte en termes d'opérateurs de transfert d'une équation faisant intervenir une fonction caractéristique. Il s'agit ici de l'Équation (3.17).
- Un développement limité de la valeur propre principale de l'opérateur de transfert, et un contrôle des termes d'erreurs, permettant d'exploiter cette équation exacte dans un régime limite.

Nous verrons plus tard d'autres applications de cette stratégie : théorème central limite local, et théorie du potentiel. Ce ne sont pas les seules ; citons par exemple des principes de grandes déviations [233].

Remarque 3.31 (Décomposition martingale–cobord).

La méthode présentée dans ce mémoire n'est qu'une stratégie parmi d'autres pour démontrer un théorème central limite pour des observables de systèmes dynamiques. Par exemple, il est aussi parfois possible d'utiliser une décomposition martingale–cobord du processus $(S_n F)_{n \geq 0}$, puis d'utiliser un théorème central limite pour des martingales²⁹. Cette approche a été initiée par M.I. Gordin [109]. La lectrice intéressée pourra consulter les présentations de cette méthode par C. Liverani [160] d'une part et J.-R. Chazottes, C. Cuny, J. Dedecker, X. Fan et S. Lemler [50] d'autre part.

Cette dernière approche a l'avantage de fonctionner dans des situations où l'on ne dispose pas de décroissance exponentielle des corrélations, par exemple quand le système (A, μ, T) n'est pas uniformément hyperbolique, ou quand l'observable F est de trop basse régularité. De plus, elle permet d'employer de nombreux outils fins de théorie des martingales, tels que l'inégalité de Burkholder [44] donnant un contrôle fin des moments des variables aléatoires $(\sup_{k < n} |F \circ T^k|)_{n \geq 0}$.

29. Ou, plus précisément, pour des tableaux de martingales inverses.

3.6.2 Autres lois remarquables

L'analyse précédente portait sur des sommes de Birkhoff de fonctions réelles de carré intégrable. La méthode de Nagaev–Guivarc'h permet de traiter de nombreux autres situations intéressantes. Décrivons-les brièvement.

Dimension supérieure

Soit E un espace euclidien de dimension finie. Soit $F \in \text{Lip}^1(A, \mu) \cap \mathbb{L}^2(A, \mu)$ à valeurs dans E et centrée. Le calcul de la Sous-sous-section 3.6.1 fonctionne tout aussi bien, à de légères adaptations près. Le paramètre ξ appartient maintenant à E^* , et la loi limite est une variable aléatoire gaussienne d'opérateur de covariance

$$\begin{aligned} \text{Cov}(A, \mu, T; F)(u, v) &= \int_A \langle u, F \rangle \cdot \langle v, F \rangle \, d\mu + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A \langle u, F \rangle \cdot \langle v, F \rangle \circ T^n \, d\mu \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A \langle u, F \rangle \circ T^n \cdot \langle v, F \rangle \, d\mu. \end{aligned} \quad (3.18)$$

L'opérateur Cov est dégénéré si et seulement s'il existe un vecteur non nul u tel que $\langle u, F \rangle$ soit un cobord, auquel cas il existe $h \in \text{Lip}^\infty(A, \mu)$ telle que $\langle u, F \rangle = h \circ T - h$. En particulier, les sommes de Birkhoff de F sont presque sûrement bornées dans la direction de u .

Lois stables de Lévy : Cas général

Revenons au cas réel. Cette fois-ci, nous autorisons la fonction F à prendre des valeurs suffisamment grandes pour que ses sommes de Birkhoff varient sur une échelle supérieure à \sqrt{n} . Afin de contrôler son comportement, nous aurons besoin de la notion de variation régulière.

Définition 3.32 (Variations régulière et lente).

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et L une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0, +\infty)$, à valeurs réelles, mesurable et strictement positive. On dit que L est à variation régulière d'ordre α en l'infini si, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \lambda^\alpha.$$

Un telle fonction L , définie cette fois-ci sur un intervalle de la forme $(0, x_0]$, est à variation régulière d'ordre α en 0 si $x \mapsto L(1/x)$ est à variation régulière d'ordre $-\alpha$ en l'infini.

Une fonction à variation régulière d'ordre 0 est dite à variation lente.

L'archétype des fonctions régulières d'ordre α en l'infini est une fonction équivalente à $x \mapsto x^\alpha \ln^\beta(x)$ en l'infini. La référence la plus complète sur le sujet est le livre [28].

Si une variable aléatoire réelle a des queues à variation régulière, alors elle est dans le bassin d'attraction d'une *loi stable de Lévy*, ce qui signifie que l'on dispose d'un analogue du théorème central limite :

Théorème 3.33. [94, Chapter XVII.5, Theorem 2]

Soient $\alpha \in (1, 2)$ et $c_-, c_+ \geq 0$ non tous deux nuls. Soit L une fonction à variation régulière d'ordre α en $+\infty$. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées, centrées, et telles que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 \geq x) &\sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c_+}{L(x)}, \\ \mathbb{P}(X_0 \leq -x) &\sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c_-}{L(x)}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}\vartheta &:= (c_- + c_+) \Gamma(1 - \alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), \\ \zeta &:= \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-},\end{aligned}$$

et soit $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que $L(a_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} n$. Alors la suite de variables aléatoires $\left(\frac{1}{a_n} S_n\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dite de Lévy ou stable de paramètre α , de fonction caractéristique

$$\Phi(\xi) = e^{-\vartheta(1-i\zeta \tan(\pi\alpha/2) \operatorname{sgn}(\xi))|\xi|^\alpha}.$$

Par exemple, si $\mathbb{P}(X_0 \geq x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_0 \leq -x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^\alpha}$ avec $c > 0$, alors $\zeta = 0$ et $\left(\frac{1}{n^\alpha} S_n\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire symétrique de fonction caractéristique

$$\Phi(\xi) = e^{-2c\Gamma(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)|\xi|^\alpha}.$$

Si $c_+ \neq c_-$, la loi limite est asymétrique. Le paramètre ϑ est un paramètre d'échelle, tandis que le paramètre ζ décrit l'asymétrie de la loi limite.

Sous une condition identique de décroissance des queues de F , la méthode de Nagaev–Guivarc'h permet de généraliser le théorème précédent à certaines observables de systèmes dynamiques.

Théorème 3.34. [3, Theorem 6.1]

Soit (A, μ, T) une transformation Gibbs-Markov ergodique. Soit $\nu \ll \mu$ une mesure de probabilité. Soit $F \in \operatorname{Lip}^1(A, \mu)$ centrée. Le Théorème 3.33 reste valide si l'on remplace le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ par le processus $(F \circ T^n)_{n \geq 0}$ défini sur (A, ν) .

Remarque 3.35.

Pour que le Théorème 3.34 ne soit pas vide, il faut que l'on puisse trouver des observables F qui soient à la fois à queues lourdes et localement lipschitziennes (voire localement constantes). C'est impossible si la partition associée au système Gibbs-Markov est finie, et en particulier pour les sous-décalages de type fini. Cependant, il est aisément de construire de tels exemples si l'on s'autorise des partitions infinies.

Lois stables de Lévy : Cas particuliers

Le Théorème 3.33, et par extension le Théorème 3.34, ne s'appliquent qu'à des paramètres $\alpha \in (1, 2)$. Plus α est petit, plus les queues des variables aléatoires sont lourdes. Les bornes de cet intervalle $\alpha = 2$ et $\alpha = 1$ sont à traiter à part.

Si $\alpha = 2$, alors le paramètre ζ est nul, et la loi limite est normale centrée. Dans ce cas, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est définie par une formule un peu plus compliquée. On obtient ainsi un *théorème central limite non standard*, exprimant la convergence en loi des sommes de Birkhoff renormalisées vers une variable aléatoire gaussienne centrée, mais pour des variables aléatoires qui ne sont pas de carré intégrable et avec une renormalisation qui n'est pas exactement en \sqrt{n} .

Par exemple, si $\mathbb{P}(X_0 \geq x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_0 \leq -x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^2}$ avec $c > 0$, alors $\left(\frac{1}{\sqrt{n \ln(n)}} S_n\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée.

Ce cas particulier est très pertinent d'un point de vue dynamique : dans le modèle du gaz de Lorentz en horizon infini (voir la Remarque 4.2), les queues de la fonction de saut sont justement en

c/x^2 . La position d'une particule satisfait donc ce type de théorème central limite non standard [31, 215]. Une analyse similaire s'applique au billard stade [19].

Le cas $\alpha = 1$, qui contient le bassin d'attraction des lois de Cauchy, est plus délicat. Les variables aléatoires considérées ne sont plus nécessairement intégrables, auquel cas on ne peut pas dire qu'elles sont centrées. Les conditions portant sur les queues des variables aléatoires sont plus subtiles. Ce cas particulier est néanmoins lui aussi pertinent d'un point de vue dynamique [2] : dans le modèle du flot géodésique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, muni de sa structure hyperbolique³⁰, les queues de la fonction de saut sont justement en c/x .

³⁰. C'est-à-dire vu comme \mathbb{Z} -revêtement d'une sphère à 3 trous, munie d'une métrique de courbure constante égale à -1 et de volume fini.

Deuxième partie

\mathbb{Z}^d -extensions

Il est temps d'introduire l'objet d'étude central de ce mémoire : les \mathbb{Z}^d -extensions de systèmes dynamiques. Ces structures sont présentées en Section 4 : *Définition des \mathbb{Z}^d -extensions*, en partant de l'exemple historique du gaz de Lorentz.

Nous poursuivons avec la Section 5 : *Fonctions propres de l'opérateur de transfert*. Cette section a deux objectifs. D'une part, nous interpréterons le spectre périphérique d'opérateurs de transfert tor-dus, ce qui sera utile par la suite, par exemple en Sous-section 11.5. D'autre part, nous en profiterons pour présenter les résultats de [224].

Enfin, la Section 6 : *Théorème central limite local* contient une autre application des méthodes de perturbation d'opérateur : la limite en loi du temps local par les méthodes des moments. Nous discuterons enfin la première partie de [184], où cette méthode des moments est utilisée pour aborder un problème plus délicat : la limite en loi des sommes de Birkhoff d'observables d'intégrale nulle.

4 Définition des \mathbb{Z}^d -extensions

Le modèle au cœur de ce mémoire est celui des \mathbb{Z}^d -extensions de transformations Gibbs-Markov, qui sont un cas particulier de \mathbb{Z}^d -extension d'un système dynamique. Nous introduisons cette notion en partant d'un modèle particulier, celui du *gaz de Lorentz*, avant d'en discuter les propriétés spectrales et la conservativité.

4.1 Le gaz de Lorentz

Nous avons introduit le modèle du billard de Sinai en Sous-sous-section 2.4.5. Il s'agit d'un billard sur le tore avec des obstacles strictement convexes. Le gaz de Lorentz en est la version périodique sur \mathbb{R}^2 . Une trajectoire dans un gaz de Lorentz est donc de la forme suivante.

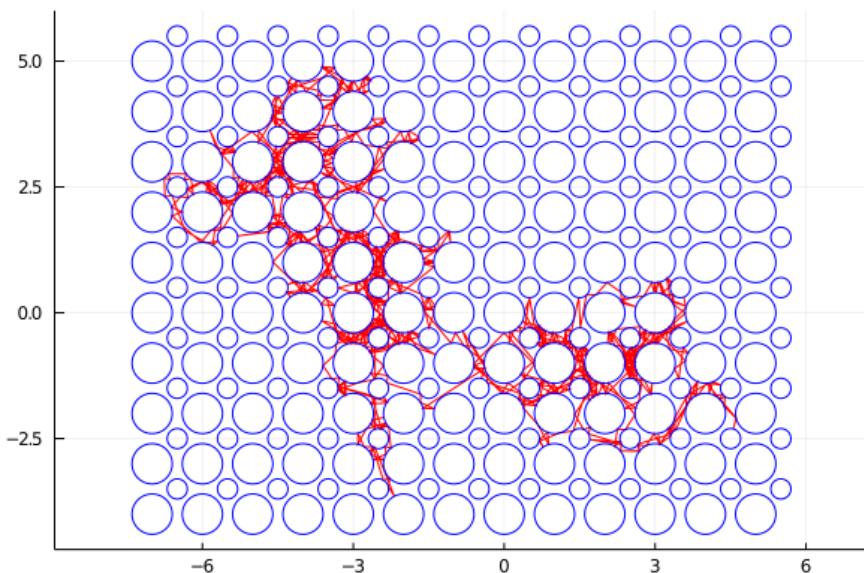


FIGURE 15 – Trajectoire dans un gaz de Lorentz à horizon fini, d'une longueur de 1 000 collisions.

Ce système est censé modéliser la diffusion d'un électron dans un métal (de structure cristalline) par le rebond d'une particule ponctuelle dans un réseau périodique [167]. Bien entendu, d'un point de vue physique, un analogue tridimensionnel de ce modèle serait nettement plus réaliste ; mais, d'un point de vue mathématique, cet analogue est malheureusement beaucoup moins bien compris [18].

Sur une table de billard de Sinaï sur le tore Q , un vecteur à un temps de collision est repéré par trois données : l'indice $i \in I$ de l'obstacle qu'il touche, l'abscisse curviligne s du point de collision, et l'angle θ à la normale en ce point. Soit \tilde{Q} la table de billard d'un gaz de Lorentz. Chaque type d'obstacle a une infinité de copies indiquées par une coordonnée $p \in \mathbb{Z}^2$. Un vecteur à un temps de collision sur \tilde{Q} est alors repéré par quatre données : les trois précédentes, et la coordonnée p de l'obstacle.

Un gaz de Lorentz \tilde{Q} est un revêtement π vers un billard de Sinaï sur un tore Q . Ce revêtement se retrouve au niveau de l'espace des phases de l'application collision, que l'on notera aussi π :

$$\pi(i, s, \theta, p) = (i, s, \theta).$$

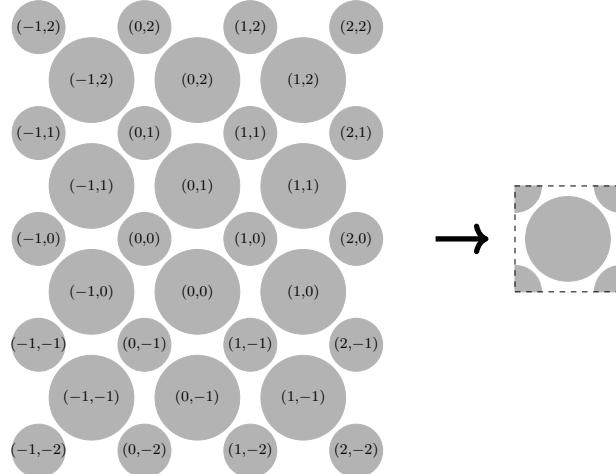


FIGURE 16 – Un \mathbb{Z}^2 -revêtement \tilde{Q} de Q , et un repérage possible sur \tilde{Q} .

Ce revêtement est une semi-conjugaison. Notons \tilde{T} l'application collision du gaz de Lorentz, et T l'application collision du billard de Sinaï sur le tore associé. Alors $\pi \circ \tilde{T} = T \circ \pi$. Par conséquent, si $\tilde{T}(i_0, s_0, \theta_0, p_0) = (i_1, s_1, \theta_1, p_1)$,

$$(i_1, s_1, \theta_1) = \pi(\tilde{T}(i_0, s_0, \theta_0, p_0)) = T(\pi(i_0, s_0, \theta_0, p_0)) = T(i_0, s_0, \theta_0),$$

donc $\tilde{T}(i, s, \theta, p) = (T(i, s, \theta), \tilde{F}(i, s, \theta, p))$ pour une certaine fonction \tilde{F} .

Enfin, la dynamique du gaz de Lorentz est équivariante sous l'action des translations de vecteur $q \in \mathbb{Z}^2$:

$$\tilde{T}(i, s, \theta, p + q) = \tilde{T}(i, s, \theta, p) + q.$$

Notons $F(i, s, \theta) := \tilde{F}(i, s, \theta, 0)$. Alors $\tilde{F}(i, s, \theta, q) = q + F(i, s, \theta)$. La transformation \tilde{T} est donc finalement de la forme

$$\tilde{T}(i, s, \theta, p) = (T(i, s, \theta), p + F(i, s, \theta)). \quad (4.1)$$

La notion de \mathbb{Z}^d -extensions généralise cette structure.

On peut itérer l'équation (4.1) : pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{T}^n(i, s, \theta, p) = (T^n(i, s, \theta), p + S_n^T F(i, s, \theta)). \quad (4.2)$$

Par conséquent, la position de la particule dans le gaz de Lorentz est donnée, à erreur bornée près, par les sommes de Birkhoff $S_n^T F$ de F . On peut ainsi illustrer de nombreuses propriétés des sommes de Birkhoff. Si le point de départ d'une trajectoire est choisi aléatoirement pour un mesure absolument continue sur l'ensemble $\{p = 0\}$, le théorème central limite donne une information sur la loi de la position de la particule en temps grand. Le principe d'invariance presque sûr [145] donne un couplage avec erreur contrôlée entre les trajectoires de particules et un mouvement brownien : en un sens précis, les trajectoires des particules ressemblent à des trajectoires browniennes.

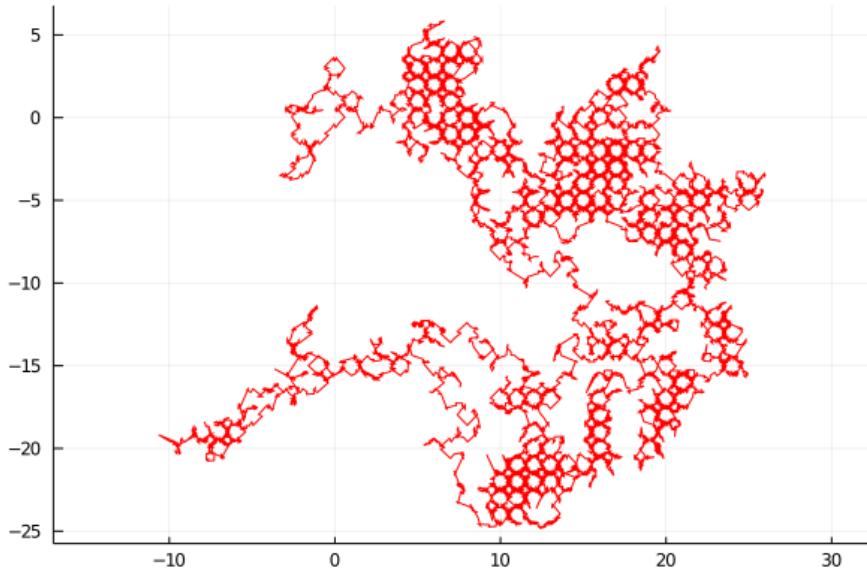


FIGURE 17 – Trajectoire dans un gaz de Lorentz à horizon fini, d'une longueur de 10 000 collisions. Les obstacles sont les mêmes qu'à la Figure 15, mais ne sont pas affichés.

Remarque 4.1 (Choix de repérage).

Le choix de système de coordonnées sur \mathbb{Z}^2 n'est a priori pas neutre : si l'on translate l'origine, et en particulier si l'on décale l'origine d'un type d'obstacle $i \in I$ de $q \in \mathbb{Z}^2$, la fonction F peut être modifiée. Cependant, dans ce cas, F sera toujours modifiée par ajout d'un cobord : la nouvelle fonction F_n est

$$F_n = F + h \circ T - h,$$

où $h(j, s, \theta) = -q$ si $j = i$ et 0 sinon. L'ajout d'un cobord à F n'affecte heureusement pas les propriétés statistiques du système, telles que la conservativité, l'ergodicité, mais aussi bon nombre de théorèmes limites.

Remarque 4.2 (Horizon fini ou infini).

La notion d'horizon fini ou infini prend tout son sens dans le cadre des gaz de Lorentz. Une table de billard de Sinai est d'horizon infini s'il existe des canaux de diffusion dans le gaz de Lorentz associé, c'est-à-dire des bandes sans obstacles :

Dans ce cas, les particules peuvent faire des sauts arbitrairement grands entre deux collisions, et donc voyager vite entre des points éloignés. Cela donne lieu à un phénomène de diffusion surcritique, c'est-à-dire que le déplacement d'une particule pendant une durée T est typiquement plus grand que \sqrt{T} . Nous renvoyons à ce sujet le lecteur vers la Sous-sous-section 3.6.2, en particulier sur le cas des lois de Lévy de paramètre 2.

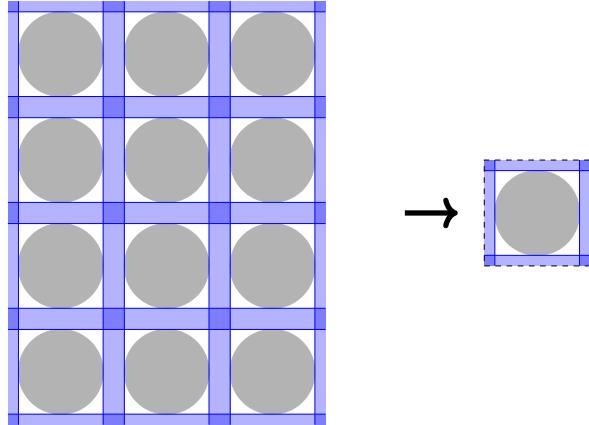


FIGURE 18 – Un gaz de Lorentz à horizon infini et des canaux de diffusion (en bleu). Si les obstacles étaient plus petits, il y aurait aussi des canaux de diffusion diagonaux.

4.2 Définition

Nous définissons les extensions de systèmes dynamiques dans un cadre mesuré.

Définition 4.3 (G -extension).

Soit G un groupe abélien³¹ localement compact. Soit (A, μ, T) un système dynamique mesuré et $F : A \rightarrow G$. La G -extension de fonction de saut F est le système dynamique $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$, où

- $\tilde{A} = A \times G$;
- $\tilde{\mu} = \mu \otimes \nu$;
- $\tilde{T}(x, p) = (T(x), p + F(x))$,

où ν est (à constante multiplicative près) la mesure de Haar sur G . Si de plus (A, μ, T) est un système dynamique Gibbs-Markov, on dit que l'extension est markovienne si F est constante sur les éléments de la partition markovienne α de A , ou, en d'autres termes, si F ne dépend que de la première lettre dans le codage associé à α .

Finalement, pour tout $\Sigma \subset G$, on notera $[\Sigma] := A \times \Sigma \subset \tilde{A}$, et plus simplement $[g] := [\{g\}]$ pour tout $g \in G$.

Dans la suite de ce texte, nous serons autant que possible cohérent au niveau des notations : $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ désignera implicitement une extension d'un système dynamique (A, μ, T) .

Si (A, μ, T) préserve la mesure, alors toute G -extension $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ préserve aussi la mesure.

Exemple 4.4 (Gaz de Lorentz).

L'application collision d'un gaz de Lorentz, discutée en Sous-section 4.1, est la \mathbb{Z}^2 extension de l'application collision d'un billard de Sinai.

Une famille de \mathbb{Z} -extensions d'applications collisions d'un billard de Sinai est donnée par les gaz de Lorentz sur des cylindres.



FIGURE 19 – La table de billard d'un gaz de Lorentz sur un cylindre.

31. On aurait aussi pu considérer des extensions par des groupes non commutatifs. Cela demande de faire attention à l'ordre des opérations, et nous n'en aurons pas besoin dans ce texte.

Exemple 4.5 (Marches aléatoires).

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans \mathbb{Z}^d . On peut encoder cette suite dans un système dynamique. Soit $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ la loi de X_0 . Posons :

- $A := (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$;
- $T : (x_n)_{n \geq 0} \mapsto (x_{n+1})_{n \geq 0}$ le décalage sur A ;
- $\mu := \nu^{\otimes \mathbb{N}}$ une mesure produit sur A .

Alors la loi de $(X_n)_{n \geq 0}$ est celle de $((T^n x)_0)_{n \geq 0}$. De plus, (A, μ, T) est une transformation Gibbs-Markov.

Soit $F(x) := x_0$ définie sur A . Alors la \mathbb{Z}^d -extension de (A, μ, T) de saut F est markovienne, et le processus $(S_n^T F)_{n \geq 0}$ a la même loi que la marche aléatoire associée à $(X_n)_{n \geq 0}$.

En ce sens, la notion de \mathbb{Z}^d -extension d'un système dynamique généralise la notion de marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d , en autorisant des sauts qui ne sont plus indépendants.

Nous ne traiterons pas formellement le cas des flots. La notion de \mathbb{Z}^d -extension d'un flot repose non pas sur une formule aussi explicite, mais plutôt sur l'existence d'un \mathbb{Z}^d -revêtement galoisien au niveau de l'espace des phases tel que le flot soit équivariant par les isomorphismes du revêtement – précisément les propriétés que nous avons utilisées dans le cadre du gaz de Lorentz. Ce cadre inclut :

- Le flot billard du gaz de Lorentz, extension du flot billard de Sinaï ;
- Le flot géodésique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, extension du flot géodésique sur une sphère munie de trois pointes, étudié par J. Aaronson et M. Denker [2] et mentionné en Sous-sous-section 3.6.2 ;
- Le flot géodésique sur des \mathbb{Z}^d -revêtements galoisiens de variétés compactes de courbure sectionnelle négative [138, 194] ;
- Le flot horocyclique sur des \mathbb{Z}^d -revêtements galoisiens de variétés compactes de courbure sectionnelle négative constante, étudié en particulier par M. Babillot, F. Ledrappier et O. Sarig [9, 153–155] ;
- Le flot de translation sur un \mathbb{Z}^d -revêtement d'un tore, dans le travail de A. Avila, D. Dolgopyat, E. Duriev et O. Sarig [8]...

5 Fonctions propres de l'opérateur de transfert

Soit $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une G -extension d'un système (A, μ, T) de saut F . Le spectre de l'opérateur de transfert $\tilde{\mathcal{L}}$ de $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est lié à ceux d'opérateurs de transfert tordus \mathcal{L}_ξ , d'une façon que nous allons maintenant présenter. Cela nous donnera en particulier une interprétation des valeurs propres d'opérateurs tordus comme valeurs propres d'un opérateur de transfert classique pour un plus grand système.

En application, nous présentons en Sous-section 5.4 la construction par l'auteur de billards de Sinaï dont l'application collision a des résonances de Ruelle non triviales [224].

5.1 Fonctions propres et extensions abéliennes

La discussion qui suit est tirée de [224]. Nous nous plaçons dans le cadre d'une G -extension $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ d'une transformation préservant la mesure (A, μ, T) .

Remarquons dans un premier temps que la dynamique sur $\tilde{A} = A \times \mathbb{Z}^2$ est invariante par translation. Notons $\tau_q : (x, p) \mapsto (x, p + q)$ la translation de q sur \tilde{A} ; alors $\tilde{T} \circ \tau_q = \tau_q \circ \tilde{T}$.

Cette invariance par translation se retrouve au niveau de l'opérateur de transfert : pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^\infty(\tilde{A}, \tilde{\mu})$ et tout $q \in G$,

$$\tilde{\mathcal{L}}(f \circ \tau_q) = \tilde{\mathcal{L}}(f) \circ \tau_q.$$

Par conséquent, l'action de $\tilde{\mathcal{L}}$ se décompose sur chaque espace propre pour l'ensemble des opérateurs $f \mapsto f \circ \tau_q$. Mais ces espaces propres sont exactement les espaces de fonctions de la forme $f \otimes \chi(x, q) := f(x)\chi(q)$, où $f \in \mathbb{L}^\infty(A, \mu)$ et $\chi \in \widehat{G}$. De plus, pour des observables ayant cette forme, pour toute fonction $g \in \mathbb{L}^1(\tilde{A}, \tilde{\mu})$, en posant $q' := q + F(x)$,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{A}} \tilde{\mathcal{L}}(f \otimes \chi) \cdot g \, d\tilde{\mu} &= \int_{\tilde{A}} f(x)\chi(q) \cdot g(T(x), q + F(x)) \, d\tilde{\mu}(x, q) \\ &= \int_G \chi(q') \int_A f(x)\chi(-F(x)) \cdot g(T(x), q') \, d\mu(x) \, d\nu(q') \\ &= \int_G \chi(q') \int_A \mathcal{L}(\chi(-F(x))f(x)) \cdot g(x, q') \, d\mu(x) \, d\nu(q') \\ &= \int_{\tilde{A}} \mathcal{L}(\chi(-F(x))f(x)) \chi(q') \cdot g(x, q') \, d\tilde{\mu}(x, q'). \end{aligned}$$

En bref, $\tilde{\mathcal{L}}(f \otimes \chi) = \mathcal{L}_\chi(f) \otimes \chi$, où $\mathcal{L}_\chi = \mathcal{L}(\chi(-F) \cdot)$. En particulier, si f_λ est une fonction propre de $\mathcal{L}_\chi \curvearrowright \mathbb{L}^\infty(A, \mu)$ de valeur propre λ , alors $f_\lambda \otimes \chi$ est une fonction propre de $\tilde{\mathcal{L}} \curvearrowright \mathbb{L}^\infty(\tilde{A}, \tilde{\mu})$ de valeur propre λ .

Dans le cas où $G = \mathbb{R}^d$ ou $G = \mathbb{Z}^d$, on retrouve les opérateurs de transfert tordus \mathcal{L}_ξ introduits en Sous-sous-section 3.5.2. Dans le cas où G est fini, on peut aller plus loin et écrire une décomposition $\tilde{\mathcal{L}}$ -invariante

$$\mathbb{L}^1(\tilde{A}, \tilde{\mu}) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} \mathbb{L}^1(A, \mu) \otimes \chi,$$

l'action de $\tilde{\mathcal{L}}$ sur chaque sous-espace $\mathbb{L}^1(A, \mu) \otimes \chi$ étant conjuguée à l'action de \mathcal{L}_χ sur $\mathbb{L}^1(A, \mu)$. Étant donné des espaces de Banach (de fonctions ou de distributions) raisonnables \mathcal{B} et $\widetilde{\mathcal{B}}$ sur A et \tilde{A} respectivement³², on peut espérer une décomposition identique, qui conduit alors à l'identité

$$\text{Sp}(\tilde{\mathcal{L}} \curvearrowright \widetilde{\mathcal{B}}) = \bigcup_{\chi \in \widehat{G}} \text{Sp}(\mathcal{L}_\chi \curvearrowright \mathcal{B}), \quad (5.1)$$

cette décomposition conservant la nature des points du spectre. Par conséquent, la multiplicité d'une valeur propre pour $\tilde{\mathcal{L}}$ est la somme de ses multiplicités pour les opérateurs \mathcal{L}_χ .

5.2 Spectre périphérique, II : Ergodicité des extensions

En Sous-sous-section 3.3.2, nous faisions le lien entre les propriétés d'ergodicité et de mélange du système (A, μ, T) d'une part, et le spectre périphérique de l'opérateur de transfert $\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}$ d'autre part. Dans cette Sous-section et la suivante, nous étendons cette analyse au spectre périphérique des opérateurs de transfert tordus $\mathcal{L}_\xi \curvearrowright \mathcal{B}$. Le type d'analyse menée ici est classique, et peut se trouver en partie dans [61].

Soit $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Pour tout $\Lambda \leq \mathbb{Z}^d$, pas nécessairement de rang d , on dispose d'une extension intermédiaire $(A_\Lambda, \mu_\Lambda, T_\Lambda)$, où :

32. Par exemple, tels que $\rho_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\chi \curvearrowright \mathcal{B}) \leq \rho_0 < 1$ pour une constante ρ_0 indépendante de χ .

- $A_\Lambda := A \times (\mathbb{Z}^d/\Lambda)$;
- $\mu_\Lambda := \mu \otimes \text{Leb}$, où Leb est la mesure de comptage sur \mathbb{Z}^d/Λ ;
- $T_\Lambda(x, p [\Lambda]) = (T(x), p + F(x) [\Lambda])$.

De l'analyse de la Sous-section 5.1, on déduit :

Corollaire 5.1.

Soit $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Si $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est ergodique, alors :

- Pour tout $\Lambda \leq \mathbb{Z}^d$, l'extension intermédiaire $(A_\Lambda, \mu_\Lambda, T_\Lambda)$ est ergodique.
- L'opérateur $\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}$ a 1 comme valeur propre simple, et $1 \notin \text{Sp}(\mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}(e^{i\xi F} \cdot) \curvearrowright \mathcal{B})$ pour tout $\xi \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$.
- L'équation $F = h \circ T - h [\Lambda]$, d'inconnues $\Lambda \leq \mathbb{Z}^d$ et $h : A \rightarrow \mathbb{R}^d/\Lambda$ mesurable, a pour seules solutions les solutions triviales $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ et h constante.

Démonstration.

L'ergodicité d'un système implique l'ergodicité de ses facteurs, ce qui montre le premier point.

Par la construction de la Sous-section 5.1, toute fonction \mathcal{L}_ξ -invariante non constante se relèverait en une fonction $\tilde{\mathcal{L}}$ -invariante non constante, ce qui contredirait l'ergodicité de $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$.

Le troisième point suit du second (pour ξ rationnel) par des arguments semblables à ceux de la démonstration de la Proposition 3.11. \square

La réciproque à ce Corollaire est nettement plus délicate. La notion de valeur essentielle [1, 205] est centrale ; elle formalise notamment des obstructions potentielles à l'ergodicité autres que celles du Corollaire 5.1. Ces obstructions apparaissent par exemple dans le cadre de \mathbb{Z} -extensions de billards polygonaux (modèle du vent dans les arbres) [97]. L'auteur n'a cependant pas pu localiser d'analyse exhaustive de l'ergodicité dans le cadre d'extensions markoviennes de transformations Gibbs-Markov.

Question 5.2.

Soit $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne d'un système dynamique Gibbs-Markov. Supposons que l'équation $F = h \circ T - h [\Lambda]$, d'inconnues $\Lambda \leq \mathbb{Z}^d$ et $h : A \rightarrow \mathbb{R}^d/\Lambda$ mesurable, a pour seules solutions les solutions triviales $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ et h constante. Le système dynamique $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est-il ergodique ?

5.3 Spectre périphérique, III : Apéridicité

En Sous-sous-section 3.3.2, nous avions analysé le spectre périphérique de l'opérateur de transfert \mathcal{L} . Pour la suite, il sera utile de contrôler le spectre périphérique des opérateurs de transfert tordus, et d'introduire au passage une notion d'*apéridicité* d'une extension abélienne. Par simplicité, nous nous plaçons dans le cadre des \mathbb{Z}^d -extensions de transformations Gibbs-Markov plutôt que dans un cadre plus général d'actions quasi-compacts d'opérateurs de transfert de systèmes dynamiques.

La proposition-clef est la suivante :

Proposition 5.3. [226, Lemma 5.7]

Soit $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Supposons que $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est ergodique. Pour tout $\xi \in \mathbb{T}^d$, notons $\mathcal{L}_\xi := \mathcal{L}(e^{i2\pi\langle \xi, F \rangle} \cdot)$.

Soit M le cardinal du spectre périphérique de $\mathcal{L} \curvearrowright \text{Lip}^\infty(A, \mu)$. Alors il existe $n \geq 1$ et un élément $\xi_0 \in \mathbb{T}^d$ d'ordre n tels que

$$H := \{(\xi, \lambda) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{S}^1 : \lambda \in \text{Sp}(\mathcal{L}_\xi \curvearrowright \mathcal{B})\} = \left\{ \left(k\xi_0, e^{2\pi i \frac{k}{Mn}} \right) : k \in \mathbb{Z}/Mn\mathbb{Z} \right\}.$$

De plus, chacune de ces valeurs propres est simple.

La démonstration est très proche de celle de la Proposition 3.11, et est laissée en exercice.

Définition 5.4 (Apériodicité).

Soit $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Cette extension est dite apériodique si $\rho(\mathcal{L}_\xi \curvearrowright \mathcal{B}) < 1$ pour tout $\xi \neq 0$, ou autrement dit si $H \subset \{0\} \times \mathbb{S}_1$, et si de plus 1 est valeur propre simple de \mathcal{L} .

Cette notion a une description plus combinatoire, parfois prise comme définition de l'apériodicité :

Proposition 5.5.

Soit $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) et de saut F . Supposons que (A, μ, T) est ergodique. Alors $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est apériodique si et seulement si l'équation de cobord

$$F = k + \theta \circ T - \theta \mod \Lambda, \quad (5.2)$$

où $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ est un réseau, $k \in \mathbb{Z}^d / \Lambda$ et $\theta : A \rightarrow \mathbb{Z}^d / \Lambda$ est mesurable, n'a pas de solution pour $\Lambda \neq \mathbb{Z}^d$.

Si l'Équation (5.2) a une solution non triviale (Λ, k, θ) , alors $[\mathbb{Z}^d]$ a une partition non triviale en ensembles $(\tilde{A}_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}^d / \Lambda}$, où $\tilde{A}_\ell = \{(x, p) \in [\mathbb{Z}^d] : \theta(x) + p = \ell\}$. De plus, si $(x, p) \in \tilde{A}_\ell$, alors $\tilde{T}(\tilde{A}_\ell) = \tilde{A}_{\ell-k}$. Par analogie avec la Proposition 5.3, une telle solution est donc une obstruction au mélange de $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$. Remarquons au passage que, si $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est ergodique, alors nécessairement \mathbb{Z}^d / Λ est cyclique et k est un de ses générateurs.

Voyons comment ces notions s'appliquent à des marches aléatoires.

Exemple 5.6 (Marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}).

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans \mathbb{Z}^d , et $(S_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire associée. Suivant l'Exemple 4.5, on encode cette marche aléatoire à l'aide d'une \mathbb{Z}^d -extension d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) . Rappelons que $A = (\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}$, que T est le décalage sur A et $\mu = \nu^{\otimes \mathbb{N}}$, où ν est la loi de X_0 . L'espace A est muni de la partition $\alpha := (a_p)_{p \in \mathbb{Z}^d}$ où $a_p = \{x_0 = p\}$, et la partition image α^* est triviale car chaque a_p est envoyé surjectivement sur A .

Soit $\xi \in \mathbb{T}^d$ et λ une valeur propre périphérique de \mathcal{L}_ξ . Soit f_ξ une fonction propre associée. Par une généralisation de la Remarque 3.17, f_ξ est mesurable pour la partition image, qui est triviale, donc f_ξ est constante. Sans perte de généralité, $f_\xi = \mathbf{1}$, et alors

$$\lambda = \int \mathcal{L}_\xi(\mathbf{1}) \, d\mu = \int \mathcal{L}(e^{i\langle \xi, F \rangle} \mathbf{1}) \, d\mu = \mathbb{E}(e^{i\langle \xi, X_0 \rangle}) =: \Psi(\xi),$$

où Ψ est la fonction caractéristique de X_0 . Par conséquent :

- Si $(S_n)_{n \geq 0}$ est ergodique, alors $\Psi(\xi) \neq 1$ pour tout $\xi \neq 0$.
- $(S_n)_{n \geq 0}$ est apériodique si et seulement si $|\Psi(\xi)| < 1$ pour tout $\xi \neq 0$.

Par exemple, pour la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} , à valeurs dans $\{\pm 1\}$, on a $\Psi(\xi) = \cos(\xi)$, et en particulier $\Psi(\pi) = -1$. Cette marche aléatoire n'est donc pas apériodique. L'ensemble H de la Proposition 5.3 est $\{(0, 1), (\pi, -1)\}$. L'Équation (5.2) a pour solution non triviale $\Lambda = 2\mathbb{Z}$, $k = 1$ et $\theta \equiv 0$. La partition de $[\mathbb{Z}]$ associée est $\{[2\mathbb{Z}], [2\mathbb{Z} + 1]\}$.

5.4 Application : Résonances dans les billards de Sinaï

L'objectif initial de l'article [224] de l'auteur était de construire des billards de Sinaï dont l'application collision a des résonances de Ruelle non triviales, répondant ainsi à une question posée par V. Baladi.

Si les outils permettant de démontrer la quasi-compacité d'un opérateur de transfert, ou bien un trou spectral, sont bien établis, exhiber des résonances de Ruelle explicites est beaucoup plus délicat. Cela peut se faire numériquement [48]. Pensons par exemple aux travaux récents d'O. Bandtlow, W. Just et J. Slipantschuk sur les liens entre spectre d'opérateurs et décomposition en modes dynamiques [24, 25], ou le travail encore en cours d'A. Blumenthal, I. Nisoli et T. Taylor-Crush [33] sur les méthodes de disques de Gershgorin. Cependant, à l'heure actuelle, ces méthodes numériques n'existent que dans des cadres relativement simples : il faut pouvoir décrire numériquement des éléments de l'espace de Banach \mathcal{B} . Les espaces de M. Demers and H.-K. Zhang [74, 75] sont encore de loin trop complexes pour pouvoir être utilisés dans des démonstrations assistées par ordinateur.

S'il y a des classes de transformations dont on connaît exactement les résonances [22, 23], les billards de Sinaï n'en font pas partie.

La méthode qui suit repose sur la Sous-section 5.1. Elle a permis de construire des flots géodésiques ainsi que des billards de Sinaï ayant des résonances de Ruelle non triviales, par D. Jakobson, F. Naud et L. Soares dans le cas des flots géodésiques [127], et par l'auteur dans le cas des billards de Sinaï [224].

Fixons une table de billard de Sinaï d'horizon fini Q telle que définie en Sous-sous-section 2.4.5. Cette table est un sous-ensemble du tore \mathbb{T}^2 . Elle admet donc un \mathbb{Z}^2 -revêtement \tilde{Q} , sur lequel la dynamique est celle du gaz de Lorentz, mais aussi des revêtements intermédiaires : tout sous-groupe Λ de \mathbb{Z}^2 fournit un revêtement de \mathbb{T}^2 , et donc une table de billard intermédiaire Q_Λ .

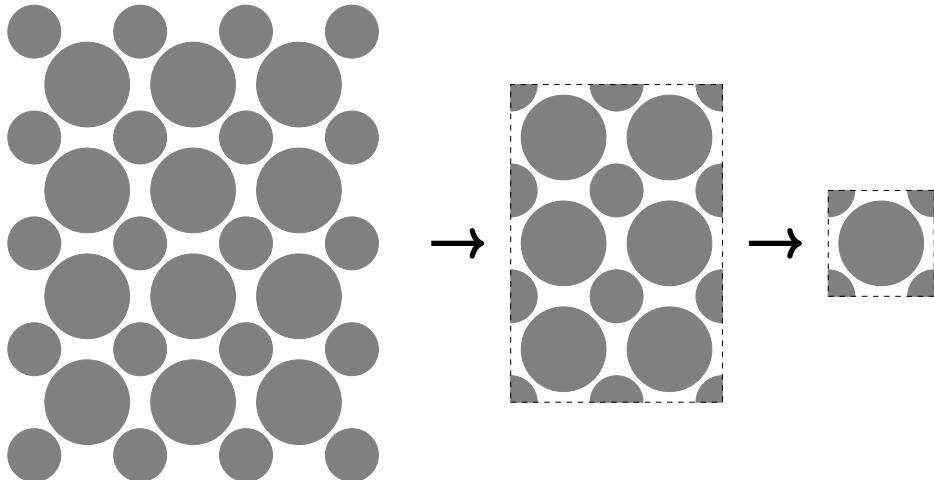


FIGURE 20 – Le \mathbb{Z}^2 -revêtement \tilde{Q} de Q (table de billard du gaz de Lorentz), et le revêtement intermédiaire Q_Λ avec $\Lambda = 2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$.

Ces tables de billard fournissent autant d'applications collision, que nous noterons respectivement (A, μ, T) pour la table Q , puis $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ pour la table \tilde{Q} et $(A_\Lambda, \mu_\Lambda, T_\Lambda)$ pour la table Q_Λ . Le système $(A_\Lambda, \mu_\Lambda, T_\Lambda)$ est une \mathbb{Z}^2/Λ -extension de (A, μ, T) . Par la suite, nous supposerons que Λ est un réseau de \mathbb{Z}^2 , et donc que \mathbb{Z}^2/Λ est fini ; dans ce cas, $(A_\Lambda, \mu_\Lambda, T_\Lambda)$ est encore un billard de Sinaï, mais sur un tore plus gros.

Les espaces de distributions anisotropes construits par M. Demers and H.-K. Zhang [74, 75], que nous noterons ici \mathcal{B} (ou \mathcal{B}_Λ), sont particulièrement adaptés à ce problème. D'une part, l'opérateur de transfert \mathcal{L} (respectivement, \mathcal{L}_Λ) agit quasi-compactement sur \mathcal{B} (respectivement, \mathcal{B}_Λ). D'autre part, les bornes sur le rayon spectral essentiel de $\mathcal{L}_\Lambda \curvearrowright \mathcal{B}_\Lambda$ ne dépendent que de la courbure des obstacles et de leur distance, et sont donc une constante $\rho_0 < 1$ indépendante de Λ .

En-dehors de $\overline{B}(0, \rho_0)$, le spectre des opérateurs $\mathcal{L}_\Lambda \curvearrowright \mathcal{B}_\Lambda$ est constitué de valeurs propres de

multiplicité finie. Par la discussion de la Sous-section 5.1, en-dehors de $\overline{B}(0, \rho_0)$,

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_\Lambda \curvearrowright \mathcal{B}_\Lambda) = \bigcup_{\xi \in \widehat{\mathbb{Z}^2/\Lambda}} \mathrm{Sp}(\mathcal{L}_\xi \curvearrowright \mathcal{B}).$$

La valeur propre 1 de $\mathcal{L}_\Lambda \curvearrowright \mathcal{B}_\Lambda$ correspond à la valeur propre 1 de $\mathcal{L}_0 \curvearrowright \mathcal{B}$ dans cette décomposition. Il s'ensuit que, pour que $\mathcal{L}_\Lambda \curvearrowright \mathcal{B}_\Lambda$ ait des résonances de Ruelle non triviales, il suffit qu'il existe un $\xi \in \widehat{\mathbb{Z}^2/\Lambda}$ non nul tel que $\mathcal{L}_\xi \curvearrowright \mathcal{B}$ ait une résonance de Ruelle.

Or, grâce aux perturbations d'opérateurs de transfert, on sait que, pour tout ξ dans un voisinage U de 0, l'opérateur $\mathcal{L}_\xi \curvearrowright \mathcal{B}$ a une résonance λ_ξ proche de 1. Il suffit donc de prendre une table assez grande ; alors $\widehat{\mathbb{Z}^2/\Lambda} \cap U$ contiendra un élément $\xi \neq 0$, et donc l'opérateur \mathcal{L}_Λ aura une résonance de Ruelle non triviale égale à λ_ξ .

Dans le cas du billard de Sinaï, on peut être plus précis.

- L'opérateur \mathcal{L}_Λ est réel. Son spectre est donc symétrique par rapport à l'axe réel. De plus, $\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_\xi \curvearrowright \mathcal{B}) = \overline{\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_{-\xi} \curvearrowright \mathcal{B})}$. En particulier, $\lambda_\xi = \overline{\lambda_{-\xi}}$ pour tout ξ suffisamment petit.
- De façon générale, $\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_\xi \curvearrowright \mathcal{B}) = \mathrm{Sp}(\mathcal{L}_\xi^* \curvearrowright \mathcal{B}^*)$.
- Le flot billard $(\Omega, \mathrm{Liouv}, (\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ admet une symétrie : l'inversion de temps ι . Le flot satisfait l'équation $\varphi_t \circ \iota = \iota \circ \varphi_{-t}$. Cette inversion temporelle passe à l'application collision, où elle devient le renversement d'angle ; l'application collision satisfait les équations $T \circ \iota = \iota \circ T^{-1}$ et $F \circ \iota \circ T = -F$. On peut vérifier³³ que cela implique l'identité $\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_\xi^* \curvearrowright \mathcal{B}^*) = \mathrm{Sp}(\mathcal{L}_{-\xi} \curvearrowright \mathcal{B})$ près de 1. En particulier, $\lambda_\xi = \lambda_{-\xi}$ pour tout ξ suffisamment petit.

En mettant ces remarques bout-à-bout, on voit que $\lambda_\xi = \overline{\lambda_\xi}$, c'est-à-dire que les résonances de Ruelle ainsi obtenues sont réelles. Au passage, ces résonances sont (au moins) doubles : le sous-espace propre de $\lambda_\xi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{L}_\xi \curvearrowright \mathcal{B})$ est apparié au sous-espace propre de $\lambda_{-\xi} = \lambda_\xi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{L}_{-\xi} \curvearrowright \mathcal{B})$.

De plus, on peut exclure l'existence de toute autre résonance de Ruelle de module proche de 1. En effet, l'analyse faite en Sous-section 5.3 se transpose aux billards de Sinaï. Soit H le sous-groupe introduit en Proposition 5.3. Alors, via notre construction, tout élément de H non trivial est un élément non trivial du spectre périphérique d'un opérateur \mathcal{L}_Λ associé à un revêtement fini. Or un tel revêtement fini est encore un billard de Sinaï, donc est mélangeant [211] ; le sous-groupe H est donc trivial. De plus, les résonances de Ruelles dépendent continûment du paramètre ξ . Par compacité, il existe $r > 0$ tel que, si λ est une résonance de Ruelle de module au moins $1 - r$ d'un opérateur \mathcal{L}_ξ , alors ξ est proche de 0 et $\lambda = \lambda_\xi$ est la valeur propre principale de \mathcal{L}_ξ . On obtient finalement :

Théorème 5.7. [224, Theorem 1.1]

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_\Lambda \curvearrowright \mathcal{B}_\Lambda) \subset \overline{B}(0, 1 - \varepsilon) \cup [1 - \varepsilon, 1]$ pour tout réseau Λ . De plus, il existe une constante $1 \leq C$ telle que :

$$\frac{1}{C} \mathrm{Card}(\mathbb{Z}^2/\Lambda) \leq \mathrm{Card}\{\text{résonances de Ruelle dans } [1 - \varepsilon, 1] \text{ avec multiplicité}\} \leq C \mathrm{Card}(\mathbb{Z}^2/\Lambda).$$

En particulier, dès que Λ est suffisamment peu dense, $\mathcal{L}_\Lambda \curvearrowright \mathcal{B}_\Lambda$ admet des résonances de Ruelle non triviales.

De plus, grâce au développement limité de λ_ξ obtenu en Sous-sous-section 3.5.2, on peut estimer le nombre de valeurs propres dans un petit intervalle $[1 - \varepsilon, 1]$ près de 1, où ε est donné par le

33. Cela demande un peu d'effort, car les espaces \mathcal{B} ne se comportent pas très bien vis-à-vis de l'inversion temporelle, au sens où $\mathcal{B}^* \neq \iota_* \mathcal{B}$. Cela est dû au fait que les cônes stables et instables ne sont pas traités de façon symétrique dans la définition de \mathcal{B} .

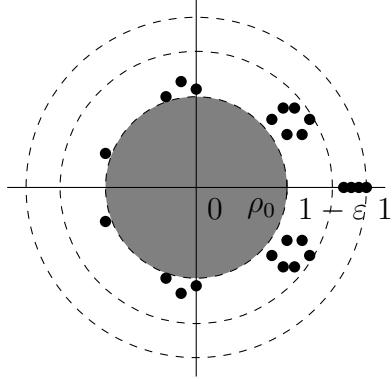


FIGURE 21 – Spectre de l’opérateur \mathcal{L}_Λ agissant sur \mathcal{B}_Λ pour un réseau Λ suffisamment peu dense. Ce spectre est symétrique par rapport à la droite réelle. Les résonances sur le segment $[1 - \varepsilon, 1]$ existent ; les autres sont conjecturales.

Théorème 5.7. Notons ν_Λ la mesure de comptage des résonances de Ruelle (avec multiplicité) dans l’intervalle $[1 - \varepsilon, 1]$, renormalisée par la taille de la table de billard :

$$\nu_\Lambda := \frac{1}{\text{Card}(\mathbb{Z}^2/\Lambda)} \sum_{\substack{\lambda \text{ résonance de } \mathcal{L}_\Lambda \\ |\lambda| > 1 - \varepsilon}} \delta_\lambda.$$

On peut approcher les mesures ν_Λ quand Λ devient de moins en moins dense par des mesures continues de *densité spectrale*³⁴. Nous en donnons ci-dessous deux cas particuliers : les familles de réseaux $(N\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ et $(N\mathbb{Z})^2$ avec $N \gg 1$. Commençons par la dimension 1 (tables “très longues”) :

Proposition 5.8. [224, Proposition 1.3]

Posons $\Lambda_N := (N\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une mesure finie $\nu^{(1)}$ sur $[1 - \varepsilon_0, 1]$ telle que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \nu_{\Lambda_N}|_{[1 - \varepsilon_0, 1]} = \nu^{(1)},$$

où la convergence est faible-*. De plus, $\nu^{(1)}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et sa densité admet une version continue sur $[1 - \varepsilon_0, 1]$ telle que

$$\frac{d\nu^{(1)}}{dx} \sim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\pi\sqrt{2 \text{Cov}_{11}}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad (5.3)$$

où $\text{Cov}_{11} > 0$ est le terme $(1, 1)$ dans la matrice de covariance asymptotique Cov du gaz de Lorentz associé.

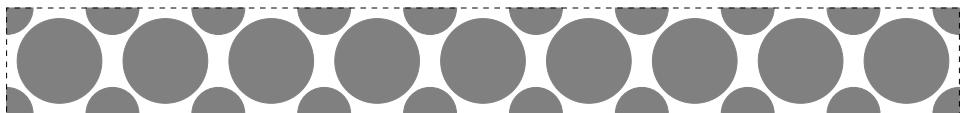


FIGURE 22 – La table Q_{Λ_9} de la Proposition 5.8.

Et finissons par la dimension 2 (tables “carrées de grande taille”) :

34. Cet aspect de l’étude est directement inspiré des travaux de D. Jakobson, F. Naud et L. Soares [127].

Proposition 5.9. [224, Proposition 1.4]

Posons $\Lambda_N := (N\mathbb{Z})^2$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une mesure finie $\nu^{(2)}$ sur $[1 - \varepsilon_0, 1]$ telle que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \nu_{\Lambda_N|[1-\varepsilon_0,1]} = \nu^{(2)},$$

où la convergence est faible-*. De plus, $\nu^{(2)}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et sa densité admet une version continue sur $[1 - \varepsilon_0, 1]$ telle que

$$\frac{d\nu^{(2)}}{dx}(1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\text{Cov})}}, \quad (5.4)$$

où Cov est la matrice de covariance asymptotique du gaz de Lorentz associé.

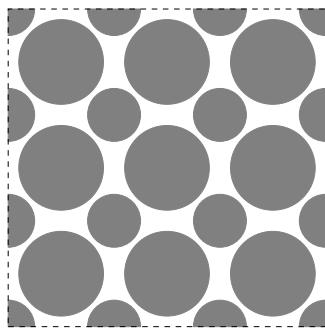


FIGURE 23 – La table Q_{Λ_3} de la Proposition 5.8.

5.5 Pour aller plus loin : Résonances pour le flot billard

La construction de résonances de Ruelle pour les billards de Sinai que nous avons présentée en Sous-section 5.4 laisse plusieurs questions ouvertes.

D'une part, remarquons que les tables de billard étudiées sont très particulières : ce sont de grands revêtements d'une table donnée. De plus, les résonances obtenues sont elles aussi très particulières : proches de 1, réelles, et de multiplicité paire.

Question 5.10.

Existe-t-il des billards de Sinai avec des résonances de Ruelle non réelles, ou non triviales et de multiplicité 1 ?

L'argument théorique présenté dans ce mémoire ne peut pas répondre à cette question. Une piste possible consiste à perturber nos tables de billard très particulières pour essayer de séparer les résonances de multiplicité paire.

Une autre question naturelle concerne l'existence de résonances de Ruelle pour le flot billard. Dans ce cadre, le générateur du flot X , est un opérateur non borné sur un espace de Banach bien choisi \mathcal{B} . De plus, $\text{Sp}(X \curvearrowright \mathcal{B}) \subset \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$, on sait que $0 \in \text{Sp}(X \curvearrowright \mathcal{B})$ correspond aux fonctions constantes, et que $\text{Sp}(X \curvearrowright \mathcal{B}) \cap [-\rho_0, 0]$ est constitué de valeurs propres isolées de multiplicité finie pour certains $\rho_0 > 0$. On aimerait savoir s'il existe des tables de billard pour lesquelles il existe des résonances autres que 0.

Question 5.11.

Existe-t-il des billards de Sinai dont le flot a des résonances de Ruelle non triviales ?

Le candidat naturel pour \mathcal{B} , et le seul au moment où ces lignes sont écrites, est l'espace construit par V. Baladi, M. Demers et C. Liverani [14]. Cependant, cet espace est délicat à manipuler. Il n'est pas évident qu'il soit séparable, et par conséquent, il est difficile d'implémenter des arguments d'approximation et d'extension par densité d'opérateurs. De là, même les calculs de perturbations de valeurs propres échouent.

Le défi est cette fois-ci technique : il faut modifier la construction de Baladi – Demers – Liverani pour obtenir des espaces de Banach ayant de meilleures propriétés analytiques. Un problème d'autant plus épique que cette construction est complexe : l'article original [14] avoisine les 140 pages.

6 Théorème central limite local

Dans le cadre des \mathbb{Z}^d -extensions conservatives, nous allons maintenant présenter les travaux de F. Pène et de l'auteur sur les déviations des sommes de Birkhoff [184, 186, 222]. Ces résultats fins portent sur les différences de temps locaux. Avant de les aborder, il est nécessaire de comprendre le comportement des temps locaux de telles extensions. Ce sera aussi l'occasion de présenter dans un cadre simplifié la méthode des moments, qui joue un rôle crucial dans deux de ces articles [184, 186].

Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cadre de \mathbb{Z}^d -extensions markoviennes conservatives de transformations Gibbs-Markov, bien que le travail [186] s'applique à des systèmes plus généraux, y compris des gaz de Lorentz à horizon fini.

6.1 Conservativité des \mathbb{Z}^d -extensions

Dans cette Sous-section, la notion de conservativité sera cruciale. Nous allons présenter des critères simples la garantissant. Une première condition suffisante très générale est :

Théorème 6.1. *[205, Theorem 11.4]*

Soit (A, μ, T) un système dynamique probabilisé, préservant la mesure et ergodique. Soit $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z} -extension ou \mathbb{R} -extension de (A, μ, T) de saut F . Supposons que $F \in \mathbb{L}^1(A, \mu)$.

Alors $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est conservatif si et seulement si $\int_A F \, d\mu = 0$.

Le théorème de Birkhoff implique que $\int_A F \, d\mu = 0$ est une condition nécessaire pour la conservativité dès que F est intégrable ; la difficulté consiste à montrer que cette condition est suffisante.

L'aspect le plus remarquable de ce théorème est la faiblesse de ses hypothèses ; il s'applique aussi à des extensions de rotations, ou bien de flots verticaux sur des surfaces plates. Dans le cadre d'extensions de transformations Gibbs-Markov, il permet déjà de caractériser la conservativité dès que F est dans le bassin d'attraction de lois stable de paramètre $\alpha > 1$.

Cependant, ce théorème ne donne pas d'information si F n'est pas intégrable, ou bien en dimension supérieure. On utilisera alors plutôt le critère suivant :

Proposition 6.2.

Soit $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une extension markovienne ergodique d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Le système $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est conservatif si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(S_n^T F = 0) = +\infty. \quad (6.1)$$

Démonstration.

Le système $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est conservatif si et seulement si $[0]$ est un ensemble récurrent. Choisissons $(x, 0)$ dans la cellule $[0]$ selon la loi μ . Remarquons que $\tilde{T}^n(x, 0) \in [0]$ si et seulement si $S_n^T F(x) = 0$. Posons donc

$$L_\infty(x) := \text{Card}\{k \geq 0 : \tilde{T}^k(x, 0) = 0\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{S_k^T F = 0\}}(x)$$

le nombre total de fois que l'orbite $(\tilde{T}^n(x, 0))_{n \geq 0}$ passe en $[0]$. Par le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}(L_\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(S_n^T F = 0).$$

Si cette dernière somme est finie, alors $L_\infty < +\infty$ presque sûrement, donc $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est transient. Supposons maintenant que ce système est transient. On sait que $L_\infty < +\infty$ presque sûrement, et on veut montrer que $\mathbb{E}(L_\infty) < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N tel que $\mu(L_\infty \geq N) \leq \varepsilon$.

Pour tout $n \geq 0$, soit $\varphi^{(n)}(x)$ le plus petit entier tel que

$$L_{\varphi^{(n)}(x)}(x) := \text{Card}\{0 \leq k \leq \varphi^{(n)}(x) : S_k^T F(x) = 0\} \geq n.$$

Cet entier est bien défini sur $\{L_\infty \geq n\}$, et est un temps d'arrêt sur cet ensemble. On a ensuite, pour tout $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mu(L_\infty \geq (k+1)N) &= \mu\left(L_\infty \geq kN \text{ et } L_\infty \circ T^{\varphi^{(kN)}} \geq N\right) \\ &= \int_A \mathbf{1}_{L_\infty \geq kN} \cdot \mathbf{1}_{L_\infty \geq N} \circ T^{\varphi^{(kN)}} d\mu \\ &= \int_A \mathcal{L}_{\varphi^{(kN)}}(\mathbf{1}_{L_\infty \geq kN}) \cdot \mathbf{1}_{L_\infty \geq N} d\mu \\ &\leq C\mu(L_\infty \geq kN)\mu(L_\infty \geq N) \\ &\leq C\varepsilon\mu(L_\infty \geq kN), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la Proposition 3.24 pour obtenir l'avant-dernière ligne, et la constante C ne dépend que du système (A, μ, T) . Par récurrence, $\mu(L_\infty \geq kN) \leq (C\varepsilon)^k$. En choisissant $\varepsilon < C^{-1}$, on a montré que L_∞ a des queues exponentielles, et donc est intégrable. \square

Une version plus sophistiquée de cette démonstration permettra de démontrer les Proposition 13.4 et 13.5 en Sous-section 13.1.

La convergence, ou divergence, de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(S_n^T F = 0)$ peut être abordée par des techniques de perturbation d'opérateur. On peut ainsi montrer la conservativité de $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ pour certaines fonctions de saut F non intégrables mais dans le bassin d'attraction d'une loi de Cauchy ; par conséquent, le flot géodésique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ est conservatif [2]. En dimension 2, si $F \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$ est centrée, alors $(\tilde{A}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est conservatif. On peut même affaiblir l'hypothèse $F \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$ par $\mu(\|F\| \geq x) =_{x \rightarrow +\infty} O(x^{-2})$, ce qui permet de montrer la conservativité d'une version simplifiée³⁵ du gaz de Lorentz à horizon infini.

Cette étude de $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(S_n^T F = 0)$ par des méthodes spectrales est l'objet de la Sous-section suivante.

35. Le vrai gaz de Lorentz est une \mathbb{Z}^2 -extension d'un billard de Sinaï à horizon infini, et non d'une transformation Gibbs-Markov, ce qui complique les choses ; le travail de D. Szász et T. Varjú [215] est à ce point de vue remarquable.

6.2 Probabilité d'être en [0]

L'estimation de la probabilité $\mu(S_n^T F = 0)$ de revenir au site de départ repose sur la méthode déjà utilisée en Sous-section 3.6 pour démontrer le théorème central limite. L'argument est plus simple dans le cadre des \mathbb{Z}^d -extensions apériodiques.

6.2.1 Extensions apériodiques

Pour simplifier, nous considérons le cas le plus élémentaire : celui d'une \mathbb{Z} -extension $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F , telle que F soit de carré intégrable et centrée. Supposons de plus cette extension ergodique et apériodique.

Nous allons maintenant calculer les probabilités $\mu(\tilde{T}^n(x, 0) \in [0])$. Ce sera l'occasion de présenter une autre application de la méthode de Nagaev–Guivarc'h de la Sous-sous-section 3.6.1, mais aussi d'appliquer la notion d'apériodicité et de présenter dans un cadre simplifié certaines stratégies de la Partie IV.

Par transformée de Fourier, pour tout $a \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{1}_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi a} d\xi.$$

Par conséquent,

$$\mu(S_n^T F = 0) = \int_A \mathbf{1}_0(S_n^T F) d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} \int_A e^{i\xi S_n^T F} d\mu d\xi.$$

L'utilisation d'opérateurs de transfert tordus s'avère encore une fois très productive : comme dans la démonstration spectrale du théorème central limite, on peut écrire ces intégrales sous la forme

$$\mu(S_n^T F = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} \int_A \mathcal{L}_\xi^n(\mathbf{1}) d\mu d\xi. \quad (6.2)$$

La différence avec le théorème central limite est qu'il ne suffit pas de contrôler l'opérateur \mathcal{L}_ξ pour ξ proche de 0 : à cause de l'intégrale sur le tore, il faut le contrôler partout. Par apériodicité, le sous-groupe H de la Proposition 5.3 est trivial. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_A \mathcal{L}_\xi^n(\mathbf{1}) d\mu d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \lambda_\xi^n d\xi (1 + \delta(\varepsilon)) + O(r^n),$$

où $r \in (0, 1)$ et $\lim_0 \delta = 0$. Les valeurs de $\xi \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$ ont une contribution en $O(r(\varepsilon)^n)$ pour un $r(\varepsilon) \in (0, 1)$, tandis que, comme nous allons le voir, la contribution des valeurs de $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ est de l'ordre de $n^{-\frac{1}{2}}$. On peut donc négliger les valeurs de ξ hors de $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Par développement limité de la valeur propre principale λ_ξ , avec des fonctions δ qui peuvent changer d'une ligne à l'autre,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \lambda_\xi^n d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(1 - \frac{\sigma^2(A, \mu, T; F)\xi^2}{2} + o(\xi^2) \right)^n d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{n\sigma^2(A, \mu, T; F)\xi^2}{2}} d\xi (1 + \delta(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sigma^2(A, \mu, T; F)\xi^2}{2}} d\xi (1 + \delta(\varepsilon)) \\ &= \frac{1 + \delta(\varepsilon)}{\sigma(A, \mu, T; F)\sqrt{2\pi n}}. \end{aligned}$$

On obtient finalement, à l'aide d'un argument diagonal portant sur ε ,

$$\mu(S_n^T F = 0) = \frac{1}{\sigma(A, \mu, T; F)\sqrt{2\pi n}} + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Théorème 6.3 (Théorème central limite local).

Soit $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une extension markovienne ergodique et apériodique d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Supposons que $\int_A F^2 d\mu < +\infty$ et $\int_A F d\mu = 0$. Alors

$$\mu(S_n^T F = 0) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma(A, \mu, T; F)\sqrt{2\pi n}}. \quad (6.3)$$

Plus généralement, pour une \mathbb{Z}^d -extension ergodique et apériodique, si F est de carré intégrable et d'intégrale nulle, le même calcul donne

$$\mu(S_n^T F = 0) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\det(\text{Cov})}(2\pi n)^{\frac{d}{2}}}, \quad (6.4)$$

où Cov est l'opérateur de covariance dans le théorème central limite associé à F , défini par l'Équation (3.18).

Pour des lois plus diverses (par exemple dans le bassin d'attraction d'une loi de Lévy), la lectrice pourra consulter [3], ou mener elle-même le calcul à partir des données de la Sous-sous-section 3.6.2. Le théorème central limite local est aussi valable pour d'autres systèmes dynamiques, y compris des gaz de Lorentz à horizon fini [214] ou infini [215] et les flots associés [82].

6.2.2 Extensions non apériodiques

Si l'extension est n'est pas apériodique, la situation est plus complexe. Plaçons-nous dans le cadre d'une marche aléatoire de saut X , avec Φ la fonction caractéristique de X . Dans ce cadre, la fonction θ de l'Équation (5.2) est triviale, de même que les projecteurs spectraux de tout élément de $H = \{(\xi, \Phi(\xi)) : \xi \in \mathbb{T}^1, |\Phi(\xi)| = 1\}$. L'Équation (6.2) donne alors

$$\begin{aligned} \mu(S_n^T D = 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} \int_A \mathcal{L}_\xi^n(\mathbf{1}) d\mu d\xi \\ &=_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi(\xi)^n d\xi + o(r(\varepsilon)^n) \right) \sum_{(\xi, \lambda) \in H} \lambda^n. \end{aligned}$$

Soient $N := \text{Card}(H)$ et λ une racine N -ième de l'unité. On obtient finalement

$$\mu(S_n^T F = 0) =_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sigma(X)\sqrt{2\pi n}} + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \right) \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{kn}. \quad (6.5)$$

Or $\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{kn}$ vaut N si N divise n et 0 sinon. Les retours en 0 se font avec une période spécifique, et ont une probabilité accrue d'avvenir lors de ces périodes. Ce phénomène de périodicité est particulièrement clair pour la marche aléatoire simple issue de 0 : elle ne peut revenir en 0 qu'aux temps pairs, et sa probabilité de retour en 0 peut s'évaluer à l'aide du calcul précédent ou, par exemple, de la formule de Stirling.

6.3 Loi du temps passé en [0]

On se replace dans le cadre d'une \mathbb{Z} -extension markovienne ergodique et apériodique $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F , telle que $\int_A F^2 d\mu < +\infty$ et $\int_A F d\mu = 0$.

Soit $f \in \mathbb{L}^1([\mathbb{Z}], \tilde{\mu})$. Que peut-on dire des sommes de Birkhoff $(S_n^{\tilde{T}} f)_{n \geq 0}$?

Par le théorème ergodique de Hopf, $\tilde{\mu}$ -presque partout,

$$S_n^{\tilde{T}} f = \frac{S_n^{\tilde{T}} f}{S_n^{\tilde{T}} \mathbf{1}_{[0]}} S_n^{\tilde{T}} \mathbf{1}_{[0]} \sim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[\mathbb{Z}]} f d\tilde{\mu} \cdot S_n^{\tilde{T}} \mathbf{1}_{[0]}.$$

Si $\int_{[\mathbb{Z}]} f d\tilde{\mu} \neq 0$, il suffit donc de comprendre le cas $f = \mathbf{1}_{[0]}$. Une telle extension étant ergodique et conservative, les sommes de Birkhoff $(S_n^{\tilde{T}} \mathbf{1}_{[0]})_{n \geq 0}$ tendent $\tilde{\mu}$ -presque partout vers $+\infty$.

La Sous-section 6.2 offre une réponse partielle. D'après le théorème central limite local (Théorème 6.3), si l'extension est apériodique,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n^{\tilde{T}} \mathbf{1}_{[0]}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu(S_n^T F = 0) \\ &\sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma(A, \mu, T; F) \sqrt{2\pi k}} \\ &\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma(A, \mu, T; F)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Ce résultat se généralise aux extensions périodiques : les oscillations de la fonction qui à n associe $\mu(S_n^T F = 0)$, apparaissant dans l'Équation (6.5), se compensent quand on les somme.

Cet argument nous indique la vitesse de croissance du temps passé en [0], et donc la bonne renormalisation. Il ne décrit que très partiellement le comportement de ce temps local. En effet, contrairement à ce qu'il se passe dans des systèmes dynamiques probabilisés, le comportement limite de telles sommes sera aléatoire. Fixons une mesure de probabilité de référence, par exemple $\nu := \mu \otimes \delta_0$. Le but est de trouver une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que la suite $(a_n^{-1} S_n^{\tilde{T}} \mathbf{1}_{[0]})_{n \geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire à identifier. Pour cela, suivant D.A. Darling et M. Kac [68], nous pouvons utiliser la *méthode des moments* : pour tout $m \geq 0$, nous allons identifier le comportement asymptotique des moments

$$M_m(n) := \int_A (S_n^{\tilde{T}} \mathbf{1}_{[0]}(x, 0))^m d\mu(x).$$

Le développement de cette somme donne

$$\begin{aligned}
M_m(n) &= \sum_{0 \leq k_1, \dots, k_m \leq n-1} \int_A \mathbf{1}_{[0]} \circ \tilde{T}^{k_1}(x, 0) \cdot \dots \cdot \mathbf{1}_{[0]} \circ \tilde{T}^{k_m}(x, 0) \, d\mu(x) \\
&= m! \sum_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_m \\ \sum_j k_j < n}} \int_A \mathbf{1}_{[0]} \circ \tilde{T}^{k_1}(x, 0) \cdot \dots \cdot \mathbf{1}_{[0]} \circ \tilde{T}^{k_1+ \dots + k_m}(x, 0) \, d\mu(x) + O(M_{m-1}(n)) \\
&= m! \sum_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_m \\ \sum_j k_j < n}} \int_A \tilde{\mathcal{L}}^{k_1}(\mathbf{1}_{[0]}) \tilde{\mathcal{L}}^{k_2}(\dots \tilde{\mathcal{L}}^{k_m}(\mathbf{1}_{[0]}) \dots) \, d\mu(x) + O(M_{m-1}(n)) \\
&= m! \sum_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_m \\ \sum_j k_j < n}} \int_A \mathcal{L}^{k_1}(\mathbf{1}_{\{S_{k_1} F = 0\}}) \mathcal{L}^{k_2}(\dots \mathcal{L}^{k_m}(\mathbf{1}_{\{S_{k_m} F = 0\}}) \dots) \, d\mu(x) + O(M_{m-1}(n)).
\end{aligned}$$

En utilisant des opérateurs de transfert tordus, on montre que [184, Équation (2.14)] :

$$\mathcal{L}^k(\mathbf{1}_{\{S_k F = 0\}} \cdot) = \frac{\mathbf{1} \otimes \mu}{\sigma(A, \mu, T; F) \sqrt{2\pi k}} + o\left(k^{-\frac{1}{2}}\right) =: Q_k^{(0)} + Q_k^{(1)}.$$

Cet énoncé est une forme de mélange en mesure infinie, comme évoqué en Sous-section 2.1. Le terme dominant est alors

$$\begin{aligned}
M_m(n) &\sim_{n \rightarrow +\infty} m! \sum_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_m \\ \sum_j k_j < n}} \int_A Q_{k_1}^{(0)} \circ \dots \circ Q_{k_m}^{(0)}(\mathbf{1}) \, d\mu(x) \\
&= \frac{m!}{(2\pi\sigma^2(A, \mu, T; F))^{\frac{m}{2}}} \sum_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_m \\ \sum_j k_j < n}} \prod_{j=1}^m k_j^{-\frac{1}{2}} \\
&\sim_{n \rightarrow +\infty} m! \left(\frac{n}{2\pi\sigma^2(A, \mu, T; F)} \right)^{\frac{m}{2}} \int_{\substack{0 \leq x_1, \dots, x_m \\ \sum_j x_j \leq 1}} \prod_{j=1}^m x_j^{-\frac{1}{2}} \, dx_1 \dots dx_m \\
&= \left(\frac{n}{2\sigma^2(A, \mu, T; F)} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{m!}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $m \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A \left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\tilde{T}} \mathbf{1}_{[0]}(x, 0) \right)^m \, d\mu(x) = \frac{1}{(2\sigma^2(A, \mu, T; F))^{\frac{m}{2}}} \frac{m!}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}$$

On reconnaîtra immédiatement, bien sûr, $\mathbb{E}(|\mathcal{N}|^m)$, où \mathcal{N} est une variable aléatoire normale centrée de variance $1/\sigma^2(A, \mu, T; F)$. De plus, le critère de Carleman [94, Chapter VII.3, Equation (3.14)] est vérifié pour ces moments, donc la convergence des moments implique la convergence en loi des variables aléatoires.

Un soin additionnel apporté à la décomposition spectrale de l'opérateur de transfert \mathcal{L} permet de se dispenser de l'hypothèse d'apériodicité. Un argument de couplage très général dû à R. Zweimüller [238, Theorem 1] permet d'étendre la convergence à toute mesure de probabilité absolument continue par rapport à $\tilde{\mu}$ (et non seulement à ν) ; on parle de *convergence en loi forte*. On montre ainsi :

Proposition 6.4.

Soit $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une extension markovienne ergodique d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F , telle que $\int_A F^2 d\mu < +\infty$ et $\int_A F d\mu = 0$. Soit $f \in \mathbb{L}^1([\mathbb{Z}], \tilde{\mu})$. Alors, pour toute mesure de probabilité $\nu \ll \tilde{\mu}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\tilde{T}} f = \frac{1}{\sigma(A, \mu, T; F)} \int_{[\mathbb{Z}]} f d\tilde{\mu} \cdot |\mathcal{N}|, \quad (6.6)$$

où la convergence est en loi dans $([\mathbb{Z}], \nu)$ et \mathcal{N} est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

La présence d'une valeur absolue d'une variable aléatoire de loi normale n'est pas surprenante. D'après un théorème de P. Lévy [159], si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien, $(M_t)_{t \geq 0}$ son maximum courant et $(L_t)_{t \geq 0}$ son temps local en 0, alors $(M - B, M) = (|B|, 2L)$ en loi ; de plus, $M_t = 2|B_t|$ en loi pour tout t ; donc $L_t = |B_t|$ en loi pour tout t . Par conséquent, le temps local en 0 au temps t a la loi de la valeur absolue d'une variable aléatoire de loi normale.

Ce théorème n'est pas spécifique aux extensions de systèmes dynamiques Gibbs-Markov. D'une part, du point de vue dynamique, l'argument développé ici nécessite seulement une bonne action spectrale de l'opérateur de transfert, et s'applique donc par exemple au gaz de Lorentz³⁶. On le vérifie numériquement à la Figure 24.

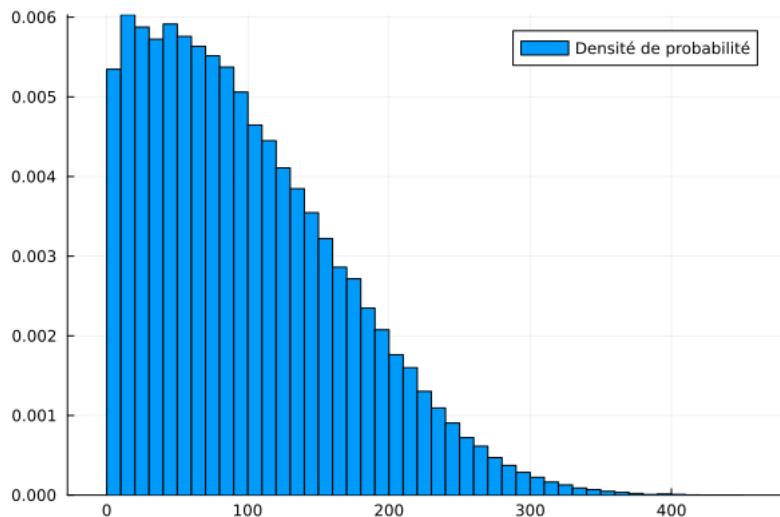


FIGURE 24 – Histogramme du temps passé en $[0]$ par un gaz de Lorentz à horizon fini, après 1 000 itérations. Histogramme obtenu à l'aide de 100 000 trajectoires indépendantes partant de $[0]$ selon la mesure de Liouville. On retrouve la courbe en demi-cloche prédicta par la Proposition 6.4.

D'autre part, ce théorème a des analogues dans le cadre de chaînes de Markov récurrentes nulles dont les temps de retour à un état donné ont des queues à variation régulière [68, Theorem 1] ; pour un énoncé dans le cadre de systèmes dynamiques, on pourra consulter par exemple [1, Theorem 3.6.4]. De ce point de vue, la valeur absolue d'une variable aléatoire de loi normale centrée est un cas particulier de *loi de Mittag-Leffler* :

Définition 6.5 (Loi de Mittag-Leffler).

Soient $\gamma \in [0, 1]$ et X une variable aléatoire réelle positive. On dit que la loi de X est une loi de Mittag-Leffler de paramètre γ si, pour tout $z \in \mathbb{C}$ (ou $z \in B(0, 1)$ si $\gamma = 0$),

$$\mathbb{E}[e^{zX}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(1 + \gamma)^n z^n}{\Gamma(1 + n\gamma)}.$$

36. La construction des tours de Young permet aussi de passer des transformations Gibbs-Markov au gaz de Lorentz.

On retrouve des lois usuelles pour trois paramètres :

- $X \equiv 1$ presque sûrement pour $\gamma = 1$;
- $X = |\mathcal{N}|$ avec \mathcal{N} de loi normale centrée de variance $\pi/2$ pour $\gamma = 1/2$;
- $X = \mathcal{E}$ exponentielle de paramètre 1 pour $\gamma = 0$.

La Proposition 6.4 correspond au paramètre $\gamma = 1/2$. Le paramètre $\gamma = 0$ apparaît pour des \mathbb{Z}^2 -extensions ergodiques dont les sauts sont centrés et de variance finie, ou bien pour des \mathbb{Z} -extensions ergodiques et conservatives dont les sauts sont dans le bassin d'attraction d'une loi de Cauchy. Les paramètres entre 0 et 1/2 apparaissent pour des \mathbb{Z} -extensions dont les sauts sont centrés et dans le bassin d'attraction d'une loi stable de Lévy, déjà évoquées en Sous-sous-section 3.6.2.

La gamme entière de paramètres peut s'obtenir en travaillant non pas avec des extensions mais avec les transformations de Pomeau-Manneville de la Sous-sous-section 2.4.3. Plus précisément, le paramètre γ de la loi de Mittag-Leffler vaut $1/\alpha$, où α est le paramètre de la transformation de Pomeau-Manneville [1, Chapter 4.8].

6.4 Observables d'intégrale nulle, I : Méthode des moments

La limite dans la Proposition 6.4 est dégénérée dès que $\int_{[\mathbb{Z}]} f \, d\tilde{\mu} = 0$. Quelle est la limite dans ce cas ? Cette question a été explorée dès 1955 par R.L. Dobrushin [77, Théorème 2] dans le cadre de la marche aléatoire simple :

Théorème 6.6. [77, Théorème 2]

Soit S_n une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} et $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini et de somme nulle. Posons :

$$\sigma^2(f) := 4 \sum_{j \in \mathbb{Z}} j f^2(j) + 8 \sum_{\substack{j, k \in \mathbb{Z} \\ j < k}} j f(j) f(k) - \sum_{j \in \mathbb{Z}} f^2(j) \geq 0.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \sum_{k=0}^{n-1} f(S_k) = \sigma(f)X,$$

où la convergence est en loi et X est une variable aléatoire dont la loi est de densité

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2t^2} - \frac{t^4}{2}} dt.$$

Ce théorème a ensuite été généralisé, notamment par H. Kesten et Y. Kasahara [132, 133, 135, 144] dans le cadre de chaînes de Markov. On dispose de plus de formes plus fortes de sa conclusion : non seulement la loi limite, mais aussi des principes d'invariance par Y. Kasahara et A.N. Borodin [35, 36, 134], et des lois du logarithme itéré grâce à un très joli argument de couplage dû à E. Csáki et A. Földes [64, 65].

L'objectif du travail de thèse de l'auteur consistait à étendre ce type de résultat à des systèmes dynamiques, au-delà du cadre des processus de Markov. Nous reviendrons en Sous-section 9.3 sur celui-ci. Suite à ce travail de thèse, nous avons avec F. Pène appliqué la méthode des moments à ce problème. La stratégie est donc la même que dans la Sous-section 6.3, mais la combinatoire qui en résulte est nettement plus compliquée. Pour simplifier notre exposition, nous donnons ici un cas particulier de [184, Theorem 1.11].

Théorème 6.7. Corollaire de [184, Theorem 1.11]

Soit $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une extension markovienne ergodique d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F , telle que $\int_A F^2 \, d\mu < +\infty$ et $\int_A F \, d\mu = 0$. Soit $f : [\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $\sup_{p \in \mathbb{Z}} |f(\cdot, p)|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)} < +\infty$.
- Il existe $\varepsilon > 0$ et $q > 2$ tels que $\sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + |p|)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \|f(\cdot, p)\|_{\mathbb{L}^q(A, \mu)} < +\infty$.
- $\int_{[\mathbb{Z}]} f \, d\tilde{\mu} = 0$.

Alors il existe une constante $\sigma^2(f) \geq 0$ telle que, pour toute mesure de probabilité $\nu \ll \tilde{\mu}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} S_n^T f = \frac{\sigma(f)}{\sqrt{\sigma(A, \mu, T; F)}} \sqrt{|\mathcal{N}|} \cdot \mathcal{N}',$$

où la convergence est en loi dans $([\mathbb{Z}], \nu)$, et $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ sont deux variables aléatoires indépendantes de lois normale centrée réduite.

Remarque 6.8 (Variance asymptotique, I).

La constante $\sigma^2(f)$ dans le Théorème 6.7 est simplement donnée par la formule de Green–Kubo, déjà rencontrée à l’Équation (3.16) :

$$\sigma^2(f) = \sigma^2([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T}; f) = \int_{[\mathbb{Z}]} f^2 \, d\tilde{\mu} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[\mathbb{Z}]} f \cdot f \circ \tilde{T}^n \, d\tilde{\mu}.$$

Ceci est démontré dans [184] quand f est constante sur chaque site, et dans [186] dans le cas général.

Esquisse de démonstration du Théorème 6.7.

On utilise la méthode des moments, présentée en démonstration du Théorème 6.3. Cependant, la démonstration devient beaucoup plus technique. Nous nous contenterons à évoquer les principales complications.

Pour commencer, il faut voir ce type de résultat comme un analogue en mesure infinie du théorème central limite, là où le Théorème 6.3 serait un analogue du théorème ergodique de Birkhoff. Or, déjà en mesure finie, le théorème central limite est valable pour des observables f régulières et suffisamment intégrables : nous renvoyons la lectrice au Théorème 3.30. Cela explique qu’il y ait de nouvelles contraintes portant sur la régularité et l’intégrabilité de l’observable f .

Ensuite, le théorème de Hopf n’est plus d’aucune utilité. On ne peut donc pas se ramener à l’étude de la seule fonction $\mathbf{1}_{[0]}$, ce qui aurait simplifié la combinatoire. Supposons pour simplifier que f soit constante sur chaque site $[p]$. En posant

$$M_m(n) := \int_A \left(S_n^T f(x, 0) \right)^m \, d\mu(x),$$

on a donc, pour des constantes $c_{\mathbf{N}} = c_{N_1, \dots, N_q}$ explicites,

$$M_m(n) = \sum_{q=1}^m \sum_{\substack{N_j \geq 1 \\ N_1 + \dots + N_q = m}} c_{\mathbf{N}} \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_q \leq n} \sum_{\mathbf{a} \in (\mathbb{Z}^d)^q} \mathbb{E}_\mu \left[\prod_{j=1}^q \left(f(a_j)^{N_j} \mathbf{1}_{\{S_{n_j}^T F = a_j\}} \right) \right].$$

Dans la démonstration du Théorème 6.7, seules des indicatrices $\mathbf{1}_{\{S_{n_j}^T F = 0\}}$ apparaissaient, desquelles on tirait une famille à un paramètre d’opérateurs Q_k . Dans notre nouveau cadre, on introduit une famille à deux paramètres d’opérateurs

$$Q_{k,a} = Q_{k,a}^{(0)} + Q_{k,a}^{(1)} := \mathcal{L}^k(\mathbf{1}_{\{S_k F = a\}} \cdot),$$

avec $Q_{k,a}^{(0)}$ la restriction au sous-espace propre de valeur propre 1 de \mathcal{L} , et $Q_{k,a}^{(1)}$ un terme d’erreur dont il faut maintenant contrôler la dépendance en a .

Enfin, dans la démonstration du Théorème 6.7, le terme principal correspondait à $q = m$ et $(N_j)_{1 \leq j \leq m} = (1, \dots, 1)$, les autres termes étant négligeables par rapport à celui-ci. Dans notre cadre, ce terme s'annule car f est d'intégrale nulle. Il faut donc aller chercher les termes suivants. La combinatoire est intéressante : la croissance de $M_m(n)$ est en $n^{\frac{m}{2}}$ si m est pair (et plus lente si m est impair), et les termes ayant cette croissance sont des concaténations de blocs :

- $Q_{k,a}^{(0)}$ avec poids $N_j = 2$;
- $Q_{k,a}^{(0)}$ et $Q_{k,a}^{(1)}$ avec poids $N_j = N_{j+1} = 1$.

Le premier type de bloc correspond au terme $\int_{[\mathbb{Z}]} f^2 d\tilde{\mu}$ dans la formule de Green–Kubo, et le second type de bloc au terme $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[\mathbb{Z}]} f \cdot f \circ \tilde{T}^n d\tilde{\mu}$. \square

Remarque 6.9 (Autres \mathbb{Z}^d -extensions).

Comme pour le théorème central limit et le théorème central limite local, le Théorème 6.7 s'étend à des \mathbb{Z}^d -extensions ergodiques et conservatives dont le saut F est dans le bassin d'attraction d'une loi stable de Lévy³⁷.

Dans ce cadre, la renormalisation change ; elle est toujours la racine carrée de la renormalisation du théorème central limite local. La loi limite devient un mélange gaussien par une loi de Mittag-Leffler. Ces lois, appelées Mittag-Leffler Gaussian mixtures (MLGM) dans [184], ou lois de Mittag-Leffler symétriques dans [132], admettent plusieurs caractérisations :

- Ce sont les produits $\sqrt{Y} \cdot \mathcal{N}$, où Y suit une loi de Mittag-Leffler, \mathcal{N} est normale centrée et ces deux variables aléatoires sont indépendantes.
- Leur fonction caractéristique est donnée par

$$\Psi(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c^n \xi^{2n}}{\Gamma(1 + \gamma n)},$$

où $\gamma \in [0, 1]$ et $c > 0$.

Leur densité a enfin une représentation intégrale ; pour $\gamma = 1/2$, elle est donnée dans le Théorème 6.6. L'équivalence de ces différentes caractérisations est un exercice intéressant sur le conditionnement.

Remarque 6.10 (Loi de l'arcsinus).

Le Théorème 6.7 répond à la question des lois limites des sommes de Birkhoff d'observables d'intégrale nulle qui décroissent suffisamment vite à l'infini. On peut la contraster avec la loi de l'arcsinus. Si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien,

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-})(B_s) ds \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} X,$$

où la convergence est en loi, et la loi de X est supportée sur $[-1, 1]$ et de densité $\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}$ sur cet intervalle.

Ce théorème, démontré par P. Lévy [158], se transpose aux \mathbb{Z} -extensions markoviennes, ergodiques, conservatives, et dont les sauts sont dans $\mathbb{L}^q(A, \mu)$ pour un $q > 2$: c'est une conséquence du principe d'invariance faible. Il se généralise aussi à des systèmes non-uniformément hyperboliques [206, 219].

La transition entre le régime du Théorème 6.7 et celui de l'arcsinus, qui comprend des observables d'intégrale nulle ne décroissant pas trop vite à l'infini, est nettement moins bien comprise.

37. Avec, encore une fois, des complications pour la loi de Cauchy.

La méthode des moments a ensuite été adaptée aux gaz de Lorentz [186], par les deux mêmes auteurs. En voyant $f(\cdot, p)$ comme un multiplicateur continu sur un espace de Banach adapté, on peut mener ces calculs sans avoir à supposer que f est constante sur chaque site. Une autre innovation de [186] est de considérer le processus joint $(S_n^{\tilde{T}}f, S_n^{\tilde{T}}g)$ avec f d'intégrale nulle et g d'intégrale non nulle, et de montrer leur indépendance asymptotique.

Mentionnons pour finir les travaux de M. Phalempin [190], qui exploite la méthode des moments pour montrer un principe d'invariance optimal pour ces processus, et même une version plus fine³⁸ pour des équations différentielles bruitées par une \mathbb{Z} -extension [190, Théorème 1.1].

38. Et encore plus difficile à démontrer !

Troisième partie

Transformations induites et théorie du potentiel

Nous faisons maintenant un pas de côté, pour revenir à la théorie ergodique générale. Nous allons discuter plus en détail la notion de système induit, et présenter le rôle-clef joué par un résultat de théorie probabiliste du potentiel : l'*identité de balayage*, qui a été utilisée extensivement dans [226]. Cette théorie est introduite dans le cadre de chaînes de Markov en Section 7 (*Cadre probabiliste*), et de systèmes dynamiques en Section 8 (*Transformations induites*). Enfin, la Section 9 (*Invariants par induction*) revient sur la formule de Green–Kubo et la replace dans le cadre plus général d'invariants par induction.

Cette partie, et en particulier les Sections 8 et 9, portent essentiellement sur le contenu de [185]. La Sous-section 9.3 est à part : elle revient sur les sommes de Birkhoff d'observables d'intégrale nulle, suivant cette fois-ci l'approche de [221, 222].

7 Cadre probabiliste : Chaînes de Markov induites

Avant de revenir vers les systèmes dynamiques, nous allons introduire des éléments de théorie du potentiel dans un cadre probabiliste plus simple, celui des chaînes de Markov stationnaires. Nous adoptons cependant un cadre très large pour étudier ces chaînes de Markov. L'essentiel de cette Section est classique, et peut se trouver par exemple dans [32].

7.1 Chaînes de Markov

De même que la présentation précédente se focalisait sur des systèmes dynamiques à temps discret, nous nous concentrerons ici sur des processus markoviens à temps discret, c'est-à-dire des chaînes de Markov. Les espaces d'états considérés restent généraux.

Définition 7.1 (Chaîne de Markov stationnaire).

Soit A un espace polonais muni d'une mesure σ -finie μ . Une fonction $P : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ définie μ -presque partout est un noyau de transition si, pour tout ensemble mesurable B , la fonction $x \mapsto P_x(B)$ est mesurable. La mesure μ est dite stationnaire si, pour tout $B \subset A$ mesurable,

$$\int_A P_x(B) \, d\mu = \mu(B). \quad (7.1)$$

Étant donnée une mesure de probabilité $\nu \ll \mu$, par le théorème d'extension de Kolmogorov, il existe une chaîne de Markov $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur Ω telle que :

- M_0 soit de loi ν ;
- Pour tout $n \geq 0$ et $B \subset A$,

$$\mathbb{P}(M_{n+1} \in B \mid M_0, \dots, M_n) = P_{M_n}(B).$$

On notera enfin $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ la filtration $\bigvee_{k=0}^n \sigma(M_k)$.

Le noyau de transition P peut aussi être vu comme un opérateur agissant sur divers espaces de fonctions, en particulier les espaces $\mathbb{L}^p(A, \mu)$ avec $p \in [1, \infty]$, par

$$P(f)(x) = \mathbb{E}(f(M_{n+1}) \mid M_n = x).$$

Pour tout $p \in [1, \infty]$, la stationnarité de la mesure μ est équivalente au fait que

$$\int_A P(f) \, d\mu = \int_A f \, d\mu \quad \forall f \in \mathbb{L}^p(A, \mu). \quad (7.2)$$

Si A est fini de cardinal a , la donnée d'un tel opérateur P est équivalente à la donnée d'une matrice $a \times a$ stochastique, c'est-à-dire à coefficients dans $[0, 1]$ et dont la somme de chaque ligne est égale à 1. Dans une telle représentation, que l'on notera abusivement encore P , pour tous $i, j \in A$,

$$P_{ij} = \mathbb{P}(M_1 = j \mid M_0 = i) ;$$

autrement dit, la matrice associée est la représentation matricielle de l'opérateur P dans la base $(\mathbf{1}_i)_{i \in A}$. Si cette matrice est irréductible, le théorème de Perron-Frobenius assure alors que la chaîne de Markov associée admet une unique mesure de probabilité invariante.

Il est possible de définir, dans ce cadre général, des notions d'ergodicité et de récurrence compatibles avec les applications aux systèmes dynamiques qui suivront³⁹.

Définition 7.2 (Chaînes de Markov ergodiques et récurrentes).

Soit (A, μ, P) une chaîne de Markov stationnaire. On dit que cette chaîne est :

- ergodique si tout ensemble $B \subset A$ tel que $P_x(B) = 1$ pour μ -presque tout $x \in B$ est ou bien de mesure pleine, ou bien de mesure nulle.
- récurrente si, pour tout ensemble $B \subset A$ de mesure strictement positive et μ -presque tout $x \in B$, le temps de premier retour en B partant de x est presque sûrement fini :

$$\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : M_n \in B \mid M_0 = x) < +\infty \quad \mu\text{-p.p.}$$

Exemple 7.3.

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure. Posons :

$$P_x := \delta_{T(x)}.$$

Alors, pour tout $B \subset A$ mesurable, la fonction $x \mapsto P_x(B)$ est égale à $\mathbf{1}_{T^{-1}(B)}$. Ansi, P est un noyau de transition car T est mesurable. De plus, pour tout $B \subset A$ mesurable,

$$\int_A P_x(B) \, d\mu = \int_A \mathbf{1}_{T^{-1}(B)} \, d\mu = \mu(T^{-1}(B)) = \mu(B) ;$$

ainsi, la mesure μ est bien stationnaire.

De même, cette chaîne de Markov est récurrente si et seulement si (A, μ, T) l'est. L'ergodicité est plus délicate : cette chaîne de Markov est ergodique si et seulement si (A, μ, T) n'a pas de sous-ensemble stable non trivial, ce qui est une condition plus forte que l'ergodicité du système (A, μ, T) , et équivalente si (A, μ, T) est conservatif⁴⁰ (et en particulier si μ est finie).

Enfin, la notion de chaîne de Markov dual nous permettra de faire le lien avec les opérateurs de transfert.

39. Il y a des précautions à prendre. Le pendant pour les chaînes de Markov de la notion de conservativité est la récurrence. La notion d'ergodicité est plus épineuse, car elle dépend des références : ce que de nombreuses références sur les chaînes de Markov appellent ergodicité correspond plutôt aux notions d'apériodicité ou de mélange.

40. Le système (A, μ, T) n'a pas de sous-ensemble stable non trivial si tout ensemble mesurable B tel que $B \subset T^{-1}(B)$ est ou bien de mesure nulle, ou bien de mesure pleine. En revanche, (A, μ, T) est ergodique si tout ensemble mesurable B tel que $B = T^{-1}(B)$ est ou bien de mesure nulle, ou bien de mesure pleine. La seconde condition est plus faible.

Définition 7.4 (Chaîne de Markov duale).

Soit (A, μ, P) une chaîne de Markov stationnaire. Sa chaîne de Markov duale est la chaîne de Markov dont l'opérateur associé P^* est le dual de P :

$$\int_A P^*(f) \cdot g \, d\mu = \int_A f \cdot P(g) \, d\mu \quad \forall f \in \mathbb{L}^1(A, \mu), \quad \forall g \in \mathbb{L}^\infty(A, \mu). \quad (7.3)$$

La dualité correspond à un renversement de temps. Ainsi, une chaîne de Markov est réversible si et seulement si elle est son propre dual.

Remarque 7.5 (De l'opérateur au noyau de transition).

Un opérateur $P : \mathbb{L}^1(A, \mu) \rightarrow \mathbb{L}^1(A, \mu)$ est associé au noyau de transition d'une chaîne de Markov stationnaire pour une mesure μ si et seulement si

- P préserve μ (Équation (7.2));
- P est positif : $P(f) \geq 0$ si $f \geq 0$.

En particulier, si (A, μ, P) une chaîne de Markov stationnaire, alors P^* est bien l'opérateur associé au noyau de transition d'une chaîne de Markov, et (A, μ, P^*) est stationnaire.

7.2 Probabilités d'atteinte, I : Fonctions harmoniques

L'un des thèmes principaux de ce mémoire est l'étude de *probabilités d'atteinte*. Commençons par un exemple élémentaire. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état fini A . Notons μ sa mesure de probabilité stationnaire et P sa matrice de transition. Soient x, y, z trois points deux à deux distincts de A . Quelle est la probabilité, partant de x , d'atteindre y avant z ?

Par la suite, nous noterons \mathbb{P}_x (respectivement \mathbb{E}_x) la probabilité (respectivement l'espérance) pour la chaîne de Markov partant de $x \in A$.

Définition 7.6 (Temps de première atteinte).

Soit B une partie mesurable de A . Le temps de première atteinte de B de A est la variable aléatoire

$$\tilde{\varphi}_B := \inf \{n \geq 0 : M_n \in B\}, \quad (7.4)$$

qui est un temps d'arrêt.

On fera attention au fait que l'infimum dans la Définition 7.6 est pris sur tout les n positifs, et non seulement strictement positifs comme à l'Équation (7.7). En particulier, $\tilde{\varphi}_B \equiv 0$ sur B .

La question posée revient alors à calculer la probabilité $\mathbb{P}_x(M_{\tilde{\varphi}_{\{y,z\}}} = y)$. On la généralise en calculant la fonction

$$f(x) := \mathbb{P}_x(M_{\tilde{\varphi}_{\{y,z\}}} = y),$$

pour tout $x \in A$. Si $x \notin \{y, z\}$, alors $\tilde{\varphi}_{\{y,z\}} \geq 1$ et

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{P}_x(M_{\tilde{\varphi}} = y) \\ &= \sum_{x' \in A} \mathbb{P}_x(M_1 = x' \text{ et } M_{\tilde{\varphi}_{\{y,z\}}} = y) \\ &= \sum_{x' \in A} \mathbb{P}_x(M_1 = x') \mathbb{P}_{x'}(M_{\tilde{\varphi}_{\{y,z\}}} = y) \\ &= \sum_{x' \in A} P_{xx'} f(x') \\ &= P(f)(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est solution de l'équation

$$\begin{cases} (\text{Id} - P)f(v) = 0 & \text{pour } v \in A \setminus \{y, z\} \\ f(z) = 0, \quad f(y) = 1 \end{cases} . \quad (7.5)$$

Une telle fonction f est harmonique sur $A \setminus \{y, z\}$ pour l'opérateur $(\text{Id} - P)$. Autrement dit, l'Équation (7.5) est une équation de Poisson sur $A \setminus \{y, z\}$ avec conditions au bord de Dirichlet. La chaîne de Markov étant irréductible, par le principe du maximum, toute fonction harmonique sur $A \setminus \{y, z\}$ atteint son maximum (ainsi que son minimum et le maximum de son module) sur $\{y, z\}$. Par conséquent, la différence de deux solutions de l'équation (7.5) est nulle : cette équation admet bien une unique solution.

Introduisons l'opérateur $L \curvearrowright \mathbb{C}^A$ suivant :

$$\begin{cases} Lf(v) = (\text{Id} - P)f(v) & \text{pour } v \in A \setminus \{y, z\} \\ Lf(v) = f(v) & \text{pour } v \in \{y, z\} \end{cases} .$$

Par l'argument justifiant l'unicité des solutions de l'Équation (7.5), l'opérateur L est injectif, donc bijectif. La solution de l'Équation (7.5) est $L^{-1}(1_y)$.

Remarque 7.7 (Mouvement brownien et fonctions harmoniques).

Ce qui précède dépasse de loin les chaînes de Markov à espace d'état fini, et s'applique notamment à des processus stochastiques. Soit U un ouvert bornée du plan à bord régulier [55, Chapter 4.4], et \mathbb{P}_x la loi du mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ partant d'un point $x \in U$ et arrêté au bord de U . Soit $\tilde{\varphi}_{\partial U}$ le temps d'atteinte de ∂U . Soit $g : \partial U \rightarrow \mathbb{C}$ bornée. Alors la fonction $f(x) := \mathbb{E}_x(g(B_{\tilde{\varphi}_{\partial U}}))$ est solution de l'équation de Poisson avec conditions au bord de Dirichlet usuelle :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } U \\ f|_{\partial U} = g \end{cases} . \quad (7.6)$$

Dans le cas des chaînes de Markov, l'opérateur $(\text{Id} - P)$ joue le rôle de l'opérateur⁴¹ $-\Delta$.

Exemple 7.8 (Lancers de pièce, I).

On lance de façon répétée une pièce non biaisée. Quelle est la probabilité d'observer trois lancers **Pile** d'affilée avant d'observer une alternance **Pile-Face-Pile** ?

Choisissons $A = \{\mathbf{FF}, \mathbf{PF}, \mathbf{FFP}, \mathbf{FPP}, \mathbf{PFP}, \mathbf{PPP}\}$. Un état correspond aux deux ou trois derniers lancers observés, et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

On peut supposer⁴² qu'au début de l'expérience aléatoire, on part de $x = \mathbf{FF}$, et on cherche à calculer la probabilité d'atteindre **PPP** avant **PFP**.

41. Avec les conventions issues de la physique : $\Delta f = \sum_i \partial_{ii}^2 f$.

42. Car, si l'on veut obtenir **PPP** ou **PFP**, il est équivalent de dire que l'on n'a encore rien tiré ou que l'on vient de tirer deux fois **Face**.

Par ce qui précède, on cherche donc l'unique solution $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation

$$\begin{cases} (\text{Id} - P)f(v) = 0 & \text{pour } v \in \{\mathbf{FF}, \mathbf{PF}, \mathbf{FP}, \mathbf{PP}\} \\ f(\mathbf{PFP}) = 0, & f(\mathbf{PPP}) = 1 \end{cases}.$$

La méthode de résolution ci-dessus donne $f = (2/5, 1/5, 2/5, 3/5, 0, 1)$. La probabilité recherchée est donc $f(\mathbf{FF}) = 2/5$.

Exercice 7.9.

Le temps d'atteinte n'est pas la seule variable aléatoire d'intérêt à satisfaire une équation de Poisson. Plaçons-nous dans le cadre de l'Exemple 7.8.

- Écrivez une équation satisfaite par $f(x) := \mathbb{E}_x(\tilde{\varphi}_{\mathbf{PFP}})$. Déduisez-en le temps moyen pour voir apparaître la suite de lancers **Pile-Face-Pile**.
- Écrivez une équation satisfaite par $f(x, z) := \mathbb{E}_x(e^{z\tilde{\varphi}_{\mathbf{PFP}}})$. Que peut-on en déduire sur la loi du temps d'atteinte de la suite de lancers **Pile-Face-Pile** ?

7.3 Probabilités d'atteinte, II : Premier retour

Les techniques présentées en Partie 7.3 doivent être modifiées quand l'on cherche à calculer non pas un temps de première atteinte $\tilde{\varphi}$, mais un *temps de premier retour*

$$\varphi_B := \inf \{n \geq 1 : M_n \in B\}, \quad (7.7)$$

où $B \subset A$, déjà mentionné dans un cadre dynamique en Sous-sous-section 2.4.3. Remarquons que la seule différence avec le temps de première atteinte est que l'on ne considère que les temps strictement positifs, c'est-à-dire que la chaîne de Markov doit avoir fait au moins un pas. En particulier, $\tilde{\varphi}_B$ et φ_B coïncident hors de B .

Une première approche consiste simplement à faire un premier pas, puis à appliquer la théorie développée pour les temps de première atteinte.

Exemple 7.10 (Lancers de pièce, II).

Continuons avec l'Exemple 7.8. Supposons que l'on vient juste de lancer trois **Pile** d'affilée. Quelle est la probabilité d'observer de nouveau trois lancers **Pile** d'affilée⁴³ avant d'observer une alternance **Pile-Face-Pile** ?

Dans l'espace décrit dans l'Exemple 7.8 et partant de l'état **PPP**, le vecteur probabilité des états possibles après un lancer est $\mu_{\mathbf{PPP}} := (0, 1/2, 0, 0, 0, 1/2)$. On reprend la fonction f calculée dans l'Exemple 7.8. La probabilité recherchée est alors

$$\mu_{\mathbf{PPP}}(f) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{5}.$$

Nous allons maintenant décrire une autre technique proche. Avant toutes choses, il nous faut introduire la notion *chaîne de Markov induite*, ce que nous faisons dans un cadre général.

Définition 7.11 (Chaîne de Markov induite).

Soit (A, μ, P) une chaîne de Markov stationnaire et récurrente. Soit $B \subset A$ de mesure strictement positive. Remarquons que, par la définition de la récurrence, $\mathbb{P}_x(\varphi_B < +\infty) = 1$ pour μ -presque tout $x \in B$. Le noyau de transition induit sur B est

$$P_x^B(C) := \mathbb{P}_x(M_{\varphi_B} \in C),$$

pour tout $C \subset B$ mesurable.

43. Attention : si le prochain lancer est un **Pile**, cette condition sera satisfaite !

Le calcul des probabilités recherchées est alors équivalent au calcul de P^B . Comme nous le verrons plus tard, sous l'hypothèse de récurrence, la mesure $\mu|_B$ est stationnaire pour P^B (Proposition 8.5 ou, dans un cadre dynamique, un lemme de S. Kakutani [131, Lemme 2]). Remarquons que, si P est ergodique pour μ , alors P^B est ergodique pour $\mu|_B$.

On peut définir plus généralement le temps de n -ième retour $\varphi_B^{(n)}$ en B . Le processus $(M_n)_{n \geq 0}$ partant d'un point $x \in B$ générique pour μ reviendra une infinité de fois en B . Par la loi de Markov forte, le processus

$$M_n^B := M_{\varphi_B^{(n)}}$$

est une chaîne de Markov sur B , dont le noyau de transition est P^B .

Exemple 7.12 (Lancers de pièce, III).

Illustrons ces idées dans le cadre de l'Exemple 7.10. La chaîne de Markov induite sur $B = \{\mathbf{PFP}, \mathbf{PPP}\}$ a pour noyau de transition

$$P^{\{\mathbf{PFP}, \mathbf{PPP}\}} = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\mu(\mathbf{PFP}) = \mu(\mathbf{PPP})$: il s'agit d'une manifestation du fait que ces deux suites ont la même fréquence théorique dans une suite de lancers de pile ou face. Par conséquent, $\mu|_B(\mathbf{PFP}) = \mu|_B(\mathbf{PPP})$. Cela, ajouté au fait que la matrice $P^{\{\mathbf{PFP}, \mathbf{PPP}\}}$ est stochastique, constraint la matrice $P^{\{\mathbf{PFP}, \mathbf{PPP}\}}$ à être symétrique, ce que l'on observe.

Dans cet exemple, à une suite de lancers \mathbf{PPPP} correspond une transition de \mathbf{PPP} vers \mathbf{PPP} dans le système induit, alors qu'une suite $\mathbf{PPPF PPP FP}$ induit une transition de \mathbf{PPP} vers \mathbf{PFP} .

Revenons au calcul de P^B . Soit $g : B \rightarrow \mathbb{C}$; nous notons $g\mathbf{1}_B$ l'extension de g à A telle que $g \equiv 0$ sur $A \setminus B$. Soit f la solution de l'équation de Poisson avec condition au bord de Dirichlet :

$$\begin{cases} (\text{Id} - P)f(v) = 0 & \text{pour } v \in A \setminus B \\ f(v) = g(v) & \text{pour } v \in B \end{cases}.$$

Alors

$$P^B(g) = P^B(f)|_B = P(f)|_B = (f - (\text{Id} - P)(f))|_B = g - (\text{Id} - P)(f)|_B,$$

où la seconde égalité peut se justifier à l'aide d'un argument de martingale que l'on retrouvera dans la démonstration de la Proposition 7.13. En d'autres termes,

$$(\text{Id} - P^B)(f|_B) = (\text{Id} - P)(f)|_B.$$

Cette identité, classique en théorie probabiliste du potentiel, s'appelle l'*identité de balayage*. Une version peut être trouvée dans [199, Corollaire 1.11]. Nous citons ici une version plus générale [185, Proposition 2.4].

Proposition 7.13 (Identité de balayage).

Soit (A, μ, P) une chaîne de Markov munie d'une mesure stationnaire récurrente σ -finie. Soit $B \subset A$ mesurable tel que $0 < \mu(B) \leq +\infty$. Soient $f \in \mathbb{L}^\infty(A, \mu)$ et $g \in \mathbb{L}^\infty(B, \mu|_B)$. Si :

$$(\text{Id} - P)(f) = g\mathbf{1}_B,$$

alors :

$$(\text{Id} - P^B)(f|_B) = g.$$

Démonstration.

Soit $x \in B$ générique pour la mesure $\mu|_B$, et $(M_n)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov issue de x . Notons $(M_n^B)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov induite sur B par $(M_n)_{n \geq 0}$. Alors φ_B est un temps d'arrêt presque sûrement fini. De plus, le processus $(f(M_{n \wedge \varphi_B}))_{n \geq 1}$ est une martingale car $f = P(f)$ sur $A \setminus B$, est bornée, et converge presque sûrement vers $f(M_{\varphi_B}) = f(M_1^B)$. Par le théorème de convergence des martingales,

$$f(x) - g(x) = P(f)(x) = \mathbb{E}_x(f(M_1)) = \mathbb{E}_x(f(M_1^B)) = P^B(f|_B)(x) = P^B(g)(x). \quad \square$$

Revenons au cas d'espaces d'états finis, et supposons de plus que μ est ergodique. Alors la décomposition

$$\mathbb{C}^A = \text{Vect}(\mathbf{1}) \oplus \text{Ker}(\text{Id} - P)$$

est P -invariante. De plus, $\mu|_B$ est alors stationnaire et ergodique pour la chaîne de Markov induite, de telle sorte que l'on dispose aussi d'une décomposition P^B -invariante $\mathbb{C}^B = \text{Vect}(\mathbf{1}) \oplus \text{Ker}(\text{Id} - P^B)$.

Si $(\text{Id} - P)(f) = g\mathbf{1}_B$, alors

$$\int_A (g\mathbf{1}_B) \, d\mu = \int_A (\text{Id} - P)(f) \, d\mu = 0.$$

L'équation $(\text{Id} - P)(f) = g\mathbf{1}_B$ ne peut donc avoir de solution que si g est d'intégrale nulle.

Fixons une fonction $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ d'intégrale nulle. Notons $f = (\text{Id} - P)|_{\text{Ker}(\mu)}^{-1}(g\mathbf{1}_B)$ l'unique solution qui est elle-même d'intégrale nulle. Par l'équation de balayage, $(\text{Id} - P^B)(f|_B) = g$. Cependant, $f|_B$ n'est en général pas d'intégrale nulle pour $\mu|_B$; il faut projeter cette fonction parallèlement⁴⁴ aux constantes pour obtenir $(\text{Id} - P^B)|_{\text{Ker}(\mu|_B)}^{-1}(g)$.

On peut ainsi calculer $(\text{Id} - P^B)|_{\text{Ker}(\mu|_B)}^{-1}$. Il suffit d'inverser l'opérateur obtenu pour retrouver $(\text{Id} - P^B)|_{\text{Ker}(\mu|_B)}$, puis de là P^B .

Exemple 7.14 (Lancers de pièce, IV).

Revenons une dernière fois à l'Exemple 7.10. La mesure de probabilité invariante μ associée à P est telle que $\mu(\mathbf{PFP}) = \mu(\mathbf{PPP})$. En particulier, l'espace des fonctions d'intégrale nulle sur $B = \{\mathbf{PFP}, \mathbf{PPP}\}$ est engendré par $g = \mathbf{1}_{\mathbf{PPP}} - \mathbf{1}_{\mathbf{PFP}}$.

Une fonction f solution de l'équation $(\text{Id} - P)(f) = g\mathbf{1}_B$ est

$$f = \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}\right).$$

Par conséquent, en projetant f sur $\text{Ker}(\mu|_B)$ parallèlement aux constantes, $(\text{Id} - P^B)|_{\text{Ker}(\mu|_B)}^{-1}(g) = (-5/4, 5/4) = \frac{5}{4}g$, et donc $P^B|_{\text{Ker}(\mu|_B)} = \frac{1}{5} \text{Id}|_{\text{Ker}(\mu|_B)}$. On retrouve ensuite la matrice calculée dans l'Exemple 7.12.

Remarque 7.15 (Intégration contre des fonctions d'intégrale nulle).

Une solution pour éviter les problèmes de projection parallèlement aux constantes consiste à intégrer contre des fonctions d'intégrale nulle. Plus précisément, si $g, h : B \rightarrow \mathbb{C}$ sont d'intégrale nulle, alors

$$\int_A (\text{Id} - P)^{-1}(g\mathbf{1}_B) \cdot (h\mathbf{1}_B) \, d\mu = \int_B (\text{Id} - P^B)^{-1}(g) \cdot h \, d\mu,$$

44. Un autre point de vue est que les solutions f de l'équation $(\text{Id} - P)(f) = g\mathbf{1}_B$ sont définies à constante près, et que le choix de la solution d'intégrale nulle correspond à un choix de jauge. Cependant, la jauge change quand l'on passe du système initial au système induit. Cette subtilité a valu plusieurs fois à l'auteur de ces lignes de perdre des heures à la recherche d'erreurs de calcul.

aucune de ces intégrales ne dépendant du choix d'une constante dans la définition des opérateurs $(\text{Id} - P)^{-1}$ et $(\text{Id} - P^B)^{-1}$. Cette formulation aura par la suite l'avantage supplémentaire, dans des cas où μ est infinie, de contourner des problèmes de convergence dans le calcul de $(\text{Id} - P)^{-1}(g\mathbf{1}_B)$.

8 Transformations induites

Nous revenons maintenant sur la notion de transformation induite. Suivant [185], nous chercherons à explorer les conséquences de l'identité de balayage (Proposition 7.13).

8.1 Définition

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure et conservatif, où μ est σ -finie.

Définition 8.1 (Transformation induite).

Soit $B \subset A$ tel que $\mu(B) > 0$. De façon analogue aux chaînes de Markov, on peut définir le temps de premier retour en B par

$$\varphi_B(x) := \inf\{n \geq 1 : T^n(x) \in B\}.$$

Le système dynamique (A, μ, T) étant supposé conservatif, $\varphi_B < +\infty$ presque partout dans B . La transformation induite sur B est

$$T_B : \begin{cases} B & \rightarrow B \\ x & \mapsto T^{\varphi_B(x)}(x) \end{cases}, \quad (8.1)$$

qui est bien définie pour μ -presque tout point de B .

On notera de plus \mathcal{L}_B l'opérateur de transfert associé au système dynamique $(B, \mu|_B, T_B)$.

Dans le cadre de ce mémoire, les transformations induites ont deux grandes utilisations, mentionnées en Partie 2.4. La première est, dans le cas des flots⁴⁵, de passer d'une action d'un flot à l'action d'une transformation, et au passage de diminuer la dimension de 1. On parle alors de *section de Poincaré*, suite aux travaux de celui-ci [192, 193]. La direction du flot est toujours neutre ; une section de Poincaré peut permettre de retrouver un système uniformément hyperbolique. Par exemple :

- Pour un flot d'Anosov ou Axiome A (par exemple, le flot géodésique sur des variétés compactes en courbure sectionnelle négative), les codages de R. Bowen [37] et M. Ratner [197] mentionnés en Partie 2.4.2 permettent de se ramener à des sous-décalages de type fini.
- Pour un billard de Sinaï, mentionné en Partie 2.4.5, l'*application collision* permet de se ramener à une transformation (discontinue) d'un espace de dimension 2, munie de champs de cônes stables et instables [53]. Un tel système est représenté à la Figure 25.

La seconde grande application est l'étude de systèmes dynamiques *non-uniformément hyperboliques*, mentionnés en Sous-sous-section 2.4.3. Dans ce cadre, le système initial mélange lentement (typiquement, polynomialement). L'induction permet de retrouver un système uniformément hyperbolique, et de là utiliser par exemple des outils spectraux. Le même raisonnement justifie l'utilisation de systèmes induits dans le cadre de \mathbb{Z}^d -extensions : les trajectoires passant beaucoup de temps loin de l'origine sont analogues aux trajectoires passant près des points fixes neutres dans le cadre de systèmes non-uniformément hyperboliques, en ce qu'elles ralentissent la dynamique. L'induction permet de retrouver des systèmes uniformément hyperboliques.

Profitons-en pour définir le temps local en une partie $B \subset A$, rencontré dans un cadre restreint en Sous-section 6.1.

45. Donc un cadre différent de la Section 7. Les résultats présentés s'adaptent à ce cadre.

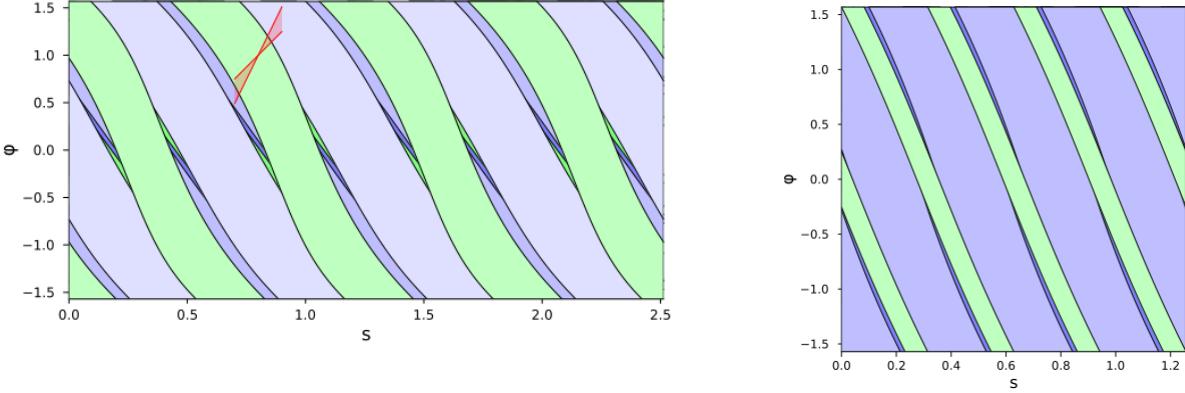


FIGURE 25 – Espace des phases de l’application collision du billard de Sinaï de la Figure 10. Ce billard sur le tore de côté unité a deux obstacles de rayons respectifs 0,4 (rectangle de gauche) et 0,2 (rectangle de droite). L’abscisse s est la coordonnée curviligne le long du bord du disque, et l’ordonnée φ est l’angle du vecteur post-collision à la normale. En bleu : les domaines de continuité correspondant à un saut vers le grand obstacle. En vert : les domaines de continuité correspondant à un saut vers le petit obstacle. En rouge : un cône instable dans l’espace tangent, suivant [53].

Définition 8.2.

Soit (A, T) un système dynamique et $B \subset A$. Le temps local en B est le processus

$$L_{B,n}(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_B(T^k(x)) = \text{Card}\{0 \leq k \leq n-1 : T^k(x) \in B\}. \quad (8.2)$$

8.2 Identité de balayage pour l’opérateur de Koopman

Comme mentionné dans l’Exemple 7.3, tout système déterministe est un système aléatoire d’un type particulier. À une transformation $A \rightarrow A$ on associe un noyau markovien

$$x \mapsto \delta_{T(x)}.$$

L’opérateur markovien associé n’est autre que l’*opérateur de Koopman* que nous avons introduit en Sous-section 3.1. En effet, pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^\infty(A, \mu)$,

$$T(f)(x) = \mathbb{E}(f(M_1) \mid M_0 = x) = \mathbb{E}(f(T(M_0)) \mid M_0 = x) = f(T(x)).$$

Dans ce cas particulier, l’identité de balayage devient :

Proposition 8.3 (Identité de balayage pour l’opérateur de Koopman).

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure et conservatif. Supposons que μ est σ -finie. Soit $B \subset A$ mesurable tel que $0 < \mu(B) \leq +\infty$. Soient $f \in \mathbb{L}^\infty(A, \mu)$ et $g \in \mathbb{L}^\infty(B, \mu|_B)$. Si :

$$f - f \circ T = g \mathbf{1}_B,$$

alors :

$$f|_B - f|_B \circ T^B = g.$$

Cette proposition est en fait très simple à démontrer sans utiliser le vocabulaire des chaînes de Markov et sans hypothèses d'intégrabilité sur les fonctions g et f . Si $f - f \circ T = g\mathbf{1}_B$, alors par récurrence, pour tout $x \in B$ et tout $n \leq \varphi_B(x)$,

$$f \circ T^n(x) = f(x) - g(x),$$

d'où l'égalité souhaitée en choisissant $n = \varphi_B(x)$.

Cette identité est de plus passablement inutile. Le raisonnement utilisé en Partie 7.3 demande de fixer une fonction g d'intégrale nulle sur B , et de résoudre l'équation

$$f - f \circ T = g\mathbf{1}_B.$$

Par définition, cette équation n'a de solution⁴⁶ que si g est un cobord. Cependant, dans des systèmes hyperboliques, peu de fonctions régulières sont des cobords. Ainsi, d'après le théorème de Livšic [165, 166], une fonction höldérienne $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur l'espace d'états d'une transformation Anosov, ou bien sur un sous-décalage de type fini, est un cobord si et seulement si sa moyenne sur chaque orbite périodique est nulle. L'équation de cobord a alors un nombre dénombrable d'obstructions ; si la fonction g est choisie arbitrairement, il y a peu de chances pour que cette équation de cobord puisse être résolue.

8.3 Identité de balayage pour l'opérateur de transfert

Si l'opérateur de Koopman ne permet pas d'exploiter utilement la version de l'identité de balayage proposée, l'opérateur de transfert se révèle plus fertile. Partons de l'observation suivante :

Remarque 8.4 (Opérateur de transfert).

L'opérateur de transfert associé à un système dynamique préservant la mesure (A, μ, T) est l'opérateur dual de l'opérateur de Koopman au sens des chaînes de Markov. On peut s'en convaincre en comparant la définition de l'opérateur de transfert et celle de l'opérateur markovien dual (Définitions 3.3 et 7.4 respectivement). Si T a un nombre dénombrable de branches, on peut écrire explicitement son noyau de transition

$$\mathcal{L}_x = \sum_{y \in T^{-1}(\{x\})} g(y)\delta_y,$$

où g est l'inverse du jacobien de T par rapport à la mesure μ .

Nous pouvons alors appliquer l'identité de balayage à l'opérateur de transfert. La version suivante est issue de [185, Proposition 0.1].

Proposition 8.5 (Identité de balayage pour l'opérateur de transfert).

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure et conservatif. Supposons que μ est σ -finie. Soit $B \subset A$ mesurable tel que $0 < \mu(B) \leq +\infty$. Soient $p \in [1, \infty]$, $f \in \mathbb{L}^p(A, \mu)$ et $g \in \mathbb{L}^p(B, \mu|_B)$. Si :

$$(\text{Id} - \mathcal{L})(f) = g\mathbf{1}_B, \tag{8.3}$$

alors :

$$(\text{Id} - \mathcal{L}_B)(f|_B) = g. \tag{8.4}$$

46. Ou, en tous cas, une solution qui est une fonction. Il peut être utile de considérer des équations de cobord dans des espaces de distributions. À ce sujet, nous renvoyons en particulier au travail initié par G. Forni [90, 95, 96].

Par conséquent, si l'on sait inverser $(\text{Id} - \mathcal{L})$ “globalement” (c'est-à-dire sur un espace de Banach bien choisi de fonctions sur A), on sait inverser les opérateurs $(\text{Id} - \mathcal{L}_B)$ définis “localement”.

Nous fournissons une démonstration condensée de la Proposition 8.5 dans le cas où $p = \infty$ et $\mu(B) < +\infty$.

Démonstration.

Soient $f \in \mathbb{L}^\infty(A, \mu)$ et $g \in \mathbb{L}^\infty(B, \mu|_B)$ telles que $(\text{Id} - \mathcal{L})(f) = g\mathbf{1}_B$. On pose, pour tout $n \geq 1$,

- $A_n := \{\varphi_B = n\}$;
- $B_n := A_n \cap B$;
- $C_n := A_n \cap B^c = A_n \setminus B_n$.

Soit $h \in \mathbb{L}^1(A, \mu)$. Alors, grâce à l'Équation (8.3), on montre par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_B f \cdot h \, d\mu &= \int_B g \cdot h \, d\mu + \sum_{k=1}^n \int_{B_k} f \cdot h \circ T^k \, d\mu + \int_{C_n} f \cdot h \circ T^n \, d\mu \\ &= \int_B g \cdot h \, d\mu + \int_B \mathbf{1}_{\{\varphi_B \leq n\}} f \cdot h \circ T_B \, d\mu + \int_{C_n} f \cdot h \circ T^n \, d\mu. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Remarquons que $f = \mathbf{1}_A$, $g = \mathbf{0}_B$ vérifient l'Équation (8.3). En choisissant $h = \mathbf{1}_B$ dans l'Équation (8.5), on trouve :

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^n \mu(B_k) + \mu(C_n),$$

et donc $\mu(C_n) = \mu(B \cap \{\varphi_B > n\})$. Par récurrence, $\varphi_B < +\infty$ presque partout sur B , et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_n) = 0$.

Revenons au cas général. Comme μ est T -invariante, la famille de fonctions $(|h| \circ T^n)_{n \geq 0}$ est uniformément intégrable, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{C_n} f \cdot h \circ T^n \, d\mu = 0.$$

En prenant la limite dans l'Équation (8.5), on obtient alors

$$\int_B f \cdot h \, d\mu = \int_B g \cdot h \, d\mu + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B \mathbf{1}_{\{\varphi_B \leq n\}} f \cdot h \circ T_B \, d\mu. \quad (8.6)$$

En reprenant $f = \mathbf{1}_A$, $g = \mathbf{0}_B$ et h positive, le théorème de convergence monotone assure que $f \cdot h \circ T_B$ est intégrable sur B . Par le théorème de convergence dominée, on obtient enfin

$$\int_B f \cdot h \, d\mu = \int_B g \cdot h \, d\mu + \int_B f \cdot h \circ T_B \, d\mu.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction h intégrable, on retrouve l'Équation (8.4). \square

La Proposition 8.5 généralise le lemme classique, vraisemblablement dû à S. Kakutani [131, Lemme 2], qui affirme que, si (A, μ, T) est un système dynamique préservant la mesure et conservatif et $0 < \mu(B) < +\infty$, alors T_B préserve $\mu|_B$. En effet, si l'on choisit $f = \mathbf{1}_A$ et $g = \mathbf{0}_B$, alors $(\text{Id} - \mathcal{L})(f) = g$; c'est une traduction du fait que $\mathcal{L}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A$, synonyme du fait que T préserve μ . La proposition fournie permet alors de conclure que $\mathcal{L}_B(\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_B$, donc que T_B préserve $\mu|_B$.

D'autres généralisations, non triviales, ont consisté à étendre cette proposition au cas où $\mu(B) = +\infty$, ainsi qu'à des équations de Poisson tordues (du type $(\text{Id} - z\mathcal{L})(f) = g$).

La Proposition 8.5 peut sembler, au premier abord, être une application directe de l'identité de balayage introduite précédemment. Cependant, pour pouvoir appliquer la Proposition 7.13, il faut que la chaîne de Markov stationnaire en jeu soit récurrente ! Il faut donc montrer que, si T est récurrente, alors \mathcal{L} l'est aussi. On peut montrer, plus généralement [185, Lemme 2.1] :

Lemme 8.6.

Soit (A, μ, P) une chaîne de Markov stationnaire. Si μ est récurrente pour P , alors μ est récurrente pour P^ .*

De façon intéressante, la démonstration du Lemme 8.6 est très similaire à celle du lemme de S. Kakutani évoqué ci-dessus. Le cœur de la démonstration du lemme de Kakutani consiste donc à montrer que la chaîne de Markov de noyau de transition \mathcal{L} est récurrente.

8.4 Pour aller plus loin : Induction probabiliste

Le processus d'induction d'un système dynamique présenté dans cette Section est très puissant : il permet de passer d'un flot à une transformation en diminuant la dimension de l'espace des phases, d'une dynamique non-uniformément hyperbolique à une dynamique uniformément hyperbolique, ou encore d'un système préservant une mesure infinie à un système préservant une mesure de probabilité.

Ce processus est cependant très brutal. Si l'on induit sur une partie B de l'espace des phases, on peut en général trouver des paires de trajectoires proches telles que l'une passe la première fois dans B à un temps donné, tandis que l'autre passer juste en-dehors de B au même instant. Cela a pour conséquence qu'en général, le temps de premier retour φ_B et la transformation T_B sont non continues. Cette perte de régularité fait qu'on utilisera plutôt une structure métrique pour la transformation induite (par exemple associée à un codage markovien), là où le système initial a souvent une structure lisse.

Il est possible de ruser pour que ces discontinuités soient dans le bord de B ; c'est le cas pour les transformations de Pomeau-Manneville (induites sur $(1/2, 1]$) ou les sections construites par Bowen et Ratner pour les flots d'Anosov et Axiome A [37, 197]. Cependant, ces constructions sont rigides, et dépendent de façon peu évidente de la transformation.

Un projet prometteur est de travailler avec une forme d'*induction probabiliste*, plus flexible et qui conserve une éventuelle structure lisse sur l'espace des phases. L'idée est de se donner une fonction de poids $w : A \rightarrow [0, 1]$, et d'arrêter la trajectoire $(T^k(x))_{k \geq 0}$ au temps n avec probabilité $w(T^k(x))$ (conditionnellement au passé). Si la dynamique initiale préserve μ , alors la dynamique aléatoire ainsi obtenue préserve $w \, d\mu$.

En choisissant $w := \mathbf{1}_B$, on retrouve le processus d'induction habituel. En choisissant w de classe \mathcal{C}^k , on peut espérer que l'action de l'opérateur de transfert⁴⁷ sur un bon espace de Banach⁴⁸ soit quasi-compacte. On peut alors travailler à la fois avec des transformations induites et des espaces de fonctions lisses, tout en évitant la rigidité des constructions habituelles.

Dans le cas des transformations non-uniformément dilatantes du cercle, ceci est l'objet d'un projet commun avec D. Coates et A. Korepanov. Les promesses semblent tenues ; les coûts à payer étant la manipulation de chaînes de Markov, une complexité accrue des opérateurs de transfert, et surtout une perte partielle de la propriété de distorsion höldérienne de la Sous-section 2.2.

À plus long terme, il serait intéressant d'explorer la viabilité de cette outil pour des transformations inversibles, et en particulier d'y incorporer des espaces de Banach anisotropes comme en Sous-sous-section 3.4.5.

47. Associé, par exemple, à $w \, d\text{Leb}$.

48. Par exemple, celui des fonctions \mathcal{C}^{k-1} sur $\text{Supp}(w)$.

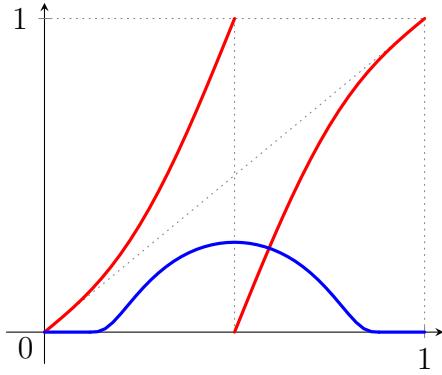


FIGURE 26 – En rouge : la transformation $x \mapsto \left(2x - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}\right)$ [1] du cercle, lisse, ayant 0 comme point fixe neutre. En bleu : un choix possible de poids w .

9 Invariants par induction

Pour finir le Chapitre III, revenons sur l'article [185]. Celui-ci avait deux objectifs. Le premier était d'introduire les énoncés nécessaires à l'utilisation de la théorie probabiliste du potentiel dans le cadre de systèmes dynamiques hyperboliques. Cela inclut l'identité de balayage (Proposition 8.5), mais aussi des variantes sur celle-ci qui seront utilisées par la suite, telles qu'une identité de balayage pour des équations de Poisson tordues ([185, Lemme 1.7], que l'on reverra en Sous-section 11.3), ainsi que d'autres énoncés généraux : principe du maximum et extension de solutions de l'équation de Poisson.

Le second objectif était d'étudier certains *invariants par induction*, c'est-à-dire de quantités qui restent invariantes lors du processus d'induction d'un système dynamique. La première de ces quantités est l'intégrale, et l'énoncé correspondant est une généralisation bien connue de la *formule de Kac*.

9.1 Lemme de Kac

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure et conservatif. Soit $B \subset A$ de mesure finie non nulle⁴⁹. Pour toute fonction $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, on définit la *somme de f le long d'une excursion* par :

$$\Sigma_B(f)(x) := \sum_{n=0}^{\varphi_B(x)-1} f(T^n(x)) \quad \forall x \in B. \quad (9.1)$$

Alors l'intégrale de $\Sigma_B(f)$ est la même que celle de f :

Lemme 9.1 (Lemme de Kac).

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure, ergodique et conservatif. Soit $B \subset A$ tel que $0 < \mu(B) < +\infty$. Alors, pour toute fonction $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ positive ou intégrable :

$$\int_A f \, d\mu = \int_B \Sigma_B(f) \, d\mu.$$

Le lemme de Kac *stricto sensu* est le cas particulier $f \equiv 1$ de ce lemme :

49. L'extension du Lemme de Kac au cas $\mu(B) = +\infty$ est vraisemblable, mais demanderait des manipulations plus sophistiquées, comme dans la démonstration de [185, Proposition 0.1]. Nous la laissons à l'état de conjecture.

Lemme 9.2. [129, Theorem 2']

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure, ergodique et conservatif. Soit $B \subset A$ tel que $0 < \mu(B) < +\infty$. Alors,

$$\mu(A) = \int_B \varphi_B \, d\mu.$$

Le Lemme 9.1 admet plusieurs démonstrations. Une première repose sur des manipulations de nature algébrique.

Première démonstration du Lemme 9.1.

Supposons dans un premier temps f intégrable. On reprend les notations de la démonstration de la Proposition 8.5. Pour tout $n \geq 1$, rappelons que l'on a défini $B_n = \{\varphi_B = n\} \cap B$ et $C_n = \{\varphi_B = n\} \cap B^c$. En particulier, $T^{-1}(C_n) = B_{n+1} \sqcup C_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. La mesure μ étant T -invariante,

$$\int_{C_n} f \, d\mu = \int_{B_{n+1}} f \circ T \, d\mu + \int_{C_{n+1}} f \circ T \, d\mu.$$

Comme pour obtenir l'Équation (8.5), on itère cette relation. Ensuite, par passage à la limite (valide car $(f \circ T^n)_{n \geq 0}$ est uniformément intégrable et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_n) = 0$),

$$\int_{C_n} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_{n+k}} f \circ T^k \, d\mu.$$

En sommant sur n , on obtient

$$\int_{\bigsqcup_{n \geq 1} C_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_{n+k}} f \circ T^k \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{B_n} S_n^T f \, d\mu = \int_B (\Sigma_B(f) - f) \, d\mu.$$

La seconde égalité demande une interversion de sommes infinies. On peut dominer l'intégrande par $|f| \circ T^k$ et effectuer le même raisonnement pour $|f|$, ce qui conduit à la majoration

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \int_{B_{n+k}} f \circ T^k \, d\mu \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_{n+k}} |f \circ T^k| \, d\mu = \int_{\bigsqcup_{n \geq 1} C_n} |f| \, d\mu \leq \|f\|_{\mathbb{L}^1(A, \mu)},$$

et justifie l'interversion.

L'ensemble $B \cup \bigsqcup_{n \geq 1} C_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ est T -invariant et contient B , donc est A tout entier (modulo μ) par ergodicité.

Si f est positive, on peut l'écrire comme limite croissante de fonctions positives intégrables, et utiliser le lemme de Fatou. \square

Une deuxième démonstration, de nature plus probabiliste, permet de voir le lemme de Kac comme une manifestation du théorème de Birkhoff, ou plus généralement du théorème ergodique de Hopf [124, §14, Individueller Ergodensatz für Abbildungen] (cf. Théorème 2.7).

Seconde démonstration du Lemme 9.1.

Comme dans la première démonstration, on peut supposer f intégrable ; sans perte de généralité, on peut aussi supposer que f est strictement positive. Par le théorème ergodique de Hopf, μ -presque partout,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^T f}{S_n^T(\Sigma_B(f)\mathbf{1}_B)} = \frac{\int_A f \, d\mu}{\int_B \Sigma_B(f) \, d\mu}.$$

De plus, si $x \in B$ et $k = \varphi_B^{(n)}(x)$, alors $S_k^T f(x) = S_k^T(\Sigma_B(f)\mathbf{1}_B)$: on a sommé f le long des n premières excursions. Le long de la sous-suite $(\varphi_B^{(n)}(x))_{n \geq 0}$, la quantité $\frac{S_k^T f}{S_k^T(\Sigma_B(f)\mathbf{1}_B)}$ est donc constante et égale à 1. En passant à la limite,

$$\frac{\int_A f \, d\mu}{\int_B \Sigma_B(f) \, d\mu} = 1,$$

d'où l'égalité voulue. \square

Pour finir, nous donnons une justification formelle du Lemme de Kac. Étant donnée $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, posons

$$C(f)(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B \\ \sum_{n=0}^{\varphi_B(x)-1} f(T^k(x)) & \text{sinon} \end{cases}. \quad (9.2)$$

Alors $f = \Sigma_B(f) + C(f) - C(f) \circ T$. La conclusion du Lemme de Kac arrive immédiatement sous la condition plus restrictive que $C(f)$ soit intégrable.

9.2 Formule de Green–Kubo

Rappelons que la variance asymptotique dans le théorème central limite (Théorème 3.30) est donnée par la *formule de Green–Kubo* (3.16) :

$$\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f) := \int_A f^2 \, d\mu + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A f \cdot f \circ T^n \, d\mu.$$

Plus généralement, on dispose d'une forme bilinéaire :

$$\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f_1, f_2) := \int_A f_1 f_2 \, d\mu + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A f_1 \cdot f_2 \circ T^n \, d\mu + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A f_2 \cdot f_1 \circ T^n \, d\mu, \quad (9.3)$$

qui converge par exemple si (A, μ, T) est une transformation Anosov mélangeante, μ une mesure d'équilibre pour un potentiel höldérien, f_1, f_2 sont höldériennes, et f_1 ou f_2 est d'intégrale nulle.

La formule de Green–Kubo satisfait une propriété similaire au Lemme de Kac :

Proposition 9.3 ([185, Proposition 5.1]).

Soit (A, μ, T) un système dynamique ergodique et préservant la mesure de probabilité. Soit $B \subset A$ de mesure strictement positive. Soit $f \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$. Supposons que :

- Les séries définissant $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f)$ et $\sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f))$ (Équation (3.16)) convergent au sens de Cesàro ;
- Quand n tend vers $+\infty$, la suite de processus

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} (S_{[nt]}^{T_B} \Sigma(f))_{t \geq 0} \right)_{n \geq 0}$$

converge en loi (pour la mesure $\mu(\cdot | B)$ et la topologie⁵⁰ \mathcal{J}_1) vers un mouvement brownien de variance $\mu(B)^{-1} \sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f)) = \sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu(\cdot | B), T_B; \Sigma_B(f))$;

- Quand n tend vers $+\infty$, la suite de variables aléatoires

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n^T \right)_{n \geq 0}$$

converge en loi vers une gaussienne centrée de variance $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f)$.

50. Pour la définition et les propriétés de la topologie \mathcal{J}_1 de Skorokhod, nous renvoyons le lecteur à [27, 212].

Alors $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f) = \sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f))$.

Ces hypothèses sont assez restrictives, mais satisfaites par exemple si (A, μ, T) est un transformation de Pomeau-Manneville de paramètre $\alpha \in (0, 1/2)$ munie de son unique mesure de probabilité invariante absolument continue, l'observable f est höldérienne centrée, et $B = (1/2, 1]$, d'après les travaux de L.-S. Young et S. Gouëzel [111, 235].

Comme suggéré par l'énoncé de la Proposition 9.3, celle-ci est démontrée par un argument distributionnel similaire au deuxième argument de la Partie 9.1. En bref, sous ces hypothèses, on dispose d'un théorème central limite pour les sommes $(S_n^T f)_{n \geq 0}$, avec variance asymptotique égale à $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f)$. On peut aussi récupérer ce théorème central limite en voyant le processus $(S_n^T f)_{n \geq 0}$ comme étant à peu près égal au processus $(S_n^{T_B} \Sigma_B(f))_{n \geq 0}$ ralenti d'un facteur $\mu(B)^{-1}$. Plus précisément, le principe d'invariance faible (seconde hypothèse de la Proposition 9.3) permet de transférer⁵¹ le théorème central limite du processus $(S_n^{T_B} \Sigma_B(f))_{n \geq 0}$ au processus $(S_n^T f)_{n \geq 0}$, et donc de montrer que $(S_n^T f)_{n \geq 0}$ satisfait un théorème central limite avec variance asymptotique $\sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f))$.

Dans [185], nous donnions une justification plus algébrique de cette identité. Une première remarque est que, sous des conditions de décroissance de la suite de fonctions $(\mathcal{L}^n(f))_{n \geq 0}$, la formule de Green–Kubo est invariante par ajout de cobord :

$$\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f + h \circ T - h) = \sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f).$$

En choisissant pour h la fonction $C(f)$ définie par l'Équation (9.2), on trouve donc

$$\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; \Sigma_B(f) \mathbf{1}_B) = \sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f).$$

Ensuite, par l'identité de balayage (Proposition 8.5), et à condition que celle-ci puisse être appliquée,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \int_A (\Sigma_B(f) \mathbf{1}_B) \cdot (\Sigma_B(f) \mathbf{1}_B) \circ T^n \, d\mu &= \sum_{n \geq 0} \int_A \mathcal{L}^n(\Sigma_B(f) \mathbf{1}_B) \cdot (\Sigma_B(f) \mathbf{1}_B) \, d\mu \\ &= \int_A (\text{Id} - \mathcal{L})^{-1}(\Sigma_B(f) \mathbf{1}_B) \cdot (\Sigma_B(f) \mathbf{1}_B) \, d\mu \\ &= \int_B (\text{Id} - \mathcal{L}_B)^{-1}(\Sigma_B(f)) \cdot \Sigma_B(f) \, d\mu|_B \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_B \Sigma_B(f) \cdot \Sigma_B(f) \circ T_B^n \, d\mu|_B. \end{aligned}$$

L'égalité voulue en découle immédiatement.

Le raisonnement esquissé ci-dessus a de nombreuses lacunes : il faut savoir pour quelle classe de cobords l'invariance de la formule de Green–Kubo par ajout de cobord est valable, vérifier que $C(f)$ appartient bien à cette classe, justifier l'utilisation de l'identité de balayage ainsi que les interversions somme-intégrale... Une version complétée de ce raisonnement permet d'obtenir [185, Théorème 3.2], dont nous donnons une version légèrement moins générale :

Théorème 9.4 (Corollaire de [185, Théorème 3.2]).

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et mélangeant. Soit $B \subset A$ de mesure strictement positive. Soit $f \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$ d'intégrale nulle, telle que $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f)$

51. En l'absence d'une hypothèse additionnelle, telle que la limite en loi d'un processus stochastique dans la Proposition 9.3, il ne paraît pas évident qu'un théorème central limite pour $(S_n^T f)_{n \geq 0}$ implique un théorème central limite pour $(S_n^{T_B} \Sigma_B(f))_{n \geq 0}$.

converge classiquement, $C(f) \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|\mathcal{L}^n(\Sigma_B(f)\mathbf{1}_B)\|_{\mathbb{L}^2(A, \mu)} < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \|\mathcal{L}_B^n(\Sigma_B(f))\|_{\mathbb{L}^2(B, \mu|_B)} < +\infty.$$

Alors :

$$\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f) = \sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f)).$$

Question 9.5.

Les hypothèses de la Proposition 9.3 et du Théorème 9.4 sont assez lourdes à vérifier. Y a-t-il des critères plus simples et plus généraux qui garantissent l'invariance de la formule de Green–Kubo ?

À l'inverse, y a-t-il des systèmes dynamiques (A, μ, T) , des ensembles $B \subset A$ et des observables $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ pour lesquelles $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f)$ et $\sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f))$ convergent en un sens raisonnable, mais vers des limites différentes ?

9.3 Observables d'intégrale nulle, II : Induction

Avant de continuer vers les invariants d'ordre supérieur introduits dans [185], revenons brièvement vers les théorèmes limites pour des observables d'intégrale nulle, déjà abordés en Sous-section 6.4. L'approche que nous avions présentée reposait sur la méthode des moments. Une stratégie antérieure, développée par l'auteur pendant sa thèse, utilise plutôt des systèmes induits [221, 222]. Si cette seconde approche fonctionne dans un cadre général de tours au-dessus d'une transformation Gibbs–Markov, et donc par exemple pour les transformations de Liverani–Saussol–Vaienti introduites en Sous-sous-section 2.4.3, nous allons la présenter pour des \mathbb{Z} -extensions conservatives dont les sauts sont de carré intégrable.

Soit $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une extension markovienne et ergodique d'une transformation Gibbs–Markov (A, μ, T) de saut F , telle que $\int_A F^2 d\mu < +\infty$ et $\int_A F d\mu = 0$. Soient $f : [\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \geq 0$.

Pour μ -presque tout $x \in A$, l'orbite de $(x, 0)$ passe une infinité de fois en $[0] \simeq A$. On peut découper l'orbite de $(x, 0)$ en excursions partant de 0, et de même pour les sommes de Birkhoff de f . On notera $R_n^{\tilde{T}} f$ la somme de f le long de l'excursion en cours au temps n , qui, sous des hypothèses raisonnables, sera négligeable. Enfin, rappelons que $L_{[0],n}$, défini à l'Équation (8.2), est le temps passé en $[0]$ au cours des n premières itérations de \tilde{T} . Alors :

$$\begin{aligned} S_n^{\tilde{T}} f(x, 0) &= \sum_{k=0}^{L_{[0],n}(x)-1} \sum_{j=0}^{\varphi_{[0]}(T_{[0]}^k(x))-1} f \circ T^j \circ \tilde{T}_{[0]}^k(x) + R_n^{\tilde{T}} f(x) \\ &\simeq S_{L_{[0],n}(x)}^{\tilde{T}_{[0]}} (\Sigma_{[0]}(f))(x) \\ &= n^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{L_{[0],n}(x)}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_{[0],n}(x)}} S_{L_{[0],n}(x)}^{\tilde{T}_{[0]}} (\Sigma_{[0]}(f))(x). \end{aligned} \tag{9.4}$$

Par la Proposition 6.4, dans (A, μ) , le processus $(n^{-\frac{1}{4}} \sqrt{L_{[0],n}(x)})_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire $\sigma(A, \mu, T; F)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{|\mathcal{N}|}$, où \mathcal{N} suit une loi normale centrée réduite.

Le système $(A, \mu, \tilde{T}_{[0]})$ est expansif⁵², et son opérateur de transfert agit quasi-compactement sur \mathcal{B} . Si f est intégrable et d'intégrale nulle pour $\tilde{\mu}$, par le Lemme de Kac (Lemme 9.1), $\Sigma_{[0]}(f)$ est

52. On peut même le munir d'une structure de transformation Gibbs–Markov naturelle. Cela est parfois très utile, par exemple dans le cadre de cette Sous-section. Remarquons cependant que ce n'est pas toujours le meilleur choix à faire ; les espaces de fonctions lipschitziennes associés sont particulièrement gros, ce qui est parfois un handicap.

encore intégrable et d'intégrale nulle. Si $\Sigma_{[0]}(f)$ est de carré intégrable et suffisamment régulière, le processus $(N^{-\frac{1}{2}}S_N^{\tilde{T}_{[0]}}\Sigma_{[0]}(f))_{N \geq 1}$ satisfait donc un théorème central limite (Théorème 3.30).

Il y a à ce point une double difficulté. D'une part, dans l'Équation (9.4), le processus stochastique $(N^{-\frac{1}{2}}S_N^{\tilde{T}_{[0]}}\Sigma_{[0]}(f))_{N \geq 1}$ est évalué le long de temps aléatoires $(L_{[0],n})_{n \geq 1}$. Il n'est pas évident a priori que l'on dispose encore d'un théorème central limite, en particulier s'il y a une dépendance entre ces deux processus – ce qui est *a priori* le cas. D'autre part, dans l'Équation (9.4), on fait le produit de deux processus, dont l'on ne contrôle asymptotiquement que les marginales ; une fois encore, s'il y avait une dépendance non-triviale entre ces processus, on ne disposerait pas d'assez d'information pour en identifier la limite.

Heureusement, grâce à un argument de couplage dû à E. Csáki et A. Földes [64, 65], généralisé aux observables de systèmes Gibbs-Markov dans la thèse de l'auteur [221, Théorème 1.7] [222], les processus $(N^{-\frac{1}{2}}S_N^{\tilde{T}_{[0]}}\Sigma_{[0]}(f))_{N \geq 1}$ et $(L_{[0],n})_{n \geq 1}$ sont *asymptotiquement indépendants*⁵³.

L'argument motivant ce couplage est, grossièrement, le suivant. Supposons que la fonction $\Sigma_{[0]}(f)$ est de carré intégrable (et même un peu plus : dans $\mathbb{L}^q(A, \mu)$ pour un $q > 2$), tandis que $\varphi_{[0]}$ a des queues lourdes. Alors le processus $(S_N^{\tilde{T}_{[0]}}\Sigma_{[0]}(f))_{N \geq 0}$ croît par accumulation de petits effets, tandis que le processus $(S_N^{\tilde{T}_{[0]}}\varphi_{[0]})_{N \geq 0}$ dépend essentiellement de quelques valeurs particulièrement élevées. On peut donc diviser les entiers en deux parties :

- L'ensemble $E_1(x)$ des temps k auxquels $\varphi_{[0]}(\tilde{T}_{[0]}^k(x))$ est “grand”, qui est un ensemble dont la densité tend assez vite vers 0 ;
- Le complémentaire $E_2(x)$ de $E_1(x)$.

Alors

$$\begin{aligned} S_N^{\tilde{T}_{[0]}}\varphi_{[0]} &\simeq \sum_{\substack{k < N \\ k \in E_1}} \varphi_{[0]} \circ \tilde{T}_{[0]}^k ; \\ S_N^{\tilde{T}_{[0]}}\Sigma_{[0]}(f) &\simeq \sum_{\substack{k < N \\ k \in E_2}} \Sigma_{[0]}(f) \circ \tilde{T}_{[0]}^k. \end{aligned}$$

Les ensembles E_1 et E_2 étant disjoints, en utilisant les propriétés de décorrélation de la transformation $\tilde{T}_{[0]}$, on peut vérifier enfin que les variables aléatoires

$$\sum_{\substack{k < N \\ k \in E_1}} \varphi_{[0]} \circ \tilde{T}_{[0]}^k \text{ et } \sum_{\substack{k < N \\ k \in E_2}} \Sigma_{[0]}(f) \circ \tilde{T}_{[0]}^k$$

sont approximativement indépendantes, et en déduire la même propriété pour $S_N^{\tilde{T}_{[0]}}\varphi_{[0]}$ et $S_N^{\tilde{T}_{[0]}}\Sigma_{[0]}(f)$.

Cette propriété d'indépendance asymptotique permet de contourner les deux difficultés évoquées. On en déduit une autre version du Théorème 6.7 (lui-même un corollaire de [184, Theorem 1.11]) :

Théorème 9.6. [222, Corollary 6.9]

Soit $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une extension markovienne ergodique d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F , telle que $\int_A F^2 d\mu < +\infty$ et $\int_A F d\mu = 0$. Soit $f : [\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $\sup_{p \in \mathbb{Z}} |f(\cdot, p)|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)} < +\infty$.
- Il existe $q > 2$ tel que $\Sigma_{[0]}(|f|) \in \mathbb{L}^q(A, \mu)$.

53. Nous renvoyons à [221, Théorème 1.7] pour le sens précis de cette indépendance asymptotique. Elle implique que la loi du processus joint converge vers une loi produit, mais apporte en plus un contrôle quantitatif sur l'erreur.

- $\int_{[\mathbb{Z}]} f \, d\tilde{\mu} = 0$.

Alors il existe une constante $\sigma^2(f) \geq 0$ telle que, pour toute mesure de probabilité $\nu \ll \tilde{\mu}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} S_n^{\tilde{T}} f = \frac{\sigma(f)}{\sqrt{\sigma(A, \mu, T; F)}} \sqrt{|\mathcal{N}|} \cdot \mathcal{N}',$$

où la convergence est en loi dans $([\mathbb{Z}], \nu)$, et $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ sont deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite.

Remarque 9.7 (Variance asymptotique, II).

La constante $\sigma^2(f)$ dans le Théorème 9.6 est simplement donnée par la formule de Green-Kubo, déjà rencontrée à l'Équation (3.16) :

$$\sigma^2(f) = \sigma^2 \left([0], \mu, \tilde{T}_{[0]}; \Sigma_{[0]}(f) \right) = \int_{[0]} \Sigma_{[0]}(f)^2 \, d\mu + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0]} \Sigma_{[0]}(f) \cdot \Sigma_{[0]}(f) \circ \tilde{T}_{[0]}^n \, d\mu,$$

où la convergence est au sens de Cesàro.

Tout comme le Théorème 6.7, le Théorème 9.6 admet des variantes pour des $[\mathbb{Z}]$ -extensions dans le bassin d'attraction de lois stables, ainsi que pour des $[\mathbb{Z}^2]$ -extensions.

Le Théorème 9.6 a été démontré avant le Théorème 6.7. Il a un inconvénient notable, par rapport au Théorème 6.7 : l'hypothèse $\Sigma_{[0]}(|f|) \in \mathbb{L}^q(A, \mu)$ pour un $q > 2$ n'est en général pas évidente à vérifier. Il faut que les excursions partant de $[0]$ ne passent pas trop de temps là où f est grande. Il y a cependant un cas particulier dans lequel ce critère est facilement vérifié⁵⁴ : quand f est à support borné, c'est-à-dire qu'il existe $\Sigma \subset \mathbb{Z}$ fini tel que $\{f \neq 0\} \subset [\Sigma]$.

Dans ce cas, on peut observer une conséquence intéressante des Théorèmes 6.7 et 9.6, et plus particulièrement des formules pour la variance asymptotique données en Remarques 6.8 et 9.7 : on dispose en effet de deux formules différentes pour cette variance !

Corollaire 9.8. Généralisation de [184, Équation (2.5)]

Soit $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une extension markovienne ergodique d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F , telle que $\int_A F^2 \, d\mu < +\infty$ et $\int_A F \, d\mu = 0$. Soit $f : [\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $\sup_{p \in \mathbb{Z}} |f(\cdot, p)|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)} < +\infty$.
- f est à support borné.
- $\int_{[\mathbb{Z}]} f \, d\tilde{\mu} = 0$.

Alors $\sigma_{\text{GK}}^2([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T}; f) = \sigma_{\text{GK}}^2([0], \mu, \tilde{T}_{[0]}; \Sigma_{[0]}(f))$.

On retrouve encore une fois l'invariance de la formule de Green-Kubo à l'aide d'un argument distributionnel similaire à celui de la Proposition 9.3, mais en mesure infinie.

9.4 Invariant de degré 3

Revenons à la démonstration de l'invariance de la formule de Green-Kubo via l'identité de balayage, à l'origine du Théorème 9.4. L'auteur de ce texte ne connaît pas de système vérifiant les hypothèses du Théorème 9.4 mais pas de la Proposition 9.3. L'argument n'est donc pas *a priori* plus général. Cependant, il offre un point de vue plus conceptuel sur ce phénomène d'invariance, conséquence d'une invariance par ajout de cobord et de l'identité de balayage. Ce point de vue permet de fabriquer des invariants de degré supérieur. Nous présentons ici un invariant de degré 3, issu de [185].

54. En fait, cette condition est satisfaite dès qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $q > 2$ tels que $\sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + |p|)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \|f(\cdot, p)\|_{\mathbb{L}^q(A, \mu)} < +\infty$, ce qui est une des conditions du Théorème 6.7. Cependant, montrer cela demande une analyse supplémentaire non triviale, menée dans le cadre du gaz de Lorentz dans [186].

Définition 9.9 (Invariant de degré 3).

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure. À condition que les sommes en jeu soient absolument convergentes, on pose :

$$\begin{aligned} \tau^3(A, \mu, T; f_1, f_2, f_3) := & \sum_{\text{Alt}} \left[\frac{1}{6} \int_A f_1 f_2 f_3 \, d\mu + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \int_A (f_1 f_2) \circ T^n \cdot f_3 \, d\mu \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \int_A f_1 \circ T^n \cdot f_2 f_3 \, d\mu + \sum_{n, m \geq 1} \int_A f_1 \circ T^{n+m} \cdot f_2 \circ T^m \cdot f_3 \, d\mu \right], \end{aligned} \quad (9.5)$$

où \sum_{Alt} est une somme sur toutes les permutations de $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Comme pour la formule de Green–Kubo, on notera

$$\begin{aligned} \tau^3(A, \mu, T; f) := & \tau^3(A, \mu, T; f, f, f) \\ = & \int_A f^3 \, d\mu + 3 \sum_{n \geq 1} \int_A f^2 \circ T^n \cdot f \, d\mu \\ & + 3 \sum_{n \geq 1} \int_A f \circ T^n \cdot f^2 \, d\mu + \sum_{n, m \geq 1} \int_A f \circ T^{n+m} \cdot f \circ T^m \cdot f \, d\mu. \end{aligned}$$

La quantité $\tau^3(A, \mu, T; f_1, f_2, f_3)$ est bien définie si, par exemple, (A, μ, T) est Anosov mélangeant, μ est une mesure d'équilibre pour un potentiel höldérien, et f_1, f_2, f_3 sont toutes trois höldériennes et d'intégrale nulle. Plus généralement, des décorrélations en $O(n^{-(2+\varepsilon)})$ pour un $\varepsilon > 0$ suffisent à faire converger les sommes intervenant dans l'Équation (9.5).

Cette formule est invariante par induction, de façon similaire au Lemme de Kac (Lemme 9.1) et à l'invariance de la formule de Green–Kubo (Théorème 9.4) :

Théorème 9.10. [Corollaire de [185, Theorem 4.6]]

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et mélangeant. Soit $B \subset A$ de mesure strictement positive. Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}^3(B, \mu|_B)$ un espace de Banach de fonctions d'intégrale nulle. Supposons que

$$\|\mathcal{L}_B^n\|_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \|\mathcal{L}^n(\mathbf{1}_B \cdot)\|_{\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{L}^3(A, \mu)}$$

sont sommables.

Soient $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{L}^1(A, \mu)$ d'intégrale nulle telles que

- $\Sigma_B(f_i) \in \mathcal{B}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.
- $\tau^3(A, \mu, T; g_1, g_2, g_3)$ est bien défini pour tous choix de $g_i \in \{f_i, \Sigma_B(f_i)\mathbf{1}_B\}$.
- $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f_i, \varphi_B \mathbf{1}_B)$ et $\sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f_i), \varphi_B)$ sont absolument convergentes.

Alors $\tau^3(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f_1), \Sigma_B(f_2), \Sigma_B(f_3))$ est bien défini, et

$$\begin{aligned} \tau^3(A, \mu, T; f_1, f_2, f_3) = & \tau^3(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f_1), \Sigma_B(f_2), \Sigma_B(f_3)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\text{Alt}} [\sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f_1), \Sigma_B(f_2)) \\ & \cdot (\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f_3, \varphi_B \mathbf{1}_B) - \sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f_3), \varphi_B))]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Dans l'énoncé du Théorème 9.10, les instances de φ_B peuvent être remplacées par une même fonction $H \in \mathbb{L}^1(B, \mu|_B)$ d'intégrale 1.

Exemple 9.11 (Décalage de Bernoulli).

Nous illustrons cet invariant avec un décalage de Bernoulli. Le but de cet exemple double. Premièrement, il permet de vérifier la validité de l'Équation (9.6), ce qui est important au vu des erreurs de calcul parfois subtiles⁵⁵ qui peuvent se glisser dans la manipulation de l'invariant τ^3 . Deuxièmement, il permet d'illustrer une façon d'obtenir des informations sur les moments de $\Sigma_B(f)$ à partir d'informations sur les moments de f .

Nous n'essaierons pas de vérifier les hypothèses techniques du Théorème 9.10. Nous conjecturons que certains espaces de fonctions non bornées, définis par exemple à l'aide du module de continuité \mathbb{L}^p [181, Exercice 8.4], pourraient convenir.

Posons $A := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la mesure $\mu_p := (p\delta_0 + (1-p)\delta_1)^{\otimes \mathbb{N}}$ avec $p \in (0, 1)$ et du décalage unilatérale T . Choisissons

$$f(\omega) := -(1-p)\mathbf{1}_0(\omega_0) + p\mathbf{1}_1(\omega_0),$$

de telle sorte que f soit d'intégrale nulle pour μ_p et que les variables aléatoires $(f \circ T^n)_{n \geq 0}$ soient indépendantes et identiquement distribuées.

On induit ce système dynamique sur $B = \{0\} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_+}$, de mesure $\mu(B) = p$. Alors $\Sigma_B(f) = -(1-p) + pG$, où $\varphi_B = 1 + G$ suit une loi géométrique de paramètre p sous $\mu(\cdot | B)$. Par la propriété de Markov forte, les variables aléatoires $(\Sigma_B(f) \circ T_B^n)_{n \geq 0}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Le Lemme de Kac (Lemme 9.1) se traduit par :

$$0 = \int_A f \, d\mu = \int_B \Sigma_B(f) \, d\mu = \mu(B) [p\mathbb{E}(G) - (1-p)],$$

et donc $\mathbb{E}(G) = \frac{1-p}{p}$. L'invariance de la formule de Green-Kubo, satisfaite par exemple grâce à la Proposition 9.3, donne

$$\begin{aligned} p(1-p) &= \int_A f^2 \, d\mu = \sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f) \\ &= \sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f)) = \mu(B)\mathbb{E}[(pG - (1-p))^2], \end{aligned}$$

d'où l'on déduit correctement $\text{Var}(G) = \frac{1-p}{p^2}$. Enfin, si les conséquences du Théorème 9.10 sont satisfaites,

$$\begin{aligned} p(1-p)(2p-1) &= \int_A f^3 \, d\mu = \tau^3(A, \mu, T; f, f, f) \\ &= \tau^3(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f)) \\ &\quad - 3\sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f)) \cdot \sigma_{\text{GK}}^2(B, \mu|_B, T_B; \Sigma_B(f), 1+G) \\ &= \mu(B)\mathbb{E}[(pG - (1-p))^3] \\ &\quad - 3\mu(B)^2\mathbb{E}[(pG - (1-p))^2]\mathbb{E}[(pG - (1-p))(1+G)] \\ &= p\mathbb{E}[(pG - (1-p))^3] - 3p(1-p)\mathbb{E}[(pG - (1-p))^2] \\ &= p\mathbb{E}[(pG - (1-p))^3] - 3p(1-p)^2, \end{aligned}$$

ce qui donne l'identité (correcte)

$$\mathbb{E}[(G - \mathbb{E}(G))^3] = \frac{(1-p)(2-p)}{p^3}.$$

55. Par exemple un problème de jauge. Même si l'on peut inverser $(\text{Id} - \mathcal{L})$ sur un espace de fonctions d'intégrale nulle sur A , et inverser $(\text{Id} - \mathcal{L}_B)$ sur un espace de fonctions d'intégrale nulle sur B , la restriction à B d'un fonction d'intégrale nulle sur A n'est pas toujours d'intégrale nulle ; il faut donc parfois ajouter des termes compensatoires.

9.5 Pour aller plus loin : Invariants de degré supérieur

La construction d'un invariant de degré 3 de la Sous-section 9.4 souffre de diverses limitations.

Une première est qu'elle repose sur le fait que les trois fonctions f_1, f_2, f_3 auxquelles elle est appliquée sont d'intégrale nulle, afin d'assurer la convergence de $\tau^3(A, \mu, T; f_1, f_2, f_3)$. Une approche plus générale, mais menant à des calculs plus complexes, serait d'ajouter des termes de compensation bien choisis afin que la somme (9.5) converge sans cette condition. Cela aurait deux avantages :

- À l'aide de telles compensations, il serait possible de généraliser cette construction en degré supérieur. En l'état, une obstruction est que le candidat naturel en degré 4 comporte des sommes divergentes du type

$$\sum_{n \geq 1} \int_A f^2 \cdot f^2 \circ T^n \, d\mu.$$

- La présence d'un terme additionnel dans l'Équation (9.6) est potentiellement une manifestation de l'absence de telles compensations. Ainsi, l'ajout du terme

$$-\frac{1}{2} \sum_{\text{Alt}} \sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f_1, f_2) \cdot \sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f_3, \mathbf{1}_A)$$

dans la définition de τ^3 ne changerait pas sa valeur quand on l'applique à des fonctions d'intégrales nulles (le terme $\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f_3, \mathbf{1}_A)$ est alors nul), mais simplifierait l'Équation (9.6).

Une seconde limitation est la technicité ainsi que la longueur des calculs impliqués dans la démonstration du Théorème 9.10, difficulté qui augmenterait significativement en degré supérieur si l'on continue d'adopter un telle approche directe. Ces différentes raisons suggèrent une approche plus systématique de ces invariants.

Une piste prometteuse consiste à utiliser les *fonctions d'Ursell*, introduites par H.D. Ursell [229].

Définition 9.12 (Fonctions d'Ursell).

Soient $n \geq 1$ et (X_1, \dots, X_n) une suite de n variables aléatoires complexes. La fonction d'Ursell d'ordre n est définie par :

$$U_n(X_1, \dots, X_n) := \partial_{t_1} \dots \partial_{t_n} \ln \left[\mathbb{E} \left(e^{\sum_{k=1}^n t_k X_k} \right) \right] (0, \dots, 0).$$

En particulier, $U_n(X, \dots, X)$ n'est autre que le n -ième cumulant de X . Par exemple,

$$\begin{aligned} U_1(X_1) &= \mathbb{E}(X_1), \\ U_2(X_1, X_2) &= \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_2), \\ U_3(X_1, X_2, X_3) &= \mathbb{E}(X_1 X_2 X_3) + 2\mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_2) \mathbb{E}(X_3) - \frac{1}{2} \sum_{\text{Alt}} \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_2 X_3). \end{aligned}$$

Soit \mathcal{B} un espace de Banach de fonctions intégrables sur (A, μ) contenant $\mathbf{1}_A$. Supposons que l'action de \mathcal{L} sur \mathcal{B} soit quasi-compacte et que (A, μ, T) soit ergodique, de telle sorte que 1 soit une valeur propre simple isolée de \mathcal{L} . Soient (f_1, \dots, f_n) dans \mathcal{B} , et supposons de plus que la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow L(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \\ \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) & \mapsto \mathcal{L}_{\mathbf{t}} := \mathcal{L} \left(e^{\sum_{k=1}^n t_k f_k} \cdot \right) \end{cases}$$

soit analytique. Alors il existe un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^n et une fonction λ analytique sur V telle que $\lambda(0) = 1$ et $\lambda(\mathbf{t})$ soit une valeur propre simple de $\mathcal{L}_{\mathbf{t}}$ pour tout $\mathbf{t} \in V$. Des candidats naturels pour des fonctions d'Ursell dynamique sont de la forme :

$$U_n(A, \mu, T; f_1, \dots, f_n) := \partial_{t_1} \dots \partial_{t_n} \ln (\lambda(\mathbf{t})) (0, \dots, 0). \quad (9.7)$$

On observe que :

$$U_1(A, \mu, T; f_1) = \frac{\partial \ln(\lambda)}{\partial t_1}(0) = \int_A f_1 \, d\mu,$$

$$U_2(A, \mu, T; f_1, f_2) = \sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; f_1, f_2),$$

le premier calcul étant direct, et le second (nécessitant l'hypothèse additionnelle que f_1, f_2 soient d'intégrale nulle) étant fait par exemple dans [106]. Un calcul particulièrement douloureux et qui ne sera pas reproduit ici permet de montrer que, si f_1, f_2, f_3 sont d'intégrale nulle,

$$U_3(A, \mu, T; f_1, f_2, f_3) = \tau^3(A, \mu, T; f_1, f_2, f_3).$$

Question 9.13.

Les fonctions d'Ursell dynamiques que l'on a définies par l'Équation (9.7) satisfont-elles une propriété d'invariance par induction similaire à celle satisfaite par l'intégrale (Lemme de Kac), la formule de Green-Kubo et l'invariant τ^3 ?

De plus, les fonctions d'Ursell interviennent dans des modèles probabilistes communs, en particulier comme dérivées de fonctions de corrélation dans des modèles d'Ising [188], ce qui motive la question suivante.

Question 9.14.

Les fonctions d'Ursell dynamiques définies par l'Équation (9.7) apparaissent-elles dans des modèles dynamiques, par exemple comme (dérivées de) fonctions de corrélation ?

Quatrième partie

Théorie du potentiel et \mathbb{Z}^d -extensions

Ce dernier chapitre est dédié à l'article [226]. Sa question centrale est la suivante. On se donne une \mathbb{Z}^d -extension markovienne, ergodique et conservative $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) . Soit $\Sigma \subset \mathbb{Z}^d$.

Soient $p \in \Sigma$ et $x \in A$. Par conservativité, presque sûrement, l'orbite de (x, p) reviendra dans $[\Sigma]$. En quel point de Σ ? D'un point de vue probabiliste, pour $q \in \Sigma$, que peut-on dire de la probabilité $\mu(T_{[\Sigma]}(x, p) \in [q])$ que l'orbite partant de (x, p) revienne pour la première fois dans $[\Sigma]$ en $[q]$?

La question analogue pour des marches aléatoires peut être attaquée grâce à la théorie probabiliste du potentiel, et plus spécifiquement l'identité de balayage. Un tel calcul se déroule en trois étapes :

- Résolution d'une équation de Poisson sur \mathbb{Z}^d à l'aide de la transformée de Fourier. La solution fait intervenir la fonction caractéristique de la marche aléatoire.
- Utilisation de l'identité de balayage pour transférer cette solution en une solution d'une équation de Poisson sur $\{p, q\}$.
- On obtient ainsi un opérateur associé à une chaîne de Markov sur $\{p, q\}$, qu'il suffit d'inverser.

Cette stratégie est présentée en détail en Section 10 : *Cadre probabiliste : Marches aléatoires*. Le cadre dynamique sera explicité en Section 11 : *Cadre dynamique et stratégie*. Nous avons d'ores et déjà les moyens d'adapter le premier point (grâce aux opérateurs de transfert tordus) et le second point (l'identité de balayage pour les opérateurs de transfert).

Le troisième point, qui est un simple calcul pour les marches aléatoires, demande de nouvelles idées dans notre cadre dynamique. La clef sera la notion d'état métastable, que nous introduirons en Section 12 : *Systèmes à transitions rares*. La Section 13 (*Calcul asymptotique des probabilités d'atteinte*) conclut ce mémoire en fusionnant ces différentes techniques et en en donnant quelques applications, ce qui termine la présentation de [226]. Nous terminons par un bref retour sur la formule de Green-Kubo et son usage dans [184], ainsi que quelques pistes de recherche.

Remarque 9.15 (Quelques travaux antérieurs).

S'il existe de très nombreux travaux sur la théorie probabiliste du potentiel en probabilité et en géométrie (via des marches aléatoires ou des mouvements browniens), celle-ci a été très peu appliquée dans des cadres dynamiques. Mentionnons toutefois quelques travaux antérieurs.

Dans les années 1980, A. Krámlí, N. Simányi et D. Szász ont pu appliquer cette théorie aux marches aléatoires à degrés de liberté interne [146–148], c'est-à-dire à des extensions de chaînes de Markov à espaces d'états finis. Si ces travaux se placent dans un cadre probabiliste classique, une des motivations des auteurs venait des systèmes dynamiques : de telles extensions sont un modèle simplifié des gaz de Lorentz, et ces derniers sont trop complexes pour pouvoir être abordés directement. À ce propos, nous renvoyons la lectrice à la Sous-sous-section 13.5.1.

Plus récemment, D. Dolgopyat et P. Nándori ont montré l'existence de profils limites pour des gaz de Lorentz sur des cylindres thermostatés⁵⁶ [81]. Ce type de théorème se rapproche beaucoup des sujets d'étude de la théorie du potentiel, bien que leur méthode repose plutôt sur l'approximation par des processus continus (en particulier l'excursion brownienne).

Enfin, le travail très récent de I. Grama, J.-F. Quint et H. Xiao [117] porte sur les \mathbb{R} -extensions de sous-décalages conditionnés par ne pas revenir dans \mathbb{R}_- avant un temps long. Les théorèmes

56. Grossièrement : on prend un long tronçon de gaz de Lorentz cylindrique, on fait rentrer des particules d'un côté, on les fait sortir de l'autre, et on étudie le flux de particules et la densité moyenne de particules en chaque point du cylindre.

distributionnels qu'ils démontrent pour ces processus sont profonds. Leur stratégie repose sur la théorie probabiliste du potentiel, bien qu'il s'agisse plutôt de l'appliquer à des chaînes de Markov puis d'approcher le système dynamique par de telles chaînes de Markov.

10 Cadre probabiliste : Marches aléatoires

Dans un premier temps, nous revenons au cadre bien compris des marches aléatoires. L'enjeu sera ensuite de généraliser aux \mathbb{Z}^d -extensions les arguments que nous aurons présentés.

10.1 Probabilités d'atteinte de marches aléatoires

Soient $d \geq 1$, $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d que l'on supposera ergodique et conservative, et $\Sigma \subset \mathbb{Z}^d$ un ensemble fini. On cherche à calculer les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite sur Σ . Nous donnerons en exemple de ce problème général une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^2 induite sur le sous-ensemble $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, où $\alpha = (0, 0)$, $\beta = (-1, 0)$ et $\gamma = (1, 1)$, comme illustré par la Figure 27.

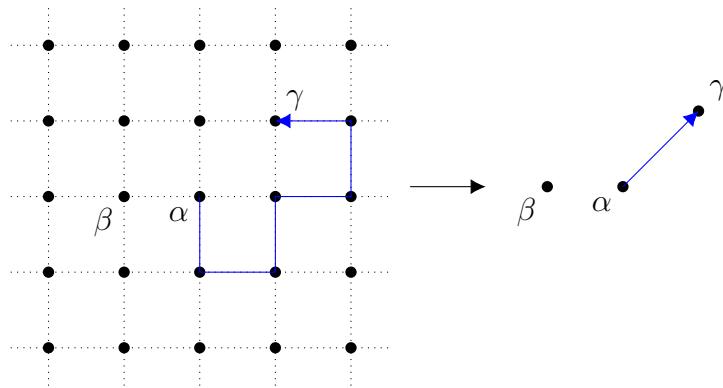


FIGURE 27 – Une transition dans $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ induite par un chemin de la marche aléatoire simple dans \mathbb{Z}^2 .

Remarquons tout d'abord que la mesure de comptage sur \mathbb{Z}^d est stationnaire ; l'unique mesure de probabilité invariante sur Σ est donc proportionnelle à la mesure de comptage.

La méthode décrite en Partie 7.3 se transpose dans ce cadre. Cependant, l'espace d'état de la chaîne de Markov étant infini, nous n'inverserons pas explicitement l'opérateur $(\text{Id} - P)$; à la place, nous utiliserons la transformée de Fourier pour résoudre l'équation de Poisson avec second membre

$$(\text{Id} - P)(f) = g \mathbf{1}_\Sigma. \quad (10.1)$$

Soit X une variable aléatoire ayant la loi d'un saut de S_n , et $\Phi = \mathbb{E}(e^{i\langle \cdot, X \rangle})$ sa fonction caractéristique. Si f est une fonction sommable, alors pour tout $\xi \in \mathbb{T}^d$,

$$\begin{aligned} \widehat{P(f)}(\xi) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\langle \xi, p \rangle} P(f)(p) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\langle \xi, p \rangle} \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(X = q - p) f(q) \\ &= \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\langle \xi, q \rangle} f(q) \sum_{r \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(X = r) e^{\langle \xi, r \rangle} \\ &= \Phi(\xi) \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Autrement dit, en domaine fréquentiel, P agit par multiplication par la fonction caractéristique d'un saut. Formellement, l'Équation (10.1) devient

$$(1 - \Phi(\xi))\widehat{f}(\xi) = \widehat{(g\mathbf{1}_\Sigma)}(\xi) = \sum_{p \in \Sigma} g(p)e^{-i\langle \xi, p \rangle}$$

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sum_{p \in \Sigma} g(p)e^{-i\langle \xi, p \rangle}}{1 - \Phi(\xi)}.$$

Ce calcul formel se heurte cependant à des problèmes de convergence. Ainsi, le potentiel f n'est en général pas intégrable ; même dans des cas simples, il est seulement borné. Sa transformée de Fourier est donc définie seulement au sens des distributions. De façon liée, dans le cas de marches aléatoires dont les sauts sont de carré intégrable, la fonction $(1 - \Phi)$ est en $\Theta(|\xi|^2)$, alors que $\widehat{(g\mathbf{1}_\Sigma)}(\xi)$ est génériquement de l'ordre de $|\xi|$, ce qui force \widehat{f} à diverger en $|\xi|^{-1}$ en 0.

Une solution consiste à travailler non pas directement avec f mais, comme suggéré par la Remarque 7.15, de travailler en intégrant contre des fonctions supportées par Σ et de somme nulle. En effet, on peut espérer, par analogie avec la formule de Plancherel, que pour toutes fonctions $g, h : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ de somme nulle,

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \Sigma} (\text{Id} - P^\Sigma)^{-1}(g)(p) \cdot h(p) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} (\text{Id} - P)^{-1}(g\mathbf{1}_\Sigma)(p) \cdot (h\mathbf{1}_\Sigma)(p) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\widehat{g}(\xi) \cdot \widehat{h}(-\xi)}{1 - \Phi(\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (10.2)$$

L'intégrale ci-dessus converge s'il existe $c > 0$ tel que $|1 - \Phi(\xi)| \geq c|\xi|^2$, condition satisfaite dès que la loi de X n'est pas δ_0 .

L'Égalité (10.2) peut se démontrer à l'aide d'une version régularisée de l'équation de Poisson. Étant donné un paramètre $\rho \in [0, 1)$, les manipulations formelles ci-dessus deviennent rigoureuses si l'on travaille avec l'équation

$$(\text{Id} - \rho P)f = \sum_{n \geq 0} \rho^n P^n = g\mathbf{1}_\Sigma.$$

Une version de l'identité de balayage pour des équations de ce type a été proposée dans [185, Lemme 1.7]. Pour une certaine famille d'opérateurs $(P_\rho^\Sigma)_{\rho \in [0, 1)}$, on obtient

$$\sum_{p \in \Sigma} (\text{Id} - P_\rho^\Sigma)^{-1}(g)(p) \cdot h(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\widehat{g}(\xi) \cdot \widehat{h}(-\xi)}{1 - \rho\Phi(\xi)} d\xi.$$

On retrouve l'Équation (10.2) en prenant la limite quand $\rho \rightarrow 1^-$, avec un peu de travail pour montrer que $(\text{Id} - P_\rho^\Sigma)^{-1}$ converge effectivement vers $(\text{Id} - P^\Sigma)^{-1}$. Ce raisonnement a été mené dans le cadre des \mathbb{Z}^d -extensions dans [226, Partie 5.1].

Exemple 10.1.

Dans le cadre d'une marche aléatoire simple et de $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ comme décrit précédemment, on retrouve des intégrales trigonométriques qui peuvent être évaluées explicitement. Par exemple, en choisissant $g = h = \mathbf{1}_\beta - \mathbf{1}_\alpha$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \Sigma} (\text{Id} - P^\Sigma)^{-1}(g)(p) \cdot g(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\widehat{g}(\xi) \cdot \widehat{g}(-\xi)}{1 - \Phi(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1 - \cos(\xi_1)}{2 - \cos(\xi_1) - \cos(\xi_2)} d\xi \\ &= 2. \end{aligned}$$

En appliquant les techniques exposées, on trouve finalement, dans la base $(\mathbf{1}_\alpha, \mathbf{1}_\beta, \mathbf{1}_\gamma)$,

$$P^{\{\alpha, \beta, \gamma\}} = \frac{1}{-\pi^2 + 8\pi - 4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\pi^2 + 4\pi - 4 & -\frac{1}{2}\pi^2 + 3\pi & \pi \\ -\frac{1}{2}\pi^2 + 3\pi & -\frac{\pi^2}{2} + 6\pi - 4 & \frac{1}{2}\pi^2 - \pi \\ \pi & \frac{1}{2}\pi^2 - \pi & -\frac{3}{2}\pi^2 + 8\pi - 4 \end{pmatrix}.$$

Notons \mathbb{C}_0^Σ l'ensemble des fonctions sur Σ à valeurs complexes et de somme nulle. En résumé, la stratégie utilisée pour calculer P^Σ est la suivante :

- Grâce à la transformée de Fourier, pour tous $f, g \in \mathbb{C}_0^\Sigma$, on peut calculer $\sum_{p \in \Sigma} (\text{Id} - P)^{-1}(f)(p) \cdot g(p)$.
- Grâce à l'identité de balayage, on en déduit les quantités $\sum_{p \in \Sigma} (\text{Id} - P^\Sigma)^{-1}(f)(p) \cdot g(p)$.
- En appliquant ce qui précède à une base de \mathbb{C}_0^Σ , on en déduit $(\text{Id} - P^\Sigma)^{-1} \curvearrowright \mathbb{C}_0^\Sigma$, puis $(\text{Id} - P^\Sigma) \curvearrowright \mathbb{C}_0^\Sigma$. Comme $(\text{Id} - P^\Sigma)$ est nul sur la droite des fonctions constantes, on a enfin toute l'information pour reconstruire $P^\Sigma \curvearrowright \mathbb{C}^\Sigma$.

La nouveauté par rapport à la stratégie esquissée en Sous-section 7.3 est l'utilisation de la transformée de Fourier pour résoudre l'équation de Poisson sur \mathbb{Z}^d .

10.2 Interprétation électrocinétique

Les objets probabilistes probabilistes introduits en Partie 10.1 ont une interprétation électrocinétique. Nous ne développerons pas en toute généralité les liens entre marches aléatoires et électrocinétique, mais seulement dans le cadre de l'Exemple 10.1 ; nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage [85].

Considérons un réseau périodique de résistances, de même résistance R . On applique un potentiel V aux nœuds α, β, γ , et l'on cherche à calculer le courant entrant le circuit⁵⁷.

Pour cela, on va dans un premier temps inverser le problème : si l'on connaît le courant entrant i en α, β et γ , comment calculer un potentiel électrostatique en ces mêmes points ? Plus généralement, peut-on retrouver le potentiel V en tous les nœuds du circuit ?

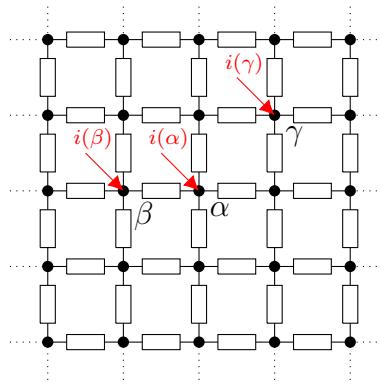


FIGURE 28 – Un réseau bipériodique de résistances avec courant entrant en $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Les grandeurs $i(\alpha), i(\beta), i(\gamma)$ sont les courants entrant en α, β, γ respectivement, et peuvent être négatives.

En dimension 2, le courant ne peut pas s'échapper à l'infini⁵⁸. Le courant entrant doit donc être égal au courant sortant, et donc $\sum_\Sigma i = 0$.

57. Si l'on étudie le même problème avec seulement deux nœuds, par exemple en choisissant $\Sigma = \{\beta, \gamma\}$, le problème posé revient à calculer la résistance équivalente entre ces deux points.

58. C'est une reformulation de la récurrence de la marche aléatoire simple en dimension 2.

Par la loi d'Ohm, le courant circulant d'un nœud v vers un nœud voisin v' est $\frac{V(v)-V(v')}{R}$. Par la loi des nœuds, pour tout $v \in \mathbb{Z}^2$,

$$\sum_{v' \sim v} \frac{V(v) - V(v')}{R} = (i\mathbf{1}_\Sigma)(v),$$

ce que l'on peut réécrire :

$$(\text{Id} - P)(V) = \frac{R}{4}(i\mathbf{1}_\Sigma).$$

Par transformée de Fourier, on peut calculer le potentiel V aux points de Σ , encore une fois grâce à l'identité de balayage. Ce potentiel électrostatique est bien défini à constante près. On peut aussi utiliser la méthode présentée précédemment, qui consiste à calculer les quantités

$$\frac{R}{4} \sum_{p \in \Sigma} (\text{Id} - P)^{-1}(i)(p) \cdot j(p),$$

où i et j sont deux courants entrants en Σ (et donc tous deux de somme nulle).

Cette interprétation électrocinétique de l'équation de Poisson éclaire certaines caractéristiques de l'identité de balayage. Quand l'on cherche des solutions de l'équation

$$(\text{Id} - P)f = g\mathbf{1}_\Sigma,$$

la fonction g , de somme nulle, peut être interprétée comme une intensité entrante dans le système. La fonction f est un potentiel associé, et est donc défini modulo constante. Le choix de prendre f de moyenne nulle sur Σ est un choix de jauge pour ce potentiel.

Exercice 10.2.

Montrez que la quantité

$$\frac{R}{4} \sum_{p \in \Sigma} (\text{Id} - P)^{-1}(i)(p) \cdot i(p)$$

est la puissance consommée par le circuit de résistances quand le courant entrant est i , et en particulier est toujours positive.

11 Cadre dynamique et stratégie

11.1 Probabilités de transition dans les \mathbb{Z}^d -extensions

Soit (A, μ, T) une transformation Gibbs-Markov. On fixe une \mathbb{Z}^d -extension markovienne ergodique et conservative $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ de (A, μ, T) de sauf F .

Soit $\Sigma \subset \mathbb{Z}^d$ fini. Par conservativité, le système induit $([\Sigma], \mu_\Sigma, T_\Sigma)$ est bien défini et préserve la mesure μ_Σ , que l'on supposera de probabilité :

$$\mu_\Sigma = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{p \in \Sigma} \mu \otimes \delta_p.$$

Notation 11.1.

Dans la mesure du possible, nous utiliserons les notations suivantes :

- *Les objets sans marque spécifique tels que A , μ , T , \mathcal{L} etc. sont associés à la transformation Gibbs-Markov initiale (A, μ, T) .*

- Les objets avec un tilde tels que $\tilde{\mu}$, \tilde{T} , $\tilde{\mathcal{L}}$ etc. sont associés à une \mathbb{Z}^d -extension du système précédent.
- Les objets avec un indice tels que μ_Σ , T_Σ , \mathcal{L}_Σ etc. sont associés au système induit par l'extension précédente sur $[\Sigma] = A \times \Sigma$.

On cherche à calculer les probabilités de transitions entre les différents sites de Σ , c'est-à-dire les probabilités

$$P_{pq}^\Sigma = \mu \left(\tilde{T}^{\varphi_{[\Sigma]}(x,p)}(x,p) \in [q] \right) = \mu(T_\Sigma(x,p) \in [q]).$$

Comme en Section 10, le calcul de ces probabilités d'atteinte se résume au calcul de la matrice de transition $P^\Sigma = (p_{\Sigma,pq})_{p,q \in \Sigma}$.

Étant donnée une \mathbb{Z}^d -extension d'un système dynamique préservant une mesure de probabilité (A, μ, T) et $\Sigma \subset \mathbb{Z}^d$, comment estimer la matrice des probabilités de transition P^Σ ?

On peut déjà observer que la matrice P_Σ est une matrice stochastique. Elle préserve la forme linéaire $|\Sigma|^{-1} \sum_{p \in \Sigma} \delta_p$: c'est une conséquence du fait que $([\Sigma], \mu_\Sigma, T_\Sigma)$ préserve la mesure.

De plus, P_Σ est irréductible : c'est une conséquence du fait que $([\Sigma], \mu_\Sigma, T_\Sigma)$ est ergodique. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc exactement l'espace des fonctions constantes.

11.2 Identité de balayage et opérateur de transfert

Dans le cadre des marches aléatoires, l'identité de balayage reliait directement l'opérateur P^Σ et le noyau de transition P de la marche aléatoire. Ce n'est plus le cas maintenant. L'opérateur P^Σ est néanmoins relié aux opérateurs de Koopman et de transfert via des opérateurs de moyennisation.

Définition 11.2 (Opérateurs $\Pi_{\Sigma,*}$ et Π_Σ^*).

Pour $\Sigma \subset \mathbb{Z}^d$, on définit deux opérateurs :

$$\Pi_{\Sigma,*} : \begin{cases} \mathbb{L}^1([\Sigma], \mu_\Sigma) & \rightarrow \mathbb{C}^\Sigma \\ f & \mapsto (\int_A f(\cdot, p) \, d\mu)_{p \in \Sigma} \end{cases}, \quad (11.1)$$

$$\Pi_\Sigma^* : \begin{cases} \mathbb{C}^\Sigma & \rightarrow \mathbb{L}^1([\Sigma], \mu_\Sigma) \\ f & \mapsto \Pi_\Sigma^* f : (x, p) \mapsto f(p) \end{cases}. \quad (11.2)$$

Il suit de ces définitions que $\Pi_{\Sigma,*} \circ \Pi_\Sigma^* = \text{Id}$, alors que $\Pi_\Sigma^* \circ \Pi_{\Sigma,*}$ moyennise les fonctions $f \in \mathbb{L}^1([\Sigma], \mu_\Sigma)$ sur chaque $[p] \subset [\Sigma]$. Le lien entre probabilités de transition et opérateurs de transfert est alors :

$$P^\Sigma = \Pi_{\Sigma,*} \circ \mathcal{K}_\Sigma \circ \Pi_\Sigma^* \quad \text{et} \quad P^{\Sigma,T} = \Pi_{\Sigma,*} \circ \mathcal{L}_\Sigma \circ \Pi_\Sigma^*. \quad (11.3)$$

L'opérateur $\Pi_\Sigma^* \circ P^{\Sigma,T} \circ \Pi_{\Sigma,*} \cap \mathbb{L}^1([\Sigma], \mu_\Sigma)$ est une approximation de rang fini de \mathcal{L}_Σ .

De là, on peut appliquer la stratégie esquissée en Sous-section 10.1 à l'opérateur $\tilde{\mathcal{K}}$ ou $\tilde{\mathcal{L}}$ afin de calculer \mathcal{K}_Σ ou \mathcal{L}_Σ respectivement, et récupérer la matrice P^Σ . Pour les raisons développées en Sous-section 8.2, l'opérateur de Koopman n'est pas adapté ; nous allons donc organiser notre stratégie autour de l'opérateur de transfert.

La Proposition 8.5 fournit le deuxième point de notre stratégie. Nous allons maintenant aborder le premier : la résolution de l'équation de Poisson sur $[\mathbb{Z}^d]$ à l'aide de la transformée de Fourier.

11.3 Potentiel et transformée de Fourier

Dans le cas des marches aléatoires, nous partions d'une intensité entrante $g \in \mathbb{C}_0^\Sigma$, c'est-à-dire une fonction définie sur Σ et de moyenne nulle. Dans un contexte dynamique, nous allons remplacer \mathbb{C}_0^Σ par un espace de Banach de fonctions de moyenne nulle.

Notation 11.3.

Rappelons que \mathcal{B} est l'espace des fonctions essentiellement lipschitziennes sur A . On notera :

- Pour tout ensemble I fini, \mathcal{B}_I l'espace des fonctions lipschitziennes sur $A \times I$.
- \mathcal{B}_0 l'espace des fonctions lipschitziennes sur A de moyenne nulle, et $\mathcal{B}_{I,0}$ l'espace des fonctions lipschitziennes sur $A \times I$ de moyenne nulle.

Fixons $\Sigma \subset \mathbb{Z}^d$ fini. Par ergodicité, l'opérateur $(\text{Id} - \mathcal{L}_\Sigma)$ est inversible sur $\mathcal{B}_{\Sigma,0}$. Afin de manipuler effectivement des matrices, nous allons discréteriser cet opérateur.

Définition 11.4 (Opérateur potentiel discréétisé).

Nous appellerons opérateur potentiel discréétisé⁵⁹ l'opérateur

$$Q_\Sigma := \Pi_{\Sigma,*} \circ (\text{Id} - \mathcal{L}_\Sigma)^{-1} \circ \Pi_\Sigma^* \quad (11.4)$$

défini sur \mathbb{C}_0^Σ .

Pour tous $f, g \in \mathbb{C}_0^\Sigma$,

$$\sum_{s \in \Sigma} \bar{f}(s) \cdot Q_\Sigma(g)(s) = |\Sigma| \int_{[\Sigma]} \Pi_\Sigma^*(\bar{f}) \cdot (\text{Id} - \mathcal{L}_\Sigma)^{-1}(\Pi_\Sigma^*(g)) \, d\mu_\Sigma.$$

De plus, afin de contourner des problèmes de convergence, nous allons plutôt travailler avec des équations de Poisson tordues. Autrement dit, nous nous donnons un paramètre $\rho \in (0, 1)$, puis introduisons l'opérateur $Q_{\Sigma,\rho}$ défini par :

$$\sum_{p \in \Sigma} \bar{f}(p) \cdot Q_{\Sigma,\rho}(g)(p) = \text{Card}(\Sigma) \int_{[\Sigma]} \Pi_\Sigma^*(\bar{f}) \cdot (\text{Id} - \rho \tilde{\mathcal{L}})^{-1}(\Pi_\Sigma^*(g)) \, d\mu_\Sigma.$$

Pour $\rho = 1$, formellement, $(\text{Id} - \rho \tilde{\mathcal{L}})^{-1} = (\text{Id} - \tilde{\mathcal{L}})^{-1} = (\text{Id} - \mathcal{L}_\Sigma)^{-1}$ par l'identité de balayage. La Proposition 11.5 suivante rendra rigoureuse ce lien sans avoir à donner un sens à l'opérateur $(\text{Id} - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}$.

En passant en domaine fréquentiel, la fonction $(\text{Id} - \rho \tilde{\mathcal{L}})^{-1}(\Pi_\Sigma^*(g))$ s'exprime à l'aide d'opérateurs de transfert tordus. Notons

$$\mathcal{F}_\Sigma(f)(\xi) := \sum_{p \in \Sigma} f(p) e^{-i\langle \xi, p \rangle}.$$

Alors, par des manipulations semblables à celles de la Sous-section 6.2, et un travail additionnel pour vérifier les passages à la limite quand ρ tend vers 1^- , on obtient la :

Proposition 11.5. / [226, Proposition 5.3], Partie 1]

Soit $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne, ergodique et conservative d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Soit $\Sigma \subset \mathbb{Z}^d$ une partie finie. Pour toutes $f, g \in \mathbb{C}_0^\Sigma$,

$$\sum_{p \in \Sigma} \bar{f}(p) \cdot Q_\Sigma(g)(p) = \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \overline{\mathcal{F}_\Sigma(\bar{f})} \mathcal{F}_\Sigma(g) \left(\int_A (\text{Id} - \rho \mathcal{L}_\xi)^{-1}(\mathbf{1}) \, d\mu \right) \, d\xi, \quad (11.5)$$

où $\mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}(e^{i\langle \xi, F \rangle} \cdot)$ est l'opérateur de transfert tordu par F .

59. Le nom d'*opérateur potentiel* provient de l'interprétation électrocinétique de la Sous-section 10.2, dans laquelle – à constante multiplicative près – l'opérateur $(\text{Id} - P)^{-1}$ associe à un profil d'intensités un potentiel électrique.

11.4 Formes limites

S'il était possible de calculer explicitement les probabilités de transition pour la marche aléatoire simple en Sous-section 10.1, un tel calcul explicite semble hors de portée pour des systèmes dynamiques plus complexes. De même, l'Équation (11.5) fournit une formule intégrale pour l'opérateur Q_Σ qui fait intervenir toute la famille d'opérateurs $(\mathcal{L}_\xi)_{\xi \in \mathbb{T}^d}$, et est donc délicate à évaluer en pratique. Dans l'esprit du théorème central limite ou du théorème central limite local, nous allons explorer des théorèmes limites.

Dans notre cadre, cela consiste à estimer P^Σ quand les sites de Σ sont très éloignés les uns des autres. Pour formaliser cela, nous remplaçons Σ par une famille d'ensembles Σ_t . Plus précisément, nous fixons une famille d'injections $\sigma_t : I \hookrightarrow \mathbb{Z}^d$ où I est fini. On remplace naturellement $\sigma_t(I)$ par I dans les définitions des différents opérateurs ; par exemple, au lieu de travailler avec la matrice $P^{\sigma_t(I)}$ indexée par $\sigma_t(I)$, on utilisera plutôt la matrice P_t indexée par I qui lui est naturellement semblable. Ce formalisme permet ainsi de manipuler différents opérateurs en conservant un système d'indexation cohérent : par exemple, les opérateurs $\Pi_{\sigma_t(I),*}$ et $\Pi_{\sigma_t(I)}^*$ sont naturellement conjugués à des opérateurs Π_* et Π^* indépendants de t . On définit de même Q_t , \mathcal{F}_t , etc.

Ce cadre reste trop flexible : nous n'avons imposé aucune condition sur σ_t autre que l'injectivité. Bien que la théorie qui suit soit plus générale, nous imposerons que les ensembles $\sigma_t(I)$ soient de plus en plus grand et aient une “forme limite”.

Hypothèse 11.6.

Il existe $\sigma : I \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ telle que, pour tout $i \in I$,

$$\sigma_t(i) =_{t \rightarrow +\infty} t\sigma(i) + o(t).$$

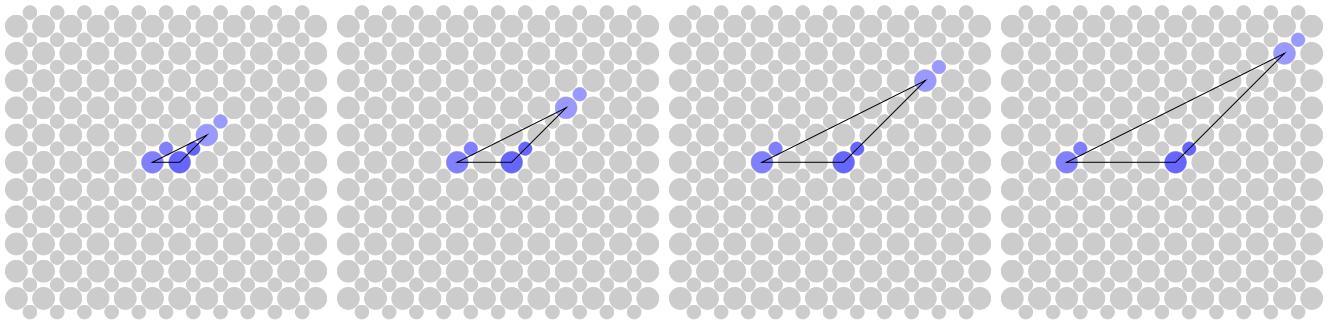


FIGURE 29 – Les éléments d'une famille $(\sigma_t(I))_{t>0}$ de parties de \mathbb{Z}^d qui s'éloignent en gardant la même forme.

Les excursions à partir d'un site ont une probabilité petite d'être très grande. Par conséquent, si deux sites sont très éloignés, il y a peu de chance qu'une excursion du premier site soit suffisamment longue pour atteindre le second : les transitions sont rares quand les sites sont éloignés. Sous l'Hypothèse 11.6, la famille de matrices $(P_t)_{t>0}$ converge donc vers l'identité quand t tend vers 0.

Revisitons la question posée en Sous-section 11.1. Donnons-nous une \mathbb{Z}^d -extension d'un système dynamique préservant une mesure de probabilité (A, μ, T) , ainsi qu'une famille de fonctions σ_t vérifiant l'Hypothèse 11.6. Peut-on trouver un équivalent de $(\text{Id} - P_t)$?

11.5 Limite de l'opérateur potentiel discrétilisé

Revenons à la Proposition 11.5. Quand t tend vers $+\infty$, la contribution principale à l'Équation (11.5) vient de la valeur propre principale de $\mathcal{L} \curvearrowright \mathcal{B}$. En effet, par le Corollaire 5.1, toutes les

autres valeurs propres des opérateurs $(\mathcal{L}_\xi)_{\xi \in \mathbb{T}^d}$ sont distinctes de 1, et donc apportent une contribution bornée à l'intégrale.

Proposition 11.7. / [226, Proposition 5.3], Partie 2]

Dans le cadre de la Proposition 11.5, sous l'Hypothèse 11.6, il existe une fonction $\xi \mapsto \delta(\xi)$ continue sur un voisinage de $0 \in \mathbb{T}^d$ telle que $\delta(0) = 0$ et, pour tout voisinage suffisamment petit U de 0,

$$\sum_{j \in I} \bar{f}(j) \cdot Q_t(g)(j) = \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_U \overline{\mathcal{F}_t(f)} \mathcal{F}_t(g) \frac{1 + \delta(\xi)}{1 - \rho \lambda_\xi} d\xi + O_U(1) \|f\| \cdot \|g\|, \quad (11.6)$$

où le terme d'erreur $O_U(1)$ est uniforme en ρ et t , mais dépend de U .

Le membre de droite de l'Équation (11.6) s'évalue ensuite dans des cas concrets, même si les calculs peuvent être un peu laborieux [226, Section 6].

Exemple 11.8 (\mathbb{Z} -extension, variance finie).

Soit $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z} -extension markovienne, ergodique et conservative d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Supposons que F est centrée et de variance finie.

Soient $\sigma_1 < \dots < \sigma_n$ des réels, et $\Sigma_t = \{t\sigma_1 + o(t), \dots, t\sigma_n + o(t)\} \subset \mathbb{Z}$. Alors, pour tous $f, g \in \mathbb{C}_0^I$:

$$\sum_{j \in I} \bar{f}(j) \cdot Q_t(g)(j) =_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t}{\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F)} \sum_{i, j \in I} \bar{f}(i) \cdot g(j) \cdot |\sigma(i) - \sigma(j)| + o(t).$$

Exemple 11.9 (\mathbb{Z}^2 -extension, variance finie).

Soit $([\mathbb{Z}^2], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^2 -extension markovienne, ergodique et conservative d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Supposons que F est centrée et de variance finie.

Soient I fini et $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective. Soit $\Sigma_t = t\sigma(I) + o(t) \subset \mathbb{Z}^2$. Dans ce cadre, la principale contribution à l'Équation (11.6) est celle des fréquences identiques de $\mathcal{F}_t(\bar{f})$ et $\mathcal{F}_t(g)$. Par conséquent, pour tous $f, g \in \mathbb{C}_0^I$:

$$\sum_{j \in I} \bar{f}(j) \cdot Q_t(g)(j) =_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{\pi \sqrt{\det \text{Cov}(A, \mu, T; F)}} \sum_{j \in I} \bar{f}(j) \cdot g(j) + o(\ln(t)),$$

ou, autrement dit, $Q_t = \frac{\ln(t)}{\pi \sqrt{\det \text{Cov}(A, \mu, T; F)}} \text{Id} + o(\ln(t))$.

On peut, à partir des expansions asymptotiques des opérateurs $(Q_t)_{t \geq 0}$ des Exemples 11.8 et 11.9, retrouver des expansions asymptotiques des matrices de transition $(P_t)_{t \geq 0}$. Ce sera fait en Sous-section 13.3. Le passage de $(Q_t)_{t \geq 0}$ à $(P_t)_{t \geq 0}$ n'est trivial ni en théorie – ce sera l'objet du Théorème 13.6 – ni en pratique – les calculs matriciels impliqués n'étant en général pas si simples.

12 Systèmes à transitions rares

Le raisonnement de la Section 11 permet, dans un régime asymptotique, d'estimer Q_t . Via l'identité de balayage, on peut alors – au moins pour des fonctions f, g constantes sur chaque site – estimer les intégrales

$$\int_{[I]} \bar{f} \cdot (\text{Id} - \mathcal{L}_t)^{-1}(g) d\mu_I.$$

Le dernier problème consiste à déduire de ces intégrales une approximation de P_t . Dans la Sous-section 10.1, le problème était de dimension finie, et notre méthode reposait sur un calcul matriciel explicite ; ce n'est plus le cas ici.

La dernière brique de ce travail repose sur une autre théorie : celle des temps d'atteinte d'événements rares en dynamique hyperbolique, ainsi que de la métastabilité.

12.1 Évènements rares

Dans un premier temps, nous allons présenter quelques résultats sur les occurrences d'événements rares dans des systèmes dynamiques hyperboliques. Soient (A, μ, T) un système dynamique préservant une mesure de probabilité ergodique et $A_\varepsilon \subset A$ de mesure $\mu(A_\varepsilon) \ll 1$. Que peut-on dire du premier temps $\varphi_{A_\varepsilon} \geq 1$ d'occurrence de l'événement A_ε ?

Par le lemme de Kac (Lemme 9.1), si x est choisi selon la mesure $\mu(\cdot | A_\varepsilon)$, alors $\mathbb{E}(\varphi_{A_\varepsilon}(x)) = \mu(A_\varepsilon)^{-1}$. D'autre part, le système dynamique (A, μ, T) préservant la mesure, pour tout $n \geq 1$,

$$\mu(\varphi_{A_\varepsilon} \leq n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n T^{-k} A_\varepsilon\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(T^{-k} A_\varepsilon) = n\mu(A_\varepsilon).$$

Ces deux remarques suggèrent que φ_{A_ε} est typiquement de l'ordre de $\mu(A_\varepsilon)^{-1}$. Nous sommes donc amenés à étudier $\mu(A_\varepsilon)\varphi_{A_\varepsilon}$. Que peut-on dire de la loi de $\mu(A_\varepsilon)\varphi_{A_\varepsilon}$ quand $\mu(A_\varepsilon) \rightarrow 0$?

12.1.1 Deux contraintes

La réponse à cette question va dépendre en premier lieu du système dynamique étudié.

Exemple 12.1 (Rotation d'angle irrationnelle).

Soit $T_\theta : x \mapsto x + \theta$ [1] une rotation d'angle $\theta < 1/2$ irrationnel sur le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Choisissons $A_\varepsilon := [0, \varepsilon]$. Pour des raisons topologiques que nous laissons en exercice, la transformation induite en $[0, \varepsilon]$ est un échange de 2 ou 3 intervalles, et $\varphi_{[0, \varepsilon]}$ est constant sur chacun de ces intervalles. Plaçons-nous dans le cas où la transformation induite en $[0, \varepsilon]$ est un échange de 3 intervalles $(B_i)_{1 \leq i \leq 3}$. Alors $\varphi_{[0, \varepsilon]}$ prend trois valeurs $n_1 < n_2 < n_3 = n_1 + n_2$ sur $[0, \varepsilon]$. La loi de $\varepsilon\varphi_{[0, \varepsilon]}$ sous $\text{Leb}(\cdot | [0, \varepsilon])$ a au plus trois atomes, propriété qui se transfère à toute limite faible.

Quitte à ré-indexer les intervalles B_i , on peut supposer que $B_i = \{\varphi_{[0, \varepsilon]} = n_i\} \cap [0, \varepsilon]$. Comme $n_3 = n_1 + n_2$, l'intervalle B_3 est entre B_1 et B_2 . Le système dynamique $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T_\theta)$ est isomorphe à une tour au-dessus d'un échange d'intervalles, et plus précisément de la transformation qui échange B_1 et B_2 .

L'espace des phases de cette tour est $\bigsqcup_{i=1}^3 B_i \times \{0, \dots, n_i - 1\}$, l'ensemble $[0, \varepsilon]$ est identifié à $(B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3) \times \{0\}$, et la transformation associée à T_θ incrémentée la seconde coordonnée jusqu'à atteindre le plafond $n_i - 1$.

Pour tout $x \in B_i$ et $0 \leq k < n_i$, on a $\varphi_{[0, \varepsilon]}(x, k) = n_i - k$. Ainsi, la loi de $\varphi_{[0, \varepsilon]}$ sous Leb est uniforme discrète sur chacun des intervalles $[1, n_1]$, $[n_1 + 1, n_2]$ et $[n_2 + 1, n_1 + n_2]$.

Pour des travaux plus poussés sur les temps d'atteinte pour de tels systèmes, nous renvoyons aux travaux de L.A. Bunimovich et C.P. Dettman sur le billard dans le disque [43], ainsi qu'à ceux de J. Marklof et A. Strömbergsson sur les systèmes intégrables [170].

Ce cas de figure est très différent de celui que nous allons bientôt découvrir. Il faut donc être attentif au type de système dynamique étudié ; dans ce texte, nous nous intéressons plutôt à des systèmes hyperboliques. Mais ce n'est pas le seul obstacle. Par le lemme de Rokhlin [200], tout

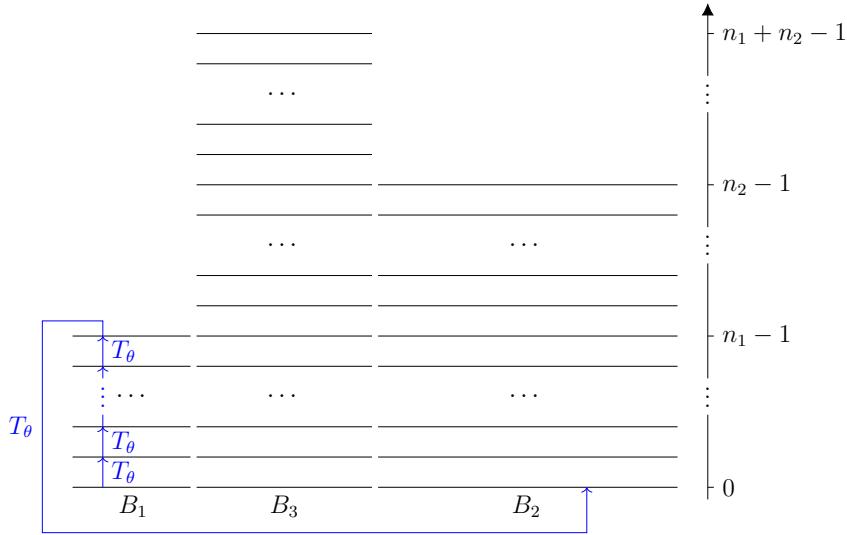


FIGURE 30 – Une portion d'orbite sous la rotation T_θ d'angle θ , représentée sous forme de tour.

système probabilisé ergodique est, à un ensemble de mesure aussi petite que voulue près, isomorphe à une tour de hauteur constante, c'est-à-dire similaire à la Figure 30 mais avec une seule colonne. Mais alors la loi du temps de retour à la base de cette tour est très proche d'une loi uniforme.

Il faut donc aussi être attentif aux événements A_ε étudiés ! Si l'on peut choisir des ensembles A_ε aussi compliqués que voulu, alors $\mu(A_\varepsilon)\varphi_{[0,\varepsilon]}$ peut être très proche d'une loi uniforme. Pour mieux contraindre le problème, on va se limiter à des ensembles *simples*. Par cela, on entend :

- Dans un cadre symbolique (sous-décalage de type fini, transformation Gibbs-Markov...) : A_ε sera typiquement un cylindre de petite mesure.
- Dans un cadre géométrique (transformation Anosov...) : A_ε sera typiquement une boule de petit rayon.

12.1.2 Systèmes hyperboliques

On suppose donc que (A, μ, T) est hyperbolique et que les événements $(A_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ sont suffisamment réguliers. Supposons que $\mu(A_\varepsilon) \ll 1$. La perte de mémoire dû à l'hyperbolité du système fait que, heuristiquement, le fait qu'une orbite $(T^n(x))_{n \geq 0}$ n'ait pas rencontré A_ε jusqu'à un temps N apporte peu d'information sur sa position $T^N(x)$ au temps N . Le point $T^N(x)$, sous ce conditionnement, sera donc à peu près équidistribué.

Si X est une limite en loi des variables aléatoires $(\mu(A_\varepsilon)\varphi_{A_\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$, alors X aura une propriété de perte de mémoire caractéristique des lois exponentielles. Heuristiquement, par le lemme de Kac (Lemme 9.1), X sera d'espérance 1, donc une loi exponentielle de paramètre 1.

Une obstruction est l'existence d'un point périodique x de petite période p dans A_ε : dans ce cas, ces petits voisinages de x vont tous s'intersecter substantiellement avec leur image sous T^p . Mais, par préservation de la mesure, cela réduit d'autant la probabilité de venir dans A_ε en venant de l'extérieur. Tout se passe comme si, vu de l'extérieur, A_ε avait une mesure effective plus petite.

De tels théorèmes remontent à B. Pitskel et M. Hirata [121, 191]. Nous les exprimerons dans le cadre des sous-décalages. Soit (A, T) un sous-décalage de type fini. Pour tout $x \in A$ et $n \geq 0$, notons $a_n(x) = [x_0, \dots, x_{n-1}]$ le cylindre de longueur n contenant x . Alors :

Théorème 12.2 (Hirata, 1993 [121]).

Soit (A, μ, T) un sous-décalage de type fini irréductible, où μ est une mesure d'équilibre pour un potentiel höldérien. Pour μ -presque tout $x \in A$, la suite de variables aléatoires $(\mu(a_n(x))\varphi_{a_n(x)})_{n \geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

On peut aussi chercher les limites en loi des temps de premier retour, c'est-à-dire des variables aléatoires $\mu(A_\varepsilon)\varphi_{A_\varepsilon}$ sous les loi $\mu(\cdot | A_\varepsilon)$. La dichotomie entre points périodiques et points non périodiques apparaît aussi plus clairement dans ce second énoncé.

Théorème 12.3 (Hirata, 1993 [121]).

Soit (A, T) un sous-décalage de type fini irréductible et μ une mesure d'équilibre pour un potentiel höldérien ϕ de pression topologique nulle. Soit $x \in A$. Pour tout $n \geq 0$, soit X_n la variable aléatoire valant $\mu(a_n(x))\varphi_{a_n(x)}$, définie sur l'espace A muni de la mesure de probabilité $\mu(\cdot | a_n(x))$. Alors la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre θ , où

- $\theta = 1 - e^{S_p^T \phi(x)}$ si x est périodique de période primitive p ;
- $\theta = 1$ sinon.

Nous renvoyons la lectrice à l'ouvrage de référence [168, Chapter 5] pour plus de détails.

Ces théorèmes sur les temps d'atteinte ou les temps de premier retour ont des versions fonctionnelles. On s'attend à ce qu'à la limite, les retours successifs soient indépendants et suivent chacun une loi exponentielle. Autrement dit,

Théorème 12.4. [121, 122]

Soit (A, T) un sous-décalage de type fini irréductible et μ une mesure d'équilibre pour un potentiel höldérien. Pour μ -presque tout $x \in A$, sous μ , la suite de processus

$$X_t^{(n)} := \text{Card} \{ k \leq \mu(a_n(x))^{-1}t : T^k(\cdot) \in a_n(x) \}$$

converge en loi vers un processus de Poisson d'intensité 1.

Les points périodiques apportent une difficulté supplémentaire dans la formulation d'un tel théorème. Si x est un point périodique, alors les retours dans $a_n(x)$ vont être groupés. Le processus limite sera alors un processus de Poisson "regroupé".

Si M. Hirata a démontré ces théorèmes pour des sous-décalages de type fini et des transformations Axiome A [121], ils sont robustes. On les retrouve pour des transformations non-uniformément hyperboliques telles que les applications de Liverani–Saussol–Vaienti de paramètre $\alpha < 1$ [98, 123], le billard stade [183], ou les applications unimodales [57]. Certains systèmes munis d'une mesure invariante infinie, comme des transformations non-uniformément dilatantes [39, 103] ou le gaz de Lorenz [182], ont aussi été étudiés ; les lois limites dans les analogues du Théorème 12.3 ne sont alors plus exponentielles.

Remarque 12.5 (Récurrence quantitative et processus maximaux).

La question de la récurrence quantitative, que nous avons brièvement abordée ici, est étroitement liée à l'étude des processus maximaux. Soient (A, μ, T) un système dynamique mesuré et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Posons

$$M_n := \max_{0 \leq k \leq n-1} f \circ T^k.$$

Alors, pour tous $n \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\{M_n \leq t\} = \{\varphi_{\{f > t\}} \geq n\},$$

et, si t est proche de $\max f$ et ce maximum est non dégénéré, les événements $\{f > t\}$ vont être petits.

Le processus $(M_n)_{n \geq 0}$ est croissant et majoré par $\max f$. Afin de quantifier sa croissance, on peut par exemple se donner une suite $(t_k)_{k \geq 0}$ croissante vers $\max f$, et étudier le temps nécessaire pour que le processus $(M_n)_{n \geq 0}$ dépasse le seuil t_1 , puis t_2 , etc. Cela revient à étudier les retours successifs en des ensembles de plus en plus petits $\{f > t_1\} \supset \{f > t_2\} \supset \dots$; là encore, nous renvoyons à [168].

Remarque 12.6 (Mouvement brownien brownien).

Plus généralement, les temps d'occurrence d'évènements rares dans des systèmes dynamiques hyperboliques vont avoir tendance à suivre une loi de Poisson. On trouve une application de cette idée dans le remarquable travail Brownian Brownian motion – I de N. Chernov et D. Dolgopyat [52]. Dans ce livre, les auteurs s'intéressent au mouvement de deux particules dans un billard de Sinai à horizon fini :

- Une particule ponctuelle de vitesse initiale 1 et de masse 1 ;
- Une particule massive de masse $M \gg 1$, de rayon $r > 0$ et de vitesse initiale nulle.

Ils montrent que, dans la limite $M \rightarrow +\infty$, la trajectoire de la particule massive suit un processus de Langevin (c'est-à-dire que sa vitesse, somme des petites impulsions quasi-aléatoires fournies par la particule ponctuelle, est un mouvement brownien) dont le coefficient de diffusion est donné par une formule de Green–Kubo [52, Theorem 2]. De plus, et c'est ce qui nous intéresse ici, dans la limite $M \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 0$, on trouve un régime dans lequel le coefficient de diffusion est facile à calculer : les chocs entre les particules deviennent rares et décorrélés, ce qui simplifie grandement la formule de Green–Kubo [52, Theorem 3].

Le mouvement brownien tel que conceptualisé par le botaniste R. Brown en 1827 décrit la trajectoire d'une particule massive (particule de pollen) dans un bain de particules beaucoup plus légères. Bien qu'il ne comporte qu'une seule particule légère, le modèle de N. Chernov et D. Dolgopyat se rapproche du mouvement brownien au sens de Brown, ce qui explique le titre de leur ouvrage.

12.1.3 Cas des systèmes Gibbs-Markov

Nous revenons maintenant aux systèmes Gibbs-Markov. Ceux-ci nous permettent de démontrer assez simplement quelques énoncés sur les temps d'atteinte de petites cibles. Nous en profiterons pour introduire divers outils utilisés pour estimer les probabilités d'atteinte dans des \mathbb{Z}^d -extensions. Nous proposons de montrer :

Proposition 12.7.

Soit (A, α, d, μ, T) un système dynamique Gibbs-Markov ergodique. Alors on a :

- *Tension exponentielle*⁶⁰ : Il existe des constantes $C, \kappa > 0$ telles que, pour tout $a \in \alpha$, pour tout $t \geq 0$,

$$\mu(\mu(a)\varphi_a \geq t) \leq Ce^{-\kappa t}.$$

- *Convergence en loi* : Pour toute mesure de probabilité $\nu \ll \mu$, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de α telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(a_n) = 0$, la suite de variables aléatoires $\mu(a_n)\varphi_{a_n}$ converge en loi (sous ν) vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Pour cela, nous introduisons des familles de cônes.

Définition 12.8 (Cônes de fonctions lipschitziennes, I).

60. C'est-à-dire que la famille de variables aléatoires $(\mu(a)\varphi_a)_{a \in \alpha}$ est tendue, avec une borne quantitative exponentielle sur les queues de ces variables aléatoires.

Soit (A, μ, T) une transformation Gibbs-Markov. Pour tout $K, \varepsilon \geq 0$, on définit un cône de fonctions lipschitziennes sur A par⁶¹ :

$$C_K(\varepsilon) := \left\{ f \in \mathcal{B} : f \geq 0, |f|_{\text{Lip}^\infty(A, \mu)} \leq K\varepsilon \|f\|_{\mathbb{L}^1(A, \mu)} \right\}. \quad (12.1)$$

Exercice 12.9.

Montrez que, dans un cône $C_K(\varepsilon)$, les normes $\mathbb{L}^1(A, \mu)$, $\mathbb{L}^\infty(A, \mu)$ et \mathcal{B} sont équivalentes.

Si (A, μ, T) est mélangeante, alors $\mathcal{L}^n \cap \mathcal{B}$ se rapproche exponentiellement vite du projecteur $\mathbf{1} \otimes \mu$. Par conséquent, il existe $\sigma \in (0, 1)$ tel que, pour tout n suffisamment grand, pour tous K et ε ,

$$\mathcal{L}^n(C_K(\varepsilon)) \subset C_{\sigma K}(\varepsilon); \quad (12.2)$$

c'est une propriété de *contraction de cône*.

Esquisse de démonstration de la Proposition 12.7.

Supposons dans un premier temps que (A, μ, T) est mélangeante. Soit $a \in \alpha$. Considérons l'opérateur $\mathcal{L}_a := \mathcal{L}(\mathbf{1}_{a^c} \cdot)$. Alors

$$\mu(\varphi_a \geq n) = \int_A \mathbf{1}_{a^c} \cap \mathbf{1}_{a^c} \circ T \cap \dots \cap \mathbf{1}_{a^c} \circ T^{n-1} \, d\mu = \int_A \mathcal{L}_a^n(\mathbf{1}) \, d\mu. \quad (12.3)$$

De plus, $\mathcal{L}_a = \mathcal{L} - \mathcal{L}(\mathbf{1}_a \cdot)$. Par la Proposition 3.24, $\|\mathcal{L}(\mathbf{1}_a \cdot)\|_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} \leq C\mu(a)$. L'itération de \mathcal{L}_a a donc deux effets opposés :

- Par l'Équation (12.2), l'application de \mathcal{L} a un effet contractant (régularisant) multiplicatif ;
- À cela, on ajoute une perturbation $-\mathcal{L}(\mathbf{1}_a \cdot)$ additive d'ordre $\mu(a)$.

L'interaction de ces deux effets implique :

- Une forme de stabilité : Pour tout $K \geq 0$, il existe $K' \geq 0$ tel que, pour tous $n \geq 0$ et $a \in \alpha$,

$$\mathcal{L}_a^n(C_K(\mu(a))) \subset C_{K'}(\mu(a)). \quad (12.4)$$

- Une forme de contraction de cône : Il existe $\sigma \in (0, 1)$ tel que, pour tout K suffisamment grand, pour tout n suffisamment grand, pour tout $a \in \alpha$,

$$\mathcal{L}_a^n(C_K(\mu(a))) \subset C_{\sigma K}(\mu(a)).$$

On en déduit aisément la tension exponentielle. Posons $K = 0$, et soit K' tel que donné par l'Équation (12.4). Alors, pour tout $n \geq 0$, dans \mathcal{B} ,

$$\mathcal{L}_a^n(\mathbf{1}) = \int_A \mathcal{L}_a^n(\mathbf{1}) \, d\mu \cdot [\mathbf{1} + O(\mu(a))],$$

d'où

$$\int_A \mathcal{L}_a^{n+1}(\mathbf{1}) \, d\mu = \int_A \mathcal{L}_a^n(\mathbf{1}) \, d\mu \cdot [1 - \mu(a) + O(\mu(a)^2)].$$

Par récurrence, si $\mu(a)$ est suffisamment petit, alors $\mu(\varphi_a \geq n) \leq (1 - \mu(a)/2)^n \leq e^{-\frac{\mu(a)}{2}n}$, d'où l'on déduit la tension exponentielle.

61. Le lecteur à l'oeil aguerri remarquera que ces cônes ne dépendent que d'un seul paramètre, ici $K\varepsilon$. En pratique, on fixera K assez vite, tandis que l'on gardera ε variable ; on aura donc affaire à des énoncés du type "Il existe K tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $C_K(\varepsilon)$ a les propriétés suivantes..." La notation $C_K(\varepsilon)$ n'est alors pas plus lourde, et sépare mieux les rôles de K et ε , qu'une notation qui n'utiliserait qu'un seul paramètre.

La convergence en loi découle d'une propriété de perte de mémoire. Soient $0 \leq t < t'$. Alors⁶²

$$\mu(\mu(a)\varphi_a \geq t' \mid \mu(a)\varphi_a \geq t) = \frac{\int_A \mathcal{L}_a^{\lfloor \mu(a)^{-1}t' \rfloor}(\mathbf{1}) \, d\mu}{\int_A \mathcal{L}_a^{\lfloor \mu(a)^{-1}t \rfloor}(\mathbf{1}) \, d\mu} \simeq \int_A \mathcal{L}_a^{\lfloor \mu(a)^{-1}(t'-t) \rfloor}(f_{a,t}) \, d\mu,$$

où

$$f_{a,t} = \frac{\mathcal{L}_a^{\lfloor \mu(a)^{-1}t \rfloor}(\mathbf{1})}{\int_A \mathcal{L}_a^{\lfloor \mu(a)^{-1}t \rfloor}(\mathbf{1}) \, d\mu}.$$

Or $f_{a,t}$ appartient à $C_{K'}(\mu(a))$ et est d'intégrale 1, donc est proche de $\mathbf{1}$. Par conséquent, $\mu(\mu(a)\varphi_a \geq t' \mid \mu(a)\varphi_a \geq t)$ est proche de $\mu(\mu(a)\varphi_a \geq t' - t)$.

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de α dont la mesure converge vers 0. Les lois des variables aléatoires $\mu(a_n)\varphi_{a_n}$ étant tendues, il existe des lois limites. Ces lois limites héritent de la propriété de perte de mémoire, caractéristique de la loi exponentielle. Enfin, les variables aléatoires $\mu(a_n)\varphi_{a_n}$ étant toutes d'espérances 1 et leurs lois ayant des queues exponentielles uniformes, la loi limite est aussi d'espérance 1, et est donc une loi exponentielle de paramètre 1.

Donnons-nous une loi initiale $\nu \ll \mu$. Par la propriété de mélange, $T_*^n(\nu)$ converge vers μ , et l'orbite d'un point a peu de chances de rencontrer un événement a petit avant que $T_*^n(\nu)$ ne soit très proche de μ . La loi de $\mu(a)\varphi_a$ sous ν sera donc proche de la loi de $\mu(a)\varphi_a$ sous μ ; on rencontre le même phénomène que dans les énoncés du théorème central limite (Théorème 3.30) ou du théorème central limite local (Proposition 6.4), dont les énoncés sont valables pour toute loi initiale absolument continue par rapport à μ .

Finalement, si (A, μ, T) est seulement ergodique, la décomposition en composantes périodiques (Proposition 3.11) et la propriété de grande image permettent de conclure. \square

Exemple 12.10 (Transformation de Gauss).

Soit $T : (0, 1] \rightarrow [0, 1)$ la transformation de Gauss. Comme nous l'avons vu, cette transformation est Gibbs-Markov, la partition associée étant $\alpha = \{a_n : n \geq 1\}$ avec $a_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, et la mesure de probabilité invariante étant $\mu = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x} dx$. Remarquons en particulier que

$$\mu(a_n) = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{n^2}.$$

Soient x un réel tiré uniformément dans $[0, 1]$ et $[0 : b_1, b_2, \dots]$ son développement en fraction continue. Soit $T_n(x) := \inf\{k \geq 1 : b_k(x) = n\}$ l'indice de la première apparition de n dans le développement en fraction continue de x . D'après la Remarque 1.6, $T_n \equiv \varphi_{a_n} + 1$ sur $\{T_n \geq 2\}$. Ce dernier événement est de mesure presque totale quand n est grand. Comme $\text{Leb} \ll \mu$, d'après le second point de la Proposition 12.7, $n^{-2}T_n$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{1}{\ln(2)}$.

Les deux points de la Proposition 12.7 permettent aussi d'obtenir la convergence des moments de φ_{a_n} . Soit $\nu \ll \mu$ une mesure de probabilité telle que $\frac{d\nu}{d\mu}$ est bornée. D'après le premier point, pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, la loi de $(\mu(a_n)\varphi_{a_n})^p$ sous ν est dominée par une loi intégrable. D'après le second point, cette même suite de variables aléatoires converge vers X^p , où X est exponentielle de paramètre 1. Par conséquent, on obtient

62. Une petite erreur, facile à contrôler, est due au fait que $\lfloor \mu(a)^{-1}(t' - t) \rfloor \neq \lfloor \mu(a)^{-1}t' \rfloor - \lfloor \mu(a)^{-1}t \rfloor$ en général; c'est pourquoi nous avons utilisons le signe \simeq à la ligne suivante.

Corollaire 12.11.

Soit (A, α, d, μ, T) un système dynamique Gibbs-Markov ergodique. Soit $\nu \ll \mu$ une mesure de probabilité telle que $\frac{d\nu}{d\mu} \in \mathbb{L}^\infty(A, \mu)$. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de α telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(a_n) = 0$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_A \varphi_{a_n}^p d\nu \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(1+p)}{\mu(a_n)^p}.$$

12.2 Systèmes à transitions rares

La théorie des temps d'atteinte d'évènements rares a une application importante : le contrôle de la décroissance des décorrélations dans des systèmes admettant une partition en parties presque invariantes, c'est-à-dire l'étude d'états dynamiques métastables.

12.2.1 Transitions entre deux ou plusieurs sous-systèmes

Soit (A, μ, T) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et suffisamment chaotique. Supposons que l'on puisse partitionner A en deux parties $A = B \sqcup C$ telles que :

- D'une part, B et C ne sont pas trop petits : $\mu(B), \mu(C) \simeq 1$;
- D'autre part, les transitions de B vers C ou de C vers B sont rares :

$$\mu(B \cap T^{-1}C) = \mu(C \cap T^{-1}B) \ll 1.$$

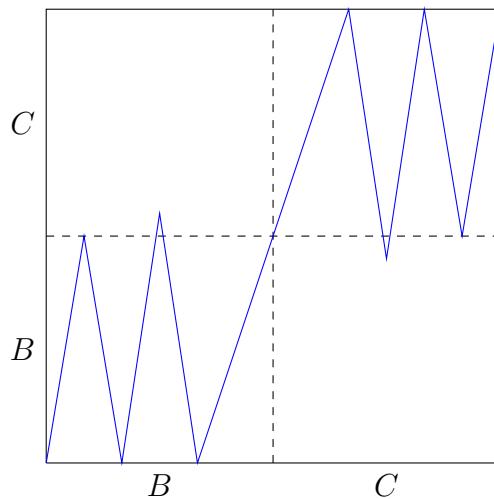


FIGURE 31 – En bleu : le graphe d'une transformation uniformément dilatante de l'intervalle telle que l'espace des phases ait une partition en deux ensembles B, C communiquant peu entre eux. Cet exemple s'adapte afin d'obtenir une famille $(T_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de telles transformations.

Posons $\varepsilon := \mu(B \cap T^{-1}C)$. Si l'on tire un point au hasard dans B selon $\mu(\cdot | B)$, alors la probabilité que son orbite passe de B à C à un instant n est d'au plus $\varepsilon \mu(B)^{-1} \ll 1$. Le temps d'atteinte de C est donc de l'ordre de $\varepsilon^{-1} \mu(B) \gg 1$, et suit une loi approximativement exponentielle. On dit que les états B et C sont *métastables*.

Dans le cadre de temps d'atteinte d'ensembles de petite mesure, on se donnait une famille $(A_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ d'évènements. Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, après une renormalisation adéquate, les temps de retours successifs en A_ε avaient pour processus limite un processus de Poisson.

Dans cette Sous-section, nous allons remplacer une seule transformation T par une famille de transformations $(T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vérifiant les hypothèses précédentes⁶³. On va s'intéresser à la partie de l'espace des phases dans laquelle est la trajectoire d'un point, et renormaliser en temps. Plus précisément, soit $g : A \rightarrow \{B, C\}$ définie par

$$g(x) := \begin{cases} B & \text{si } x \in B \\ C & \text{si } x \in C \end{cases}.$$

Posons enfin $X_t^{(\varepsilon)} := g \circ T_\varepsilon^{\lfloor \varepsilon^{-1} t \rfloor}$ à valeurs dans $\{B, C\}$. Alors, asymptotiquement, le processus $(X_t^{(\varepsilon)})_{t \geq 0}$ est sans mémoire, donc est un processus de Markov à deux états et à temps continu. Les transitions de B vers C se font à taux $\mu(B)^{-1}$ et les transitions de C vers B à taux $\mu(C)^{-1}$. Ce processus limite passe bien une proportion du temps $\mu(B)$ en B et une proportion du temps $\mu(C)$ en C , ce qui est cohérent avec le théorème ergodique⁶⁴.

De telles familles de systèmes $(T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sur l'intervalle ont été étudiées par C. Gonzalez Tokman, B.R. Hunt et P. Wright [107] d'une part, et D. Dolgopyat, P. Wright [84] d'autre part. Les premiers auteurs s'intéressent aux mesures invariantes des systèmes $(T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, qui à la limite sont combinaison convexes de mesures invariantes sur B et C séparément, et utilisent des méthodes de cônes réminiscentes de la Sous-sous-section 12.1.3. Les seconds montrent la convergence du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ défini précédemment vers un processus de Markov. Mentionnons aussi l'approche spectrale de G. Keller et C. Liverani [142].

Les résultats précédents s'adaptent à une partition $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ de A de n ensembles de mesures comparables et communiquant peu entre eux. Dans ce cas, on peut définir une famille de matrices stochastiques par

$$P_{A_i, A_j} := \frac{\mu(A_i \cap T^{-1}A_j)}{\mu(A_i)} =: (\text{Id} - \varepsilon R)_{ij}.$$

Le processus limite, sous une hypothèse d'irréductibilité, est un processus de Markov sur $\{A_1, \dots, A_n\}$ engendré par $-R$. Heuristiquement, on s'attend à ce que les n valeurs propres de plus grand module de l'opérateur de transfert \mathcal{L}_ε de T_ε soient approximativement données par le spectre de $P = \text{Id} - \varepsilon R$.

Remarque 12.12 (Décomposition en modes dynamiques).

Dans le sens inverse, si l'on trouve n valeurs propres proches de 1 de l'opérateur de transfert d'un système dynamique mesuré, on peut supposer que ce système a une décomposition en n composantes de mesures comparables et communiquant peu entre elles. Ces n composantes peuvent être retrouvées à l'aide des fonctions propres associées : ce sont les régions sur lesquelles ces fonctions sont à peu près constantes, ou au moins de signe constant.

Cette heuristique justifie la stratégie numérique de décomposition en modes dynamiques. Nous renvoyons le lecteur à l'article de revue [56] pour une présentation générale de ces méthodes, à [100, 101, 230] pour une application à la détection de structures cohérentes dans les courants océaniques, et à [24, 25] pour une comparaison entre les valeurs propres déterminées numériquement par ces méthodes et les résonances de Ruelle.

12.2.2 Inégalités de Cheeger

Le lien entre trou spectral et décomposition de l'espace des phases en composantes communiquant peu est un phénomène plus général que celui des systèmes dynamiques hyperboliques. C'est notamment le sujet des *inégalités de Cheeger*, qui admettent de nombreuses variantes.

63. En particulier, la partition $A = B \sqcup C$ et la mesure invariante μ ne dépendent pas de ε . C'est une hypothèse très forte, mais qui sera satisfaite en Section 13.

64. Heureusement !

Par exemple, soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible réversible sur un espace d'états fini A de cardinal d . Soit μ son unique mesure de probabilité stationnaire, et supposons que M_0 est choisi selon μ . Pour $B \subset A$, soient

$$k^*(B) := \frac{\mathbb{P}(M_0 \in B \text{ et } M_1 \in B^c)}{\mathbb{P}(M_0 \in B)} \quad (12.5)$$

et

$$k^* := \min_{\substack{B \subset A \\ 0 < \mathbb{P}(B) \leq 1/2}} k(B). \quad (12.6)$$

Le coefficient $k^*(B)$ est petit si B est de mesure proche de $1/2$, et si la probabilité de passer de B à B^c est faible. Par conséquent, k^* est petit si l'on peut décomposer A en deux grandes parties communiquant peu entre elles. De plus, $k^* > 0$ car la chaîne de Markov est irréductible.

Soit P le noyau de transition de la chaîne de Markov. Comme la chaîne de Markov est réversible, l'action $P \curvearrowright \mathbb{L}^2(A, \mu)$ est auto-adjointe. Soient $\lambda_{d-1} \leq \dots \leq \lambda_0 = 1$ ses valeurs propres. Alors :

Théorème 12.13. [151, Theorem 3.5]

Pour une chaîne de Markov réversible,

$$1 - 2k^* \leq \lambda_1 \leq 1 - \frac{(k^*)^2}{2}. \quad (12.7)$$

Remarquons que le Théorème 12.13 ne contrôle pas exactement le trou spectral ; il faudrait pour cela contrôler aussi λ_{d-1} , qui peut être très proche de -1 . La borne inférieure sur λ_1 repose sur des heuristiques proches de celles exposées dans la Sous-sous-section 12.2.1 ; la possibilité de travailler avec un opérateur auto-adjoint simplifie grandement les arguments. La borne supérieure sur λ_1 est plus difficile à obtenir.

Ce théorème a des versions sur les graphes. Ceci dit, les premiers énoncés, que nous allons brièvement présenter, portaient sur le spectre du laplacien sur des variétés riemanniennes. Soit M une variété riemannienne compacte connexe de dimension n . Pour toute partie $B \subset M$ dont le bord ∂B est une sous-variété de dimension $n-1$, on pose

$$k^*(B) := \frac{|\partial B|}{\text{Vol}(B)} \quad (12.8)$$

et

$$k^* := \inf_{\substack{B \subset M \\ 0 < \text{Vol}(B) \leq \text{Vol}(M)/2}} k(B). \quad (12.9)$$

Notons λ_1 la plus grande valeur propre non nulle de $\Delta \curvearrowright \mathcal{C}^\infty(M)$.

Théorème 12.14. [45, 51]

Soit M une variété riemannienne compacte connexe de dimension n . Soit $a \geq 0$ tel que la courbure de Ricci de M soit d'au moins $-(n-1)a^2$. Alors :

$$-2[a(n-1)k^* + 5(k^*)^2] \leq \lambda_1 \leq -\frac{(k^*)^2}{2}. \quad (12.10)$$

Pour le problème du laplacien sur un graphe pondéré, des généralisations de ces inégalités permettent de contrôler les valeurs propres suivantes à l'aide de coefficients de Cheeger généralisés (d'une façon intuitive : on découpe l'ensemble A des sommets du graphe en k parties pas trop petites, et ayant une frontière petite) [156]. L'analogue de la décomposition en modes dynamiques de la Remarque 12.12 est donné par des algorithmes de partitionnement spectral [231].

Ceci étant, le but de cette partie n'est pas seulement d'établir une analogie entre les opérateurs de transfert et le laplacien. Dans le cas du flot géodésique en courbure négative constante, le lien entre ces objets est beaucoup plus étroit.

Soit M une surface riemannienne compacte connexe de courbure négative constante. On dispose alors :

- De l'action de $\Delta \curvearrowright \mathbb{L}^2(M, \text{Vol})$. Le spectre de cet opérateur auto-adjoint non borné est $0 = -\lambda_0 \geq -\lambda_1 \geq \dots$
- Si X est le générateur du flot sur $T^1 M$, de l'action de X sur des espaces de Sobolev anisotropes de régularité suffisamment élevée.

Pour tout $k \geq 0$, soit r_k tel que $\lambda_k = \frac{1}{4} + r_k^2$. Alors, pour tout $m \geq 0$, on sait que $-\frac{1}{2} \pm ir_k - m$ est une résonance de Ruelle de X , et que toutes les résonances de Ruelle sont de cette forme⁶⁵. On se référera à ce propos, par exemple, aux articles de F. Faure et M. Tsujii [91, 92, 114], ainsi qu'à la présentation et aux travaux référencés dans [86].

En particulier, si $\lambda_k \ll 1$, alors $\frac{1-\sqrt{1-4\lambda_k}}{2} \simeq \lambda_k$ est une résonance de Ruelle, et toutes les résonances de Ruelle de partie réelle supérieure à $-1/2$ sont de cette forme. Tout contrôle sur λ_k apporté par des inégalités de Cheeger se traduit alors en contrôle sur le trou spectral de X , et donc en décroissance des corrélations pour le flot géodésique sur $T^1 M$.

13 Calcul asymptotique des probabilités d'atteinte

Il est temps d'énoncer les principaux théorèmes de [226] et d'en décrire la stratégie de démonstration.

13.1 Argument principal, cas mélangeant

Revenons au calcul des probabilités d'atteinte dans des \mathbb{Z}^d -extensions de systèmes Gibbs-Markov. Soit I un ensemble fini et $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ une famille d'injections de I dans \mathbb{Z}^d telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\sigma_t(i) - \sigma_t(j)| = +\infty$ pour tous $i \neq j$. Sous cette condition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_t = \text{Id}$.

Dans la Sous-section 11.4, nous avions supposé que la famille $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ avait une forme limite (Hypothèse 11.6). Cependant, pour appliquer les stratégies attenantes aux systèmes à transitions rares de la Sous-section 12.2, il est beaucoup plus aisément de supposer connu le comportement des probabilités de transitions... Précisément les quantités que nous souhaitons calculer !

Nous allons supposer dans un premier temps que de telles probabilités de transitions existent, en déduire l'opérateur potentiel discréétisé, puis utiliser un argument de compacité pour inverser cette relation.

Hypothèse 13.1.

Il existe une matrice R irréductible⁶⁶ et une fonction a tendant vers 0 en $+\infty$ telles que

$$P_t =_{t \rightarrow +\infty} \text{Id} - a(t)R + o(a(t)).$$

Pour tout t , les sommes de chaque ligne et de chaque colonne de P_t sont égales à 1. Soit R une matrice satisfaisant les conditions de l'Hypothèse 13.1. Alors les sommes de chaque ligne et de chaque

65. Sauf éventuellement sur $-1 - \frac{1}{2}\mathbb{N}$, ce qui n'a pas d'importance pour la suite.

66. C'est-à-dire qu'elle satisfait une définition de l'irréductibilité semblable à celle des matrices stochastiques, ou encore que $\text{Id} - \varepsilon R$ est une matrice stochastique irréductible pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

colonne de R sont nulles, donc $R \curvearrowright \mathbb{C}1$ est nulle et R préserve \mathbb{C}_0^I . De plus, l'irréductibilité implique qu'il existe un trou spectral, au sens où

$$\rho_R := \min_{\lambda \in \text{Sp}(R \curvearrowright \mathbb{C}_0^I)} \Re(\lambda) > 0.$$

Remarquons que la transformation $T_t : [I] \rightarrow [I]$ est une perturbation de la transformation $\bigoplus_{j \in I} T_{[0]}$ qui agit comme $T_{[0]}$ sur chaque $[j]$. Les transitions d'une partie $[i]$ à une partie $[j] \neq [i]$ sont des événements rares. Nous pouvons adapter les outils introduits en Sous-sous-section 12.1.3. Nous aurons cependant à faire face à deux difficultés supplémentaires :

- D'une part, il y a $\text{Card}(I)$ ensembles deux à deux disjoints et presque invariants dans $[I]$. Si l'on fixe un de ces ensembles, disons $[i]$, il y a $\text{Card}(I) - 1$ événements rares possibles, correspondant aux transitions vers un des $[j] \neq [i]$.
- D'une part, nous sommes dans le cadre de systèmes à transitions rares, comme en Sous-section 12.2. Il ne suffit pas savoir quand l'un de ces événements rares advient – c'est-à-dire quand une orbite sous T_t passe d'un site à un autre – mais il faut aussi contrôler ce qu'il se passe après ces transitions.

Notre raisonnement fera intervenir quelques ingrédients supplémentaires. Tout d'abord, nous devons adapter la Définition 12.8 des cônes de fonctions lipschitziennes à notre problème.

Définition 13.2 (Cônes de fonctions lipschitziennes, II).

Soit (A, μ, T) une transformation Gibbs-Markov et I un ensemble fini. Pour tous $K, \varepsilon \geq 0$, on définit un cône de fonctions lipschitziennes sur $A \times I$ par :

$$C_K(\varepsilon) := \left\{ f \in \mathcal{B}_I : f \geq 0, \|(\text{Id} - \Pi^* \Pi_*)f\|_{\mathcal{B}_I} \leq K\varepsilon \|f\|_{\mathbb{L}^1(A, \mu)} \right\}.$$

Autrement dit, une fonction $f : [I] \rightarrow \mathbb{R}_+$ appartient à $C_K(\varepsilon)$ si, sur chaque $[j]$, elle est proche (en norme lipschitzienne) de sa moyenne sur $[j]$.

Ces cônes définissent une norme sur \mathcal{B}_I :

$$\|f\|_{K, \varepsilon} := \inf_{\substack{f_+, f_- \in C_K(\varepsilon) \\ f = f_+ - f_-}} \max \left\{ \|f_+\|_{\mathbb{L}^1([I], \mu_I)}, \|f_-\|_{\mathbb{L}^1([I], \mu_I)} \right\}.$$

Si $f \in \Pi^*(\mathbb{C}^I)$ est constante sur chaque $[j]$, alors sa norme $\|f\|_{K, \varepsilon}$ ne dépend ni de K ni de ε .

Remarque 13.3 (Systèmes lents-rapides).

De telles familles paramétrées de cônes apparaissent dans certains travaux sur les systèmes à transitions rares [107], mais aussi dans d'autres domaines proches. La famille d'opérateurs $(\mathcal{L}_t^n)_{n \geq 0}$ a deux échelles de temps caractéristiques. À l'échelle $\Theta(1)$, le fait que $(A, \mu, T_{[0]})$ est supposée mélangeante fait que \mathcal{L}_t^n homogénéise chaque $[i]$, mais il y a peu de communication entre différents sites. Les transitions entre différents sites se font à l'échelle de temps $\Theta(a(t)^{-1})$. Ces deux échelles sont découpées à la limite $t \rightarrow +\infty$.

Les systèmes lents-rapides exhibent le même découplage entre deux échelles de temps. Par exemple, soit $(F_t)_{t \geq 0}$ une famille de transformations de $\Omega \times \mathbb{S}_1$ telle que

$$F_t(x, \theta) = (f_t(x, \theta), \theta + a(t)g(x, \theta)),$$

où $x \mapsto f_\varepsilon(x, \theta)$ est une famille uniformément hyperbolique de transformations de Ω . Alors la première variable x évolue à l'échelle de temps $\Theta(1)$, tandis que la deuxième variable θ évolue à l'échelle de temps $\Theta(a(t)^{-1})$. À la limite, ces deux échelles de temps sont découpées, et l'évolution de θ est moyennée en x .

Dans le contexte des systèmes lents-rapides, de telles familles de cônes (ou de paires standards) ont été utilisées. L'article [69] présente ces techniques dans un cadre simplifié (où $f_t \curvearrowright \Omega$ sont une famille de transformations dilatantes du cercle), tandis que les travaux [52, 70, 80] étudient divers systèmes partiellement hyperboliques ou billards de Sinai. Ce sont ces travaux qui ont en premier inspiré l'auteur à utiliser la famille de cônes introduite à la Définition 13.2 dans le contexte de ce mémoire.

On dispose alors d'un analogue de la convergence en loi dans la Proposition 12.7 :

Proposition 13.4. *[226, Corollaire 2.14]*

Soit $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne, ergodique et conservatrice d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) . Supposons que $(A, \mu, T_{[0]})$ est mélangeante, ainsi que l'Hypothèse 13.1.

Soient $K, T_{\max} > 0$. Soit $(f_t)_{t \geq 0}$ une famille de fonctions dans \mathcal{B}_I . Supposons que

$$C := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \|f_t\|_{K, a(t)} < +\infty.$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{s \in [0, T_{\max}]} \left\| \Pi_* \mathcal{L}_\varepsilon^{\lfloor s/a(t) \rfloor} f_t - e^{-sR^T} \Pi_* f_t \right\|_{\ell^1(I)} = 0,$$

et la convergence est uniforme à K et C fixés.

L'analogue de la tension exponentielle dans la Proposition 12.7 est :

Proposition 13.5. *[226, Proposition 2.15]*

Soit $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne, ergodique et conservatrice d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) . Supposons que $(A, \mu, T_{[0]})$ est mélangeante, ainsi que l'Hypothèse 13.1.

Soient $\rho \in (0, \rho_R)$ et $K > 0$. Il existe une constante C telle que, pour tout t suffisamment grand, pour tout $n \geq 0$,

$$\|\mathcal{L}_t^n\|_{(\mathcal{B}_{I,0}, \|\cdot\|_{K, a(t)})} \leq C e^{-\rho a(t)n}.$$

La démonstration de la Proposition 13.5 repose sur la Proposition 13.4, ainsi que sur la transposition d'un argument de couplage classique pour montrer la décroissance exponentielle des corrélations pour des chaînes de Markov [227]. Les cônes de fonctions sont utilisés d'une façon similaire à ce que nous avons présenté dans la démonstration de la Proposition 12.7.

Ces deux propositions permettent de calculer le comportement asymptotique de l'opérateur potentiel discréétisé. Soit $(f_t)_{t \geq 0}$ une famille de fonctions dans $\mathcal{B}_{I,0}$ telle que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|f_t\|_{K, a(t)} < +\infty$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}_t^n(f_t) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}_t^{\lfloor s \rfloor} f_t \, ds \\ &= \frac{1}{a(t)} \int_0^{+\infty} \mathcal{L}_t^{\lfloor s/a(t) \rfloor} f_t \, ds \\ &\simeq \frac{1}{a(t)} \int_0^{+\infty} \Pi^* e^{-sR^T} \Pi_*(f_t) \, ds \\ &= \frac{1}{a(t)} \Pi^* R^{T,-1} \Pi_*(f_t) + o\left(\frac{1}{a(t)}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $f \in \mathbb{C}_0^I$,

$$Q_t(f) = \frac{1}{a(t)} \Pi_* \Pi^* R^{T,-1} \Pi_*(f) + o\left(\frac{1}{a(t)}\right) = \frac{1}{a(t)} R^{T,-1}(f) + o\left(\frac{1}{a(t)}\right).$$

Ce type de développement asymptotique se retrouve aussi dans [84]. Bien que les résultats que nous présentons ici soient plus faibles, l'image spectrale est, au moins heuristiquement, donnée par la Figure 32.

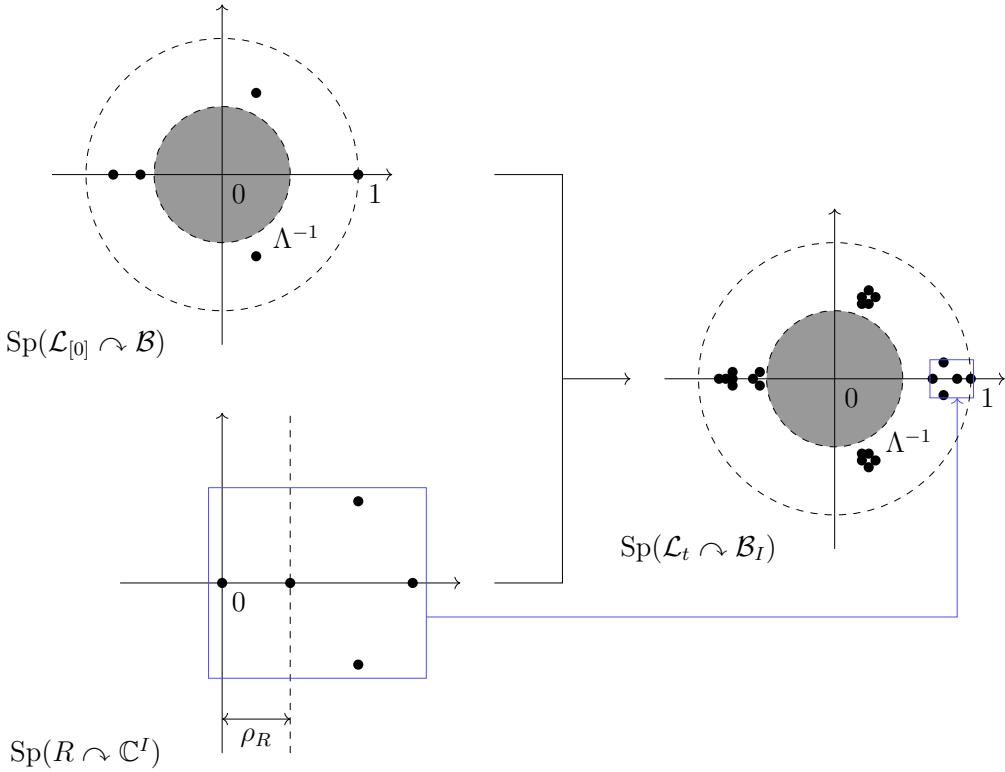


FIGURE 32 – Image conjecturale du lien entre les spectres de $\mathcal{L}_{[0]}$, R et \mathcal{L}_t quand $|I| = 5$. Le spectre de \mathcal{L}_t est une perturbation de magnitude $a(t)$ de 5 copies de $\text{Sp}(\mathcal{L}_{[0]} \cap \mathcal{B})$, et le spectre de R se retrouve – à symétrie centrale près – en zoomant dans une fenêtre de taille $\simeq a(t)$ autour de $1 \in \text{Sp}(\mathcal{L}_t \cap \mathcal{B}_I)$.

Ces arguments nous mènent au théorème principal de l'article [226], ou du moins à une version légèrement moins générale d'icelui, car nous supposons ici que $(A, \mu, T_{[0]})$ est mélangeante.

Théorème 13.6. [226, Theorem 1.15]

Soit $(\mathbb{Z}^d, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne, ergodique et conservative d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) . Supposons que $(A, \mu, T_{[0]})$ est mélangeante.

Soit I un ensemble fini et $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ une famille d'injection de I dans \mathbb{Z}^d . Notons P_t la matrice des probabilités de transition du système induit sur $[\Sigma_t] = [\sigma_t(I)]$, et $Q_t = \Pi_* (\text{Id} - \mathcal{L}_t)^{-1} \Pi^* \cap \mathbb{C}_0^I$ l'opérateur potentiel discréte. Il y a équivalence entre :

- Il existe une matrice R irréductible et une fonction a tendant vers 0 en $+\infty$ telles que $P_t =_{t \rightarrow +\infty} \text{Id} - a(t)R + o(a(t))$.
- Il existe un opérateur $S \cap \mathbb{C}_0^I$ irréductible⁶⁷ et une fonction a tendant vers 0 en $+\infty$ telles que $Q_t =_{t \rightarrow +\infty} a(t)^{-1}S + o(a(t)^{-1})$.

Sous l'une de ces conditions, on peut choisir les fonctions a égales et $S \cap \mathbb{C}_0^I = R^{T,-1} \cap \mathbb{C}_0^I$.

Esquisse de démonstration du Théorème 13.6.

Le cas direct découle des calculs précédent. La seule chose à vérifier est l'irréductibilité de $S = R^{T,-1}$, qui ne pose pas de problème particulier.

67. En un sens que nous ne détaillerons pas ici. Nous renvoyons à [226, Definition 1.13]. Le critère précis peut paraître étrange, mais est très pratique à la fois dans les démonstrations et dans les applications.

Cependant, le sens réciproque nous intéresse plus : c'est celui-ci qui nous permet d'estimer les probabilités de transition. Supposons donc que $Q_t = a(t)^{-1}S + o(a(t)^{-1})$ pour un certain opérateur irréductible S .

On utilise un argument de compacité. Il suffit de montrer que $a(t)^{-1}(\text{Id} - P_t)$ reste dans un compact de matrices irréductibles. Une fois que l'on a montré cela, on considère une sous-suite $(t_n)_{n \geq 0}$ telle que $a(t_n)^{-1}(\text{Id} - P_{t_n})$ converge vers une matrice irréductible R . Alors, d'après le sens direct, $S \curvearrowright \mathbb{C}_0^I = R^{T,-1} \curvearrowright \mathbb{C}_0^I$, ce qui caractérise R . La famille $a(t)^{-1}(\text{Id} - P_t)$ a donc une unique matrice limite, donc converge.

Il reste à montrer cette condition de compacité. Dans un premier temps, nous montrons le théorème pour $|I| = 2$, c'est-à-dire quand $I = \{i, j\}$. En effet, dans ce cas, P_t est une matrice 2×2 , stochastique, et qui préserve la mesure de comptage : elle n'a qu'un seul paramètre libre. Sans perte de généralité, $a(t)$ est la probabilité qu'une excursion de $[\sigma_t(i)]$ dans \mathbb{Z}^d atteigne $[\sigma_t(j)]$ avant de revenir en $[\sigma_t(i)]$, de telle sorte que

$$P_t = \begin{pmatrix} 1 - a(t) & a(t) \\ a(t) & 1 - a(t) \end{pmatrix}.$$

Le sens direct du théorème suffit alors.

Dans le cas général, on peut induire le système $([I], \mu_t, T_t)$ sur chaque sous-ensemble $[\{i, j\}]$ de cardinal 2 de I . L'irréductibilité de S implique alors que $Q_{\{i,j\},t} = a(t)^{-1}S_{\{i,j\}} + o(a(t)^{-1})$ pour une matrice $S_{\{i,j\}}$ irréductible 2×2 . Le cas $|I| = 2$ permet alors de conclure que les orbites partant de $[i]$ dans $[I]$ ont une probabilité de l'ordre de $a(t)$ de passer par $[j]$ avant de revenir en $[i]$. La matrice $a(t)^{-1}(\text{Id} - P_t)$ reste donc dans un compact, ce qui termine la démonstration. \square

13.2 Périodicité et structure des extensions ergodiques

La différence entre le Théorème 13.6 et [226, Theorem 1.15] est l'hypothèse additionnelle que le système $(A, \mu, T_{[0]})$ est mélangeant. Dans l'article [226], cette hypothèse est retirée grâce à une jolie curiosité. Si $(A, \mu, T_{[0]})$ n'est pas mélangeante, par la Proposition 3.11, elle a une décomposition en composantes périodiques. L'objectif suivant est de comprendre ce qu'une telle décomposition nous dit sur l'extension $(\mathbb{Z}^d, \tilde{\mu}, \tilde{T})$.

Deux cas de figure peuvent survenir, que nous appellerons respectivement *monochromatique* et *bichromatique*, le premier étant *a priori* le plus fréquent. La connexité de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ intervient dans cette analyse, ce qui explique les comportements différents qui peuvent advenir en dimension 1 et 2.

Proposition 13.7. [226, Proposition 3.3]

Soit $(\mathbb{Z}^d, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^d -extension markovienne, ergodique et conservatrice d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) . Soit M la période de $(A, \mu, T_{[0]})$, et $A = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}} A_k$ sa décomposition en composantes périodiques.

Alors il existe $R > 0$ ayant les propriétés suivantes. Soit $\Sigma \subset \mathbb{Z}^d$ non vide. Supposons que $\min_{p \neq q \in \Sigma} \|p - q\| \geq R$. Ou bien :

- $d \in \{1, 2\}$, et l'extension est monochromatique. Alors il existe $\ell \in \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ tel que, presque sûrement, les transitions entre différents sites de $[\Sigma]$ se font uniquement de $A_{\ell-1} \times \Sigma$ vers $A_\ell \times \Sigma$. Autrement dit, toutes les transitions se font sur la même période.
- $d = 1$, et l'extension est bichromatique⁶⁸. Écrivons alors $\Sigma = \{\dots, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \dots\} = \{\sigma_n : n \in I\}$. Il existe ℓ_- , $\ell_+ \in \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ telle que, presque sûrement, les transitions entre différents sites de $[\Sigma]$ se font uniquement de $A_{\ell_+-1} \times \{\sigma_n\}$ vers $A_{\ell_-} \times \{\sigma_{n+1}\}$, ou de $A_{\ell_- - 1} \times \{\sigma_n\}$ vers $A_{\ell_+} \times \{\sigma_n\}$.

68. Nous renvoyons à [226, Sub-section 3.1] pour une définition.

vers $A_{\ell_+} \times \{\sigma_{n-1}\}$. Autrement dit, les transitions montantes ou descendantes se font sur des périodes différentes.

Exemple 13.8 (Une extension monochromatique).

Soit (A, μ, T) la transformation Gibbs-Markov donnée par :

- $A = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,
- μ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur A ,
- $T(x, k) = (3x, k + 1)$.

Soit

$$F(x, k) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0, 1/3] \text{ et } k = 0 \\ +1 & \text{si } x \in [2/3, 1] \text{ et } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette extension est monochromatique, avec $M = 5$, $A_k = \mathbb{T}^1 \times \{k\}$ et $\ell = 1$.

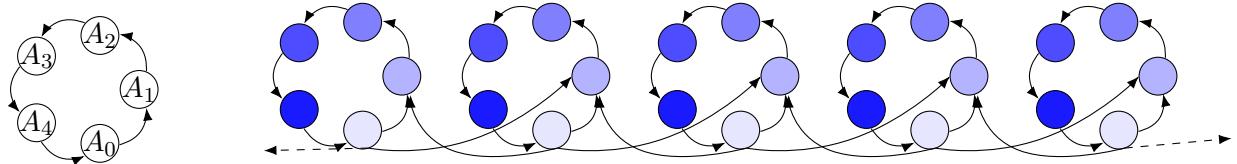


FIGURE 33 – À gauche : la décomposition en composantes périodiques $\{A_0, A_1, \dots, A_4\}$ de la transformation $(A, \mu, T_{[0]})$ de l’Exemple 13.8, ainsi que les transitions autorisées par T entre ces composantes. À droite : la \mathbb{Z} -extension de T par F et ses transitions autorisées. Les cinq nuances de bleu sont associées aux cinq éléments de la partition $\{A_0 \times \mathbb{Z}, A_1 \times \mathbb{Z}, \dots, A_4 \times \mathbb{Z}\}$ de \mathbb{Z} . Les transitions autorisées mènent toutes ou bien à une nuance un degré plus foncée, ou bien de la nuance la plus foncée à la nuance la plus claire.

Exemple 13.9 (Une extension bichromatique).

Soit (A, μ, T) la transformation Gibbs-Markov donnée par :

- $A = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,
- μ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur A ,
-

$$T(x, k) = \begin{cases} (2x, 3) & \text{si } x \in [0, 1/2] \text{ et } k = 0 \\ (2x, 1) & \text{si } x \in [0, 1/2] \text{ et } k = 2 \\ (2x, k + 1) & \text{sinon} \end{cases} .$$

Soit

$$F(x, k) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0, 1/2] \text{ et } k = 0 \\ +1 & \text{si } x \in [1/2, 1] \text{ et } k = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Cette extension est bichromatique, avec $M = 5$, $A_k = \mathbb{T}^1 \times \{k\}$, $\ell_+ = 1$ et $\ell_- = 3$.

Question 13.10 (Structure des extensions bichromatiques).

Les \mathbb{Z}^2 -extensions sont toutes monochromatiques. Nous avons de plus montré dans [226, Proposition 3.2] que, si $F : A \rightarrow \mathbb{Z}$ est non essentiellement bornée, alors la \mathbb{Z} -extension associée est aussi monochromatique. Un résultat plus fort semble plausible : si une \mathbb{Z} -extension est bichromatique, alors il existe un cobord borné $u \circ T - u$ tel que $F + u \circ T - u$ est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. L’intuition derrière cette question est que, si cette dernière condition n’est pas vérifiée, alors une trajectoire de σ_{n-1} vers $\sigma_n > \sigma_{n-1}$ peut sauter au-dessus de σ_n avant d’y revenir, ce qui brise la distinction entre trajectoires montantes et trajectoires descendantes.

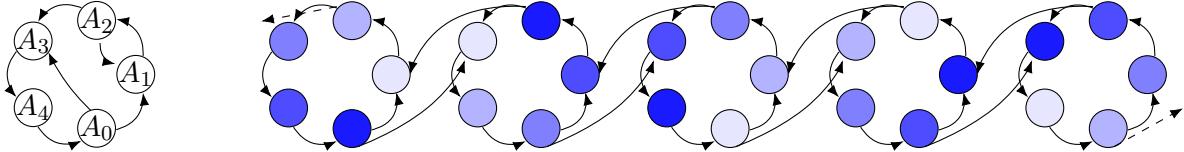


FIGURE 34 – À gauche : la décomposition en composantes périodiques $\{A_0, A_1, \dots, A_4\}$ de la transformation $(A, \mu, T_{[0]})$ de l’Exemple 13.9, ainsi que les transitions autorisées par T entre ces composantes. À droite : la \mathbb{Z} -extension de T par F et ses transitions autorisées. Les cinq nuances de bleu sont associées aux cinq éléments de la partition $\{\bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} A_{k-2n} \times \{n\} : k \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$ de $[\mathbb{Z}]$. Les transitions autorisées mènent toutes ou bien à une nuance un degré plus foncée, ou bien de la nuance la plus foncée à la nuance la plus claire.

Grâce à la Proposition 13.7, même si $(A, \mu, T_{[0]})$ n’est pas mélangeante, nous disposons d’une description précise des composantes périodiques des systèmes induits $([I], \mu_I, T_t)$. Cela permet de retrouver le théorème 13.6 dans ce cadre, d’où :

Proposition 13.11.

Dans le Théorème 13.6, on peut enlever l’hypothèse que $(A, \mu, T_{[0]})$ est mélangeante.

13.3 Quelques exemples

Tout est en place. La méthode de Nagaev–Guivarc’h, à travers la Proposition 11.7, permet de calculer la limite de l’opérateur potentiel discréétisé. Ensuite, le Théorème 13.6, éventuellement renforcé par la Proposition 13.11, permet d’en déduire un développement asymptotique des probabilités d’atteinte. Il ne reste qu’à en récolter les fruits. Nous résumons ici quelques exemples, sans les démontrer ; si leur preuve peut être laborieuse, elle ne fait pas intervenir de nouvelle idée importante.

Ci-suivent des énoncés généraux dans le cadre d’extensions de variance finie en dimension 1 et 2, et deux cas particuliers d’extensions de dimension 1 à queues lourdes.

Proposition 13.12. [226, Proposition 6.1]

Soit $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z} -extension markovienne, ergodique et conservative d’une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Supposons que F est centrée et de carré intégrable. On pose $\text{Var} := \sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F)$.

Soient $I = \{1, \dots, \text{Card}(I)\}$ et $\sigma : I \hookrightarrow \mathbb{R}$ une application injective croissante. Pour tout $t \geq 0$, donnons-nous $\sigma_t : I \hookrightarrow \mathbb{Z}$ telle que $\sigma_t(i) = t\sigma(i) + o(t)$ pour tout $i \in I$. Soit P_t la matrice des probabilités de transition du système induit sur $[\Sigma_t] := [\sigma_t(I)]$. Alors :

$$P_t =_{t \rightarrow +\infty} \text{Id} - \frac{\text{Var}}{t} R + o(t^{-1}),$$

où R est la matrice tridiagonale, symétrique et irréductible définie par :

$$\begin{cases} R_{i,i+1} = -\frac{1}{2(\sigma(i+1)-\sigma(i))} & \forall 1 \leq i < \text{Card}(I), \\ R_{i,i-1} = -\frac{1}{2(\sigma(i)-\sigma(i-1))} & \forall 1 < i \leq \text{Card}(I), \\ R_{ij} = 0 & \text{si } |i-j| \geq 2, \\ R_{ii} = \sum_{j \in I, j \neq i} |R_{ij}| & \forall i \in I. \end{cases} \quad (13.1)$$

Sous les hypothèses de la Proposition 13.12, et si l’on pose $\Delta_i^j := |\sigma(j) - \sigma(i)|$, alors les matrices

de transition $(P_t)_{t \geq 0}$ sont donc données par :

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 - \frac{\text{Var}}{2t\Delta_1^2} & \frac{\text{Var}}{2t\Delta_1^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\text{Var}}{2t\Delta_1^2} & 1 - \frac{\text{Var}}{2t\Delta_1^2} - \frac{\text{Var}}{2t\Delta_2^3} & \frac{\text{Var}}{2t\Delta_2^3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{Var}}{2t\Delta_2^3} & 1 - \frac{\text{Var}}{2t\Delta_2^3} - \frac{\text{Var}}{2t\Delta_3^4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - \frac{\text{Var}}{2t\Delta_{|I|-2}^{|I|-1}} - \frac{\text{Var}}{2t\Delta_{|I|-1}^{|I|}} & \frac{\text{Var}}{2t\Delta_{|I|-1}^{|I|}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\text{Var}}{2t\Delta_{|I|-1}^{|I|}} & 1 - \frac{\text{Var}}{2t\Delta_{|I|-1}^{|I|}} \end{array} \right) + o(t^{-1}).$$

Cet énoncé se démontre facilement dans le cadre de la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} , à l'aide d'un argument de martingale. Cela permet d'ailleurs de conjecturer la matrice R et de vérifier directement que $RS = \text{Id}$ sur \mathbb{C}_0^I , où S a été calculée à l'Exemple 11.8, plutôt que d'inverser une matrice.

Passons maintenant aux \mathbb{Z}^2 -extensions.

Proposition 13.13. [226, Proposition 0.2]

Soit $([\mathbb{Z}^2], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z}^2 -extension markovienne, ergodique et conservatrice d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Supposons que F est centrée et de carré intégrable. Soit Cov l'opérateur de covariance asymptotique de F , défini par l'Équation (3.18).

Soient I un ensemble fini et $\sigma : I \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ une application injective. Pour tout $t \geq 0$, donnons-nous $\sigma_t : I \hookrightarrow \mathbb{Z}$ telle que $\sigma_t(i) = t\sigma(i) + o(t)$ pour tout $i \in I$. Soit P_t la matrice des probabilités de transition du système induit sur $[\Sigma_t] := [\sigma_t(I)]$. Alors :

$$P_t =_{t \rightarrow +\infty} \text{Id} - \frac{\pi \sqrt{\det(\text{Cov})}}{\ln(t)} R + o(\ln(t)^{-1}),$$

où R est la matrice symétrique et irréductible définie par :

$$\begin{cases} R_{ij} = -\frac{1}{|I|} & \text{si } i \neq j \in I, \\ R_{ii} = \frac{|I|-1}{|I|} & \forall i \in I. \end{cases}$$

Ce deuxième exemple a une particularité intéressante : tous les termes hors diagonale de la matrice R sont égaux. Donnons-nous une partie finie $\Sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\} \subset \mathbb{Z}^2$ dont les distances entre éléments distincts sont toutes élevées et du même ordre de grandeur. Alors, partant de $[\sigma_0] \subset [\Sigma]$, la probabilité de revenir en $[\Sigma]$ en $[\sigma_i]$ est à peu près la même pour tous les $i \neq 0$: la géométrie de Σ n'intervient pas.

Nous terminons par deux calculs explicites pour des \mathbb{Z} -extensions dont les sauts sont dans le bassin d'attraction d'une loi de Lévy. Dans ce cas, nous disposons d'une formule explicite pour l'opérateur potentiel discrétilisé, mais l'auteur n'a pas trouvé de telle formule pour les probabilités de transition. Cela n'empêche pas de calculer ces matrices dans des cas précis : il suffit d'inverser une matrice explicite.

Les deux exemples qui suivent sont [226, Example 6.5] et [226, Example 6.6].

Exemple 13.14 (Lois de Lévy asymétriques).

Soit $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z} -extension markovienne, ergodique et conservative d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Supposons que F est dans le bassin d'attraction d'une loi de Lévy stable de paramètre $\alpha \in (1, 2)$ maximalement asymétrique : $c_- = 0$ et, sans perte de généralité,

$c_+ = 1$. Prenons $I = \{A, B, C\}$ et $(\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)) = (-1, 0, 1)$. Soit $\sigma_t = t\sigma + o(t)$. Alors, dans la base $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_C)$,

$$R = \frac{\pi}{|\sin(\alpha\pi)|} \begin{pmatrix} 1 & -(2^{\alpha-1}-1) & -(2-2^{\alpha-1}) \\ -1 & 2^{\alpha-1} & -(2^{\alpha-1}-1) \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13.2)$$

et $P_t =_{t \rightarrow +\infty} \text{Id} - \frac{t}{L(t)} R + o(tL(t)^{-1})$.

Le terme en bas à gauche de la matrice R est 0, ce qui signifie que les transitions de $[\sigma_t(C)] \simeq t$ à $[\sigma_t(A)] \simeq -t$ qui évitent [0] sont rares (de probabilité $o(tL(t)^{-1})$). Les transitions de $[\sigma_t(A)] \simeq -t$ à $[\sigma_t(C)] \simeq t$ qui évitent [0] sont beaucoup plus fréquentes : le processus peut faire un grand saut au-dessus de $[\sigma_t(B)]$ et $[\sigma_t(C)]$, puis redescendre par de petits sauts jusqu'à $[\sigma_t(C)]$.

On remarque de plus que, si α est proche de 2, la matrice R est proche de celle donnée par la Proposition 13.12. Les transitions se font alors essentiellement entre plus proches voisins. Si α est proche de 1, les transitions se font circulairement : de $[\sigma_t(A)]$ à $[\sigma_t(C)]$ (un grand saut positif), puis de $[\sigma_t(C)]$ à $[\sigma_t(B)]$ (à l'aide de petits sauts négatifs), puis de $[\sigma_t(B)]$ à $[\sigma_t(A)]$ (encore à l'aide de petits sauts négatifs).

Exemple 13.15 (Lois de Lévy symétriques).

Soit $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une \mathbb{Z} -extension markovienne, ergodique et conservative d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F . Supposons que F est dans le bassin d'attraction d'une loi de Lévy stable de paramètre $\alpha \in (1, 2)$ symétrique. Sans perte de généralité, $c_- = c_+ = 1$. Prenons $I = \{A, B, C\}$ et $(\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)) = (-1, 0, 1)$. Soit $\sigma_t = t\sigma + o(t)$. Alors, dans la base $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_C)$,

$$R = \frac{2^{2-\alpha}\pi}{(4-2^{\alpha-1})|\tan(\frac{\alpha\pi}{2})|} \begin{pmatrix} 2 & -2^{\alpha-1} & -(2-2^{\alpha-1}) \\ -2^{\alpha-1} & 2^\alpha & -2^{\alpha-1} \\ -(2-2^{\alpha-1}) & -2^{\alpha-1} & 2 \end{pmatrix}, \quad (13.3)$$

et $P_t =_{t \rightarrow +\infty} \text{Id} - \frac{t}{L(t)} R + o(tL(t)^{-1})$.

13.4 Observables d'intégrale nulle, III : Formule de Green-Kubo

Terminons cette présentation par un retour sur l'article [184]. Dans ce travail, nous avions obtenu certains des résultats précédents, notamment les Propositions 13.12 et 13.13, dans le cas de deux sites (c'est-à-dire $|I| = 2$) : ce sont [184, Corollaire 1.9] et [184, Proposition 1.6]. La stratégie utilisée était très différente de celle présentée en Section 11.

Pour simplifier, on se place dans le cadre d'une \mathbb{Z} -extension markovienne, ergodique et conservative $([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F , telle que F est de carré intégrable et de moyenne nulle.

Le point de départ est le Corollaire 9.8, qui affirme que, pour une observable régulière, d'intégrale nulle et à support borné f ,

$$\sigma_{\text{GK}}^2([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T}; f) = \sigma_{\text{GK}}^2([0], \mu, \tilde{T}_{[0]}; \Sigma_{[0]}(f)). \quad (13.4)$$

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Appliquons cette l'Équation (13.4) à $f_p := \mathbf{1}_{[p]} - \mathbf{1}_{[0]}$.

D'une part, le membre de gauche de l'Équation (13.4) est

$$2(g(p) - 1) \quad \text{où} \quad g(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} [2\mu(S_n^T F = 0) - \mu(S_n^T F = p) - \mu(S_n^T F = -p)].$$

La fonction g est le *noyau de Green symétrisé* de la \mathbb{Z} -extension. Par des calculs analogues à ceux de la Sous-section 11.5,

$$g(p) \sim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{2|p|}{\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F)} \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{GK}}^2([\mathbb{Z}], \tilde{\mu}, \tilde{T}; f_p) \sim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{4|p|}{\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F)}.$$

D'autre part, les fonctions $\Sigma_{[0]}(f_p)$ sont toutes d'intégrale nulle. De plus, la famille de fonctions $(\mathcal{L}_{[0]}(\Sigma_{[0]}(f_p)))_{p \in \mathbb{Z}}$ est bornée dans $\text{Lip}^\infty(A, \mu)$. Par conséquent, il existe une constante C telle que, pour tout p ,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A \Sigma_{[0]}(f_p) \cdot \Sigma_{[0]}(f_p) \circ T_{[0]}^n \, d\mu \right| \leq C,$$

et donc $\sigma_{\text{GK}}^2([0], \mu, \tilde{T}_{[0]}; \Sigma_{[0]}(f)) = \|\Sigma_{[0]}(f_p)\|_{\mathbb{L}^2(A, \mu)}^2 + O(1)$. Finalement,

$$\int_A \Sigma_{[0]}(f_p)^2 \, d\mu \sim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{4|p|}{\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F)}. \quad (13.5)$$

Il reste à mieux comprendre la loi de $\Sigma_{[0]}(f_p)$. Soit P_p la probabilité d'atteinte de $[p]$ partant de $[0]$. Quand p est grand, le processus induit sur $\{[0], [p]\}$ se comporte essentiellement comme une chaîne de Markov à deux états.

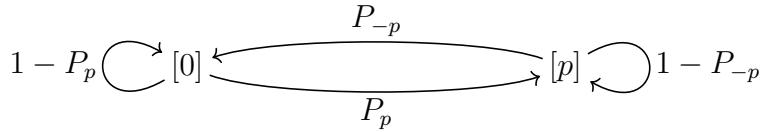


FIGURE 35 – Graphe associé à une chaîne de Markov à deux états.

Cette chaîne préservant la mesure de comptage, $P_p = P_{-p}$.

Ainsi, $\Sigma_{[0]}(f_p)(x) = -1$ si la trajectoire partant de x revient en $[0]$ avant d'atteindre $[p]$, soit avec une probabilité $1 - P_p$ proche de 1. Conditionnée par être positive, c'est-à-dire si la trajectoire passe par $[p]$ avant de revenir en $[0]$, la fonction $\Sigma_{[0]}(f_p) + 1$ est le temps d'atteinte d'un évènement de probabilité P_p .

On se ramène ainsi au temps d'atteinte d'évènements de petite mesure. Une version légèrement renforcée du Corollaire 12.11 donne le comportement asymptotique du moment d'ordre 2 de $\Sigma_{[0]}(f_p)$:

$$\int_A \Sigma_{[0]}(f_p)^2 \, d\mu \sim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{P_p}.$$

Avec l'Équation (13.5), on retombe finalement sur la Proposition 13.12 :

$$P_p \sim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma_{\text{GK}}^2(A, \mu, T; F)}{2|p|}.$$

13.5 Pour aller plus loin : Autour de la théorie du potentiel

Pour terminer, nous proposons quatre pistes de recherche liées à l'article [226] dont nous venons de présenter le contenu.

13.5.1 Gaz de Lorentz

Un premier problème naturel est de s'affranchir du cadre des transformations Gibbs-Markov. En particulier :

Question 13.16.

Les Propositions 13.12 et 13.13 restent-elles valables pour l'application collision d'un gaz de Lorentz, respectivement sur un cylindre ou dans le plan ?

Deux stratégies semblent raisonnables. La première consiste à utiliser les tours de Young : on sait répondre à ces questions dans le cadre des transformations Gibbs-Markov, et un billard de Sinaï est, à une projection près, une tour au-dessus d'une transformation Gibbs-Markov.

Cependant, les Propositions 13.12 et 13.13 ne permettent de contrôler que les temps markoviens, c'est-à-dire les temps d'atteinte d'un obstacle qui sont aussi les temps auxquels le processus revient à la base de la tour de Young.

Une seconde stratégie consisterait à refaire l'ensemble du raisonnement. Cette approche est plus ambitieuse. La partie reposant sur la méthode de Nagaev–Guivarc'h se transpose aisément en utilisant les espaces de distributions anisotropes de Demers–Zhang [74]. De là, on serait tenté rester dans le cadre de tels espaces. Il faudrait donc généraliser l'identité de balayage (Proposition 7.13) à des espaces de distributions ; la méthode d'induction probabiliste suggérée en Sous-section 8.4 pourrait y jouer un rôle. Ceci dit, la principale difficulté semble être de contrôler les propriétés de l'application $T_{[0]}$ de premier retour en $[0]$, qui joue un rôle central dans notre raisonnement.

13.5.2 Espérance du temps d'atteinte

Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire sur le groupe abélien fini $G = (\mathbb{Z}/r_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/r_d\mathbb{Z})$, de noyau de transition P . Soit $\tilde{\varphi}_0$ le premier temps d'atteinte (positif ou nul) de 0. Alors $\mathbb{E}_0(\tilde{\varphi}_0) = 0$, et, pour $p \neq 0$,

$$\mathbb{E}_p(\tilde{\varphi}_0) = 1 + \sum_{p' \in G} P_{pp'} \mathbb{E}_{p'}(\tilde{\varphi}_0).$$

Autrement dit, si l'on pose $F(p) := \mathbb{E}_p(\tilde{\varphi}_0)$, alors $F(0) = 0$ et $(\text{Id} - P)(F) = 1$ hors de 0. On peut ainsi calculer F .

Le mouvement Brownien satisfait une propriété similaire. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien partant de $p \in (a, b)$. Alors :

$$\mathbb{E}(\inf\{t \geq 0 : B_t \in \{a, b\}\}) = (b - p)(p - a),$$

qui est bien solution de l'équation $\frac{-\Delta}{2}(F) = \mathbf{1}$ sur (a, b) .

Cette technique se généralise. Si l'on pose $F(p, z) := \mathbb{E}_p(e^{z\tilde{\varphi}_0})$, alors $F(0, z) = 1$ et $(\text{Id} - e^z P)(F) = 0$ hors de 0. En dérivant cette relation en $z = 0$, on retrouve l'équation satisfaite par l'espérance du temps d'atteinte.

Question 13.17.

On se donne une extension markovienne ergodique $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ d'une transformation Gibbs-Markov (A, μ, T) . Soit $\Lambda < \mathbb{Z}^d$ un réseau peu dense. Que peut-on dire du temps d'atteinte $\tilde{\varphi}_{[\Lambda]}$ de $[\Lambda]$ dans $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ ou, de façon équivalente, du temps d'atteinte de $[0]$ dans la \mathbb{Z}^d/Λ -extension quotient ? En particulier, la fonction

$$F : \begin{cases} \mathbb{Z}^d/\Lambda & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \bar{p} & \mapsto \int_A \tilde{\varphi}_{[\Lambda]}(p, x) d\mu(x) \end{cases},$$

a-t-elle un profil limite quand $\Lambda < \mathbb{Z}^d$ devient très peu dense⁶⁹ ?

L'un des intérêts de cette question est que la théorie des temps d'atteinte de petits ensembles, en-dehors de la mesure de l'ensemble que l'on cherche à atteindre, fait en général intervenir des objets définis globalement, tels que des valeurs propres principales d'opérateurs de transfert perturbés [142], ou les queues du temps d'atteinte. La Question 13.17 porte sur le comportement local (l'espérance sur chaque $[p]$) d'un temps d'atteinte⁷⁰.

13.5.3 Systèmes transients

La quasi-totalité de ce mémoire a porté sur des systèmes ergodiques conservatifs. Pour les \mathbb{Z}^d -extensions de systèmes Gibbs-Markov, cela limite l'étude aux dimensions 1 et 2. Que peut-on dire en dimension supérieure ?

Comme en Sous-sous-section 13.5.2, revenons aux marches aléatoires. Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire dans \mathbb{Z}^d partant de 0. Posons, pour $p \in \mathbb{Z}^d$,

$$G(p) := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = p).$$

Le temps total passé en 0 suit une loi géométrique d'espérance $G(0)$. Conditionné par être strictement positif, par la propriété de Markov forte, le temps total passé en p suit aussi une loi géométrique d'espérance $G(0)$, tandis que la loi non conditionnée est d'espérance $G(p)$. Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}(\exists n \geq 0 : S_n = p) = \frac{G(p)}{G(0)}. \quad (13.6)$$

Sous des hypothèses raisonnables sur le noyau de transition de la marche aléatoire, le noyau de Green $G(p)$ peut être approché dans le régime $p \rightarrow \infty$, ce qui permet de calculer asymptotiquement la probabilité que la marche aléatoire passe en p .

Soit $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une extension markovienne ergodique d'un système Gibbs-Markov (A, μ, T) . Le noyau de Green se calcule de la même façon que pour les marches aléatoires. De plus, les transformations Gibbs-Markov satisfont une forme faible de la propriété de Markov forte (Proposition 3.24). On montre donc facilement que, dans ce cadre, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mu(\exists n \geq 0 : S_n^T F = p) \geq C \frac{G(p)}{G(0)}. \quad (13.7)$$

Question 13.18.

Soit $([\mathbb{Z}^d], \tilde{\mu}, \tilde{T})$ une extension ergodique transiente d'un système Gibbs-Markov (A, μ, T) de saut F raisonnable (par exemple, centré et de carré intégrable). Existe-t-il une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(\exists n \geq 0 : S_n^T F = p) \sim_{p \rightarrow \infty} CG(p) \quad ? \quad (13.8)$$

69. Nous renvoyons la lectrice à la Sous-section 5.4 pour de tels exemples d'énoncés asymptotiques.

70. À titre personnel, ce type de question est l'une des raisons pour lesquelles j'apprécie les structures de \mathbb{Z}^d -extensions. D'une part, leur étude fait intervenir des techniques diverses : adaptation de raisonnements probabilistes, méthodes de perturbation d'opérateurs, méthodes de cônes... D'autre part, la possibilité d'opérer des renormalisations spatiales réintroduit de la géométrie dans des questions dynamiques.

Une telle propriété, plus forte que l’Inégalité (13.7), reposerait sur une forme de perte de mémoire. Plus précisément, soit $A_p := \{\exists n \geq 0 : S_n^T F = p\}$ et $T_{[p]}$ l’application de première atteinte en $[p]$, qui est bien définie sur A_p . Alors

$$G(p) = \mu(A_p) \int_{A_p} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{S_n^T F = 0\}} dT_{[p],*}\mu(\cdot \mid A_p).$$

Si la suite de mesures $T_{[p],*}\mu(\cdot \mid A_p)$ converge en un sens assez fort vers une mesure limite μ_∞ quand p tend vers l’infni, alors la question serait résolue avec $C^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_\infty(S_n^T F = 0)$. Mais cette convergence signifie que la \mathbb{Z}^d extension partant de $[0]$, conditionnée pour arriver en un $[p]$ éloigné de $[0]$, ne se souvient plus de la direction dont elle vient.

Remarquons à ce sujet que l’Équation (13.6) s’adapte à des marches aléatoires sur des groupes quelconques, et notamment sur le groupe libre F_2 . En revanche, l’analogue de la Question 13.18 pour des extensions de systèmes Gibbs-Markov par le groupe libre F_2 est certainement fausse. Il faut donc bien utiliser des propriétés spécifiques aux marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d pour espérer répondre à la Question 13.18.

Un tel énoncé serait un exemple rare de résultat de théorie ergodique portant sur des systèmes transients.

La Question 13.18 se pose aussi pour le gaz de Lorentz tridimensionnel, qui est physiquement plus réaliste que le modèle bidimensionnel. Il faut cependant faire attention à ce que le gaz de Lorentz tridimensionnel est une \mathbb{Z}^3 -extension d’un billard de Sinai tridimensionnel, et les billards de Sinai tridimensionnels sont mal compris (voir à ce propos la discussion en Sous-sous-section 2.4.6). Si l’on s’attend à ce que le billard de Sinai tridimensionnel ait un comportement proche d’une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^3 , même sa transience n’est pas démontrée.

Un autre système transient lié à ces sujets est celui de la marche aléatoire sur \mathbb{Z}^2 conditionnée par ne pas passer en 0, qui a vu des développements récents [60, 196]. La définition d’un tel objet pour des \mathbb{Z}^2 -extensions, et la démonstration de ses propriétés, est aussi un enjeu de recherche.

13.5.4 Théorie du potentiel et distributions

Un projet plus vaste, mais moins précis, consiste à explorer dans le cadre de systèmes dynamiques hyperboliques l’articulation entre la théorie du potentiel (voir par exemple la Sous-section 8.3) et les espaces de distributions anisotropes (voir par exemple la Sous-sous-section 3.4.5).

Un lieu pour ce faire serait celui des compactifications d’espaces hyperboliques. Par exemple, soit \mathbb{H}^2 le plan hyperbolique. On dispose de plusieurs notions de *bord* pour cet espace, qui sont autant de façons de le compactifier. Par exemple :

- Le *bord visuel* est l’espace des rayons (ou demi-droites) géodésiques, où deux rayons sont équivalents s’ils sont à distance bornée [87]. Cette construction est topologique et repose sur les géodésiques de l’espaces. Le bord visuel de \mathbb{H}^2 est ainsi \mathbb{S}_1 .
- Considérons le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ sur \mathbb{H}^2 . Son générateur est le laplacien, et l’espace des fonctions harmoniques bornées sur \mathbb{H}^2 est naturellement isomorphe à $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \text{Leb})$ via intégration contre des noyaux de Poisson. Le *bord de Poisson* du mouvement brownien sur \mathbb{H}^2 est donc l’espace mesuré $(\mathbb{S}_1, \text{Leb})$ sous-jacent, hélas dépouillé de sa structure topologique [130].
- Le *bord de Martin* du mouvement brownien s’appuie aussi sur un processus stochastique, mais a l’avantage de fournir comme bord un honnête espace topologique, et non un espace mesuré [7, 130, 171].

Question 13.19.

Peut-on définir une notion de bord, par exemple sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n , qui satisfait les conditions suivantes :

- *La construction est de nature analytique, et fait intervenir par exemple les fonctions harmoniques pour un noyau donné ;*
- *La construction repose sur le flot géodésique, et non sur une marche aléatoire ou un mouvement brownien ;*
- *La construction fournit une compactification topologique de \mathbb{H}^n ?*

Soit X le générateur du flot topologique. L'espace des fonctions harmoniques pour ce générateur est l'espace des fonctions $f : \mathbb{T}^1\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $X(f) = 0$, c'est-à-dire constantes le long des géodésiques. Or l'espace des géodésiques est paramétrisé par les extrémités à l'infini, nécessairement distinctes, des géodésiques, et est donc $(\mathbb{S}_{n-1} \times \mathbb{S}_{n-1}) \setminus \text{Diag}$. Cet espace est trop gros.

L'analogue de l'action de $\Delta \curvearrowright \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{H}^n, \mathbb{C})$ sera donc plutôt l'action de X sur un espace de distributions anisotropes. L'utilisation de tels espaces de distributions permettrait d'"effacer le passé", ce qui manquait dans l'argument précédent. L'enjeu serait alors de définir l'analogue de la frontière de Martin dans des espaces de distributions anisotropes, et d'avoir une définition suffisamment maniable pour pouvoir être appliquée au moins dans le cadre des espaces hyperboliques \mathbb{H}^n .

Conclusion

Comme je l'avais annoncé en introduction, ce mémoire est une synthèse de quatre travaux [184, 185, 222, 226]. Mais cette synthèse est une reconstruction *a posteriori* de ce projet de recherche, dont la logique est étrangère à l'acte de recherche lui-même. Pour terminer, j'aimerais revenir chronologiquement sur ce projet ; en bref, au lieu d'exposer cliniquement les résultats de ce projet, raconter un cheminement intellectuel.

Le point de départ : un théorème limite distributionnel [222]

Le point de départ est un de mes travaux de thèse [222], qui portait sur les limites en loi des sommes de Birkhoff d'observables d'intégrale nulle. Le Théorème 9.6 s'applique à des observables qui répondent à trois critères : être d'intégrale nulle, être régulière, et être suffisamment intégrable. Les deux premiers critères sont naturels et faciles à vérifier, mais le critère d'intégrabilité est plus obscur : il demande que $\Sigma_{[0]}(|f|) \in \mathbb{L}^q(A, \mu)$ pour un réel $q > 2$.

Un argument qualitatif permet de vérifier que c'est le cas si $f \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{Z}, \tilde{\mu})$ et est à support borné, mais on préférera une condition suffisante plus générale portant sur la vitesse de décroissance de f en l'infini.

Dans le cas des marches aléatoires, ce point est résolu dans les travaux de E. Csáki et A. Földes [64, 65], sur lesquels je me suis fortement appuyé pendant ma thèse. Des outils de théorie probabiliste du potentiel permettent de calculer la probabilité qu'une excursion partant de 0 passe par p avant de revenir en 0. On en déduit la loi du temps N_p passé en p avant de revenir en 0, ce qui apporte un contrôle suffisant sur $\|\Sigma_{[0]}(|f|)\|_{\mathbb{L}^q}$:

$$\|\Sigma_{[0]}(|f|)\|_{\mathbb{L}^q} = \left\| \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} f(p) N_p \right\|_{\mathbb{L}^q} \leq \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} |f(p)| \|N_p\|_{\mathbb{L}^q}.$$

On retrouve là des idées rencontrées en Sous-section 13.4.

Redémontrer le théorème précédent, à une nuance près : [184]

L'étape suivante est la première partie de [184]. La problématique reste proche de mes travaux de thèse : trouver des limites en loi de sommes de Birkhoff. En suivant une idée de Françoise Pène, nous avons appliqué la méthode des moments à ce problème. Si cela conduit à des calculs très lourds – mais pas dénués d'élégance combinatoire – nous avons pu aboutir au Théorème 6.7. La limite en loi est la même que celle donnée par le Théorème 9.6, mais la variance asymptotique a une expression plus facile à analyser. Le critère d'intégrabilité est donc plus explicite : on a bien une condition de décroissance sur f , avec un exposant pratiquement optimal.

L'histoire aurait pu s'arrêter là : le problème consistant à obtenir un bon critère d'intégrabilité pour les observables est essentiellement résolu⁷¹. Mais l'idée d'obtenir des résultats de théorie du potentiel a creusé son chemin. L'argument de E. Csáki et A. Földes présenté ci-dessus consiste à partir d'informations sur la probabilité qu'une excursion partant de 0 atteigne $p \in \mathbb{Z}^d$, en déduire des informations sur N_p puis sur $\|\Sigma_{[0]}(|f|)\|_{\mathbb{L}^q([0], \mu)}$. On peut le parcourir en sens inverse. Les deux théorèmes distributionnels ont pour conséquence le Corollaire 9.8 : la formule de Green–Kubo est invariante par ce procédé d'induction. Le raisonnement de la Sous-section 13.4 s'ensuit. On peut estimer $\|\Sigma_{[0]}(\mathbf{1}_p - \mathbf{1}_0)\|_{\mathbb{L}^2([0], \mu)}$, et de là la probabilité d'atteindre $[p]$ avant de revenir en $[0]$.

Remarquons au passage que deux nouvelles briques ont fait leur apparition : les perturbations d'opérateurs, et la théorie des temps d'atteinte d'événements de petite mesure.

71. Bien que l'on puisse toujours se demander si ce critère peut être affaibli.

Après [184]

L'article [184] a joué un rôle pivot dans ce projet. Certains résultats que nous sommes parvenus à démontrer étaient aussi fascinants qu'insatisfaisants. Du point de vue du calcul des probabilités d'atteinte, la stratégie employée est astucieuse, mais hautement inefficace.

D'une part, elle repose sur des constructions lourdes. Il faut d'abord démontrer des théorèmes limites distributionnels de deux façons différentes, la première reposant sur un argument de couplage particulièrement fort et technique et de longues réductions ([221, 222], technique présentée en Sous-section 9.3), la seconde sur la méthode des moments, particulièrement calculatoire ([184], technique présentée en Sous-section 6.4). C'est bien la conjonction de ces deux théorèmes limites qui permet d'obtenir l'égalité des formules de Green–Kubo (Corollaire 9.8). Cette longueur et cette technicité sont autant d'obstacles à de potentielles généralisations.

D'autre part, cette stratégie apporte des résultats relativement faibles. Si l'on peut calculer les probabilités de transition entre deux sites, elle échoue à partir de trois sites. En effet, le raisonnement passe par la formule de Green–Kubo, qui est une forme quadratique. Elle ne contient donc que l'information du symétrisé de l'opérateur potentiel discrétilisé, et donc du symétrisé de la matrice des probabilités de transition. On a perdu une partie de l'information. Ainsi, l'Exemple 13.14, où apparaissent des matrices non symétriques, ne peut pas être obtenu par cette méthode.

Un autre point qui a soulevé notre intérêt est la propriété d'invariance par induction de la formule de Green–Kubo. Cette propriété était plus ou moins connue dans certains cas en mesure finie, mais le fait de retomber dessus par surprise⁷² et de pouvoir l'exploiter comme nous l'avons fait pour estimer des probabilités d'atteinte lui a donné un nouveau relief.

Le Corollaire 9.8 est une égalité entre deux versions de la formule de Green–Kubo, donc entre deux expressions algébriques relativement simples. S'il est possible de le démontrer grâce à des théorèmes probabilistes, il eût été esthétiquement plus satisfaisant de disposer d'un argument plus élémentaire, reposant par exemple sur des découpages et recombinaisons d'intégrales. Nous nous apercevons cependant assez vite que les arguments formels ont leurs limites, et que les questions de sommabilité sont cruciales : l'Exemple 9.11 a tôt fait de punir le mathématicien trop téméraire⁷³.

Vers la théorie du potentiel : [185]

Si je souhaite alors une approche plus propre de l'estimation des probabilités d'atteintes dans des \mathbb{Z}^d -extensions, la solution évidente consiste à adapter directement les arguments de théorie probabiliste du potentiel. Afin de montrer l'avantage de cette méthode, il est important de travailler avec au moins 3 sites différents. C'est à ce moment que je mène les calculs explicites de la Sous-section 10.1 sur les marches aléatoires, qui me permettent de distinguer les trois étapes de ce calcul et de repérer l'importance de l'identité de balayage.

L'adaptation aux systèmes dynamiques rencontrera un obstacle supplémentaire. Si l'on peut encoder une marche aléatoire par un système dynamique, la marche aléatoire a une donnée supplémentaire : une filtration. En l'absence de celle-ci, une traduction directe de l'identité de balayage conduit à la version pour l'opérateur de Koopman, et à l'obstruction découlant du théorème de Livšic (Sous-section 8.2). Il me faudra plusieurs mois pour penser à introduire l'opérateur de transfert et l'identité de balayage associée, alors que ce type de traduction est pourtant classique en théorie ergodique.

L'opérateur $(\text{Id} - \mathcal{L})^{-1}$ apparaît aussi dans la formule de Green–Kubo, et les propriétés de la

72. Nous nous en sommes aperçus lors d'une soirée de conférence à l'aber Wrac'h en 2016. L'expression initiale de la variance asymptotique dans le Théorème 6.7 était assez différente, donc cette propriété de la formule de Green–Kubo n'était pas apparente de prime abord.

73. Le châtiment consistant en des journées à chercher une erreur subtile – typiquement, un mauvais choix de jauge – dans un lourd calcul. Voir à ce sujet la note correspondante dans l'Exemple 9.11.

formule de Green–Kubo sont étroitement liées à la théorie du potentiel⁷⁴. Il n'est donc pas très surprenant, mais tout de même heureux, que l'identité de balayage se soit avérée utile pour rendre rigoureux les arguments formels justifiant l'invariance par induction de la formule de Green–Kubo.

À ce point, tout est en place pour l'article [185]. Celui-ci se concentrera sur l'identité de balayage, et aura deux objectifs : justifier l'invariance par induction de la formule de Green–Kubo, et préparer le terrain pour un travail ultérieur sur les probabilités de transition dans les \mathbb{Z}^d -extensions. Nous l'enrichissons de quelques trouvailles rencontrées au passage⁷⁵.

Conclure, enfin : [226]

La suite et fin de ce projet est l'article [226]. Celui-ci a eu une longue genèse. J'ai commencé à y réfléchir à partir de 2017, puis les différentes idées se sont lentement cristallisées : j'en esquisse la stratégie au cours de l'année 2018, mais sa rédaction a principalement eu lieu en 2020 et 2021. Entre temps, afin de varier les plaisirs, je travaille sur des projets plus courts ([224, 225] notamment⁷⁶).

Même avec une stratégie claire, on peut reconstruire des problèmes techniques plus ou moins gênants. Par exemple, le fait de travailler avec plusieurs sites introduit des matrices de transition, et donc des problèmes de commutativité ; la gestion de cette non-commutativité a été un point d'achoppement, et reste un des passages les plus techniques⁷⁷ de [226].

Le temps que je me suis donné pour réfléchir à cet article m'a cependant permis d'aplanir les plus sérieux de ces problèmes. La structure des extensions ergodiques (Sous-section 13.2), qui trivialise la réduction au cas où le système $(A, \mu, T_{[0]})$ mélangeant, en est un exemple. Mais le cas le plus marquant pour moi est celui de la compacité pour la famille $a(t)^{-1}(\text{Id} - P_t)$, un des points clef de la Sous-section 13.1. Mon idée initiale reposait initialement sur un argument de décomposition multi-échelles des composantes métastables [99]. Un tel argument était affreusement technique, même dans ses versions préliminaires. J'ai pu cependant le simplifier au fur et à mesure, jusqu'à arriver à une série de 5 (in)égalités simples, que l'on retrouve à la fin de la démonstration de [226, Lemma 4.4].

Ce dernier exemple est à l'image du chemin suivi par ces recherches. Ce projet a été semé de questions et d'écueils, dont les plus importants ont parfois disparu dans la synthèse qui en est offerte aux lecteurs.

74. Comme l'a montré [184], on peut utiliser les deux pour retrouver des probabilités d'atteinte.

75. En vrac : le cas des équations de Poisson tordues (même s'il n'est alors pas dit qu'elles seront utiles), le lien avec la récurrence des chaînes de Markov duales, la possibilité d'induire sur un ensemble de mesure infinie, ou encore les invariants de degré supérieur.

76. L'article [224] doit beaucoup à ma familiarité avec les \mathbb{Z}^d -extensions, et donc au projet de recherche que je présente dans ce mémoire.

77. Ce que je résumerai en trois mots : Baker–Campbell–Hausdorff.

Références

- [1] J. Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory*, Mathematical Surveys and Monographs, **50** (1997). American Mathematical Society, Providence, RI.
- [2] J. Aaronson et M. Denker. *The Poincaré series of $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$* , Ergodic Theory and Dynamical Systems, **19** (1999), no. 1, 1–20.
- [3] J. Aaronson et M. Denker. *Local limit theorems for partial sums of stationary sequences generated by Gibbs-Markov maps*, Stochastics and Dynamics, **1** (2001), 193–237.
- [4] J. Aaronson, M. Denker et M. Urbański. *Ergodic theory for Markov fibred systems and parabolic rational maps*, Transactions of the American Mathematical Society, **337** (1993), no. 2, 495–548.
- [5] A. Adam. *Generic non-trivial resonances for Anosov diffeomorphisms*, Nonlinearity, **30** (2017), no. 3, 1146.
- [6] R.L. Adler. *Symbolic dynamics and Markov partitions*, Bulletin of the American Mathematical Society, New Series, **35** (1998), no. 1, 1–56.
- [7] M.T. Anderson et R. Schoen. *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature*, Annals of Mathematics, **121** (1985), no. 2, 429–461.
- [8] A. Avila, D. Dolgopyat, E. Duriev et O. Sarig. *The visits to zero of a random walk driven by an irrational rotation*, Israel Journal of Mathematics, **207** (2015), 653–717.
- [9] M. Babillot et F. Ledrappier. *Geodesic paths and horocycle flows on abelian covers*, Lie groups and ergodic theory : Proceedings of the International Colloquium, Mumbai, 1996. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; Studies in Mathematics. S.G. Dani éditeur. 1–32.
- [10] V. Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, **16** (2000). World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, New Jersey.
- [11] V. Baladi. *Linear response, or else*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians – Seoul 2014. Vol. III, 525–545. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.
- [12] V. Baladi. *The quest for the ultimate anisotropic Banach space*, Journal of Statistical Physics, **166** (2017), 525–557.
- [13] V. Baladi et R. Castorrini. *Thermodynamic formalism for piecewise expanding maps in finite dimension*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **44** (2024), no. 8, 2169–2192.
- [14] V. Baladi, M. Demers et C. Liverani. *Exponential decay of correlations for finite horizon Sinai billiard flows*, Inventiones Mathematicæ **211** (2018), 39–177.
- [15] V. Baladi, et S. Gouëzel. *Good Banach spaces for piecewise hyperbolic maps via interpolation*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **26** (2009), 1453–1481.
- [16] V. Baladi et M. Tsujii. *Dynamical determinants and spectrum for hyperbolic diffeomorphisms*, pp. 29–68, dans *Probabilistic and Geometric Structures in Dynamics*, K. Burns, D. Dolgopyat et Ya. Pesin (éditeurs), Contemporary Mathematics 469 (American Mathematical Society), Volume in honour of M. Brin’s 60th birthday (2008).
- [17] P. Bálint, N.I. Chernov et D. Dolgopyat. *Limit theorems for dispersing billiards with cusps*, Communications in Mathematical Physics, **308** (2011), no. 2, 479–510.
- [18] P. Bálint, N.I. Chernov, D. Szász et I.P. Tóth. *Geometry of multi-dimensional dispersing billiards*. Geometric methods in dynamics (I) : Volume in honor of Jacob Palis. Astérisque, **286** (2003), 119–150.

- [19] P. Bálint et S. Gouëzel. *Limit theorems in the stadium billiard*, Communications in Mathematical Physics, **263** (2006), no. 2, 451–512.
- [20] P. Bálint et I. Melbourne. *Decay of correlations and invariance principles for dispersing billiards with cusps, and related planar billiard flows*, Journal of Statistical Physics, **133** (2008), 435–447.
- [21] P. Bálint et I.P. Tóth. *Exponential decay of correlations in multi-dimensional dispersing billiards*, Annales Henri Poincaré, **9** (2008), no. 7, 1309–1369.
- [22] O. Bandtlow, W. Just et J. Slipantschuk. *Analytic expanding circle maps with explicit spectra*, Nonlinearity, **26** (2013), no. 12, 3231–3246.
- [23] O. Bandtlow, W. Just et J. Slipantschuk. *Complete spectral data for analytic Anosov maps of the torus*, Nonlinearity, **30** (2017), no. 7, 2667–2686.
- [24] O. Bandtlow, W. Just et J. Slipantschuk. *Dynamic mode decomposition for analytic interval maps*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **84** (2020).
- [25] O. Bandtlow, W. Just et J. Slipantschuk. *Convergence properties of dynamic mode decomposition for analytic interval maps*, arXiv :2404.08512v1 [math.DS]. Déposé le 12 avril 2024.
- [26] M. Benedicks et L. Carleson. *On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$* , Annals of Mathematics, **122** (1985), 1–25.
- [27] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*, Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, New York. 1968.
- [28] N.H. Bingham, C.M. Goldie et J.L. Teugels. *Regular variation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. 1987.
- [29] G.D. Birkhoff. *Proof of the ergodic theorem*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **17** (1931), no. 12, 656–660.
- [30] G.D. Birkhoff. *Extensions of Jentzsch's theorem*, Transactions of the American Mathematical Society, **85** (1957), no. 1, 219–227.
- [31] P.M. Bleher. *Statistical properties of 2D Lorentz gas with infinite horizon*, Helvetica Physica Acta, **65** (1992), no. 2–3, 475–476.
- [32] R.M. Blumenthal et R.K. Getoor. *Markov processes and potential theory*, Academic Press, New York, London, 1968.
- [33] A. Blumenthal, I. Nisoli et T. Taylor-Crush. *Rigorous enclosure of the discrete spectrum for transfer operators*, Communication à la conférence *Computer-assisted proofs, proof assistants and visualization in dynamical systems*. Centro di Ricerca Matematica Ennio de Giorgi, Pise, 18–21 juin 2024.
- [34] C. Bonanno, P. Giulietti et M. Lenci. *Infinite mixing for one-dimensional maps with an indifferent fixed point*, Nonlinearity, **31** (2018), no. 11, 5180.
- [35] A.N. Borodin. *On the character of convergence to Brownian local time. I*, Probability Theory and Related Fields, **72** (1986), no. 2, 231–250.
- [36] A.N. Borodin. *On the character of convergence to Brownian local time. II*, Probability Theory and Related Fields, **72** (1986), no. 2, 251–277.
- [37] R. Bowen. *Symbolic dynamics for hyperbolic flows*, American Journal of Mathematics, **95** (1973), 429–460.
- [38] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, **470** (1975). Springer-Verlag, Berlin-New York.

- [39] X. Bressaud et R. Zweimüller. *Renewal theorems and mixing for non Markov flows with infinite measure*, Annales Henri Poincaré, **2** (2001), 1–12.
- [40] H. Bruin, I. Melbourne et D. Terhesiu. *Rates of mixing for non Markov infinite measure semiflows*, Transactions of the American Mathematical Society, **371** (2019), 7343–7386.
- [41] L.A. Bunimovich. *A central limit theorem for scattering billiards*, Doklady Akademii Nauk USSR, **204** (1972), 772–781. En Russe.
- [42] L.A. Bunimovich. *On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards*, Communications in Mathematical Physics, **65** (1979), no. 3, 295–312.
- [43] L.A. Bunimovich et C.P. Dettman. *Open circular billiards and the Riemann hypothesis*, Physical Review Letters, **94** (2005), 100201.
- [44] D.L. Burkholder. *Distribution function inequalities for martingales*, The Annals of Probability, **1** (1973), 19–42.
- [45] P. Buser. *Über eine Ungleichung von Cheeger*, Mathematische Zeitschrift, **158** (1978), 245–252. En Allemand.
- [46] O. Butterley, G. Canestrari et S. Jain. *Discontinuities cause essential spectrum*, Communications in Mathematical Physics, **398** (2022), 627–653.
- [47] O. Butterley, G. Canestrari et G. Castorrini. *Discontinuities cause essential spectrum on surfaces*, Annales de l’Institut Henri Poincaré (2024).
- [48] O. Butterley, N. Kiamari et C. Liverani. *Locating Ruelle–Pollicott resonances*, Nonlinearity, **35** (2022), 513–566.
- [49] J. Buzzi. *No or infinitely many A.C.I.P. for piecewise expanding \mathcal{C}^r maps in higher dimensions*, Communications in Mathematical Physics, **222** (2001), 495–501.
- [50] J.-R.. Chazottes, C. Cuny, J. Dedecker, X. Fan et S. Lemler. *Limit theorems and inequalities via martingale methods*, ESAIM : Proceedings, **44** (2014). Journées MAS 2012, Clermont-Ferrand, France, 29-31 Août 2012. Arnaud Guillin éditeur. 177–196.
- [51] J. Cheeger. *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*, Problems in analysis. A symposium in honor of Salomon Bochner (PMS-31). Princeton Mathematical Series, **31** (1971), 195–200.
- [52] N. Chernov et D. Dolgopyat. *Brownian Brownian motion – I*, Memoirs of the American Mathematical Society, **198** (2009), no. 927.
- [53] N. Chernov et R. Markarian. *Chaotic billiards*, Mathematical Surveys and Monographs, **127** (2006). American Mathematical Society, Providence, RI.
- [54] N. Chernov et H.K. Zhang. *Improved estimates for correlations in billiards*, Communications in Mathematical Physics, **277** (2008), no. 2, 305–321.
- [55] K.L. Chung. *Lectures from Markov processes to Brownian motion*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **249** (1982). Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- [56] M.J. Colbrook. *The multiverse of dynamic mode decomposition algorithms*, Handbook of Numerical Analysis, **25** (2024), Chapitre 4, 127–230.
- [57] P. Collet. *Statistics of closest return for some non-uniformly hyperbolic systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **21** (2001), no. 2, 401–420.
- [58] P. Collet et J.P. Eckmann. *Positive Lyapunov exponents and absolutely continuity*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **3** (1983), 13–46.
- [59] P. Collet et S. Isola. *On the essential spectrum of the transfer operator for expanding markov maps*, Communications in Mathematical Physics, **139** (1991), 551–557.

- [60] O. Collin et S. Popov. *Rate of escape of the conditioned two-dimensional simple random walk*, Stochastic Processes and their Applications, **179** (2025), 104469.
- [61] J.-P. Conze et Y. Guivarc'h. *Ergodicity of group actions and spectral gap. Applications to random walks and Markov shifts*, Discrete and Continuous Dynamical Systems (A), **33** (2013), no. 9, 4239–4269.
- [62] J.-P. Conze et S. Le Borgne. *Le TCL pour une classe d'automorphismes non hyperboliques de nilvariétés*, Non publié, 2002.
- [63] W.J. Cowieson. *Absolutely continuous invariant measures for most piecewise smooth expanding maps*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **22** (2002), no. 4, 1061–1078.
- [64] E. Csáki et A. Földes. *On asymptotic independence and partial sums*, Asymptotic methods in probability and statistics, A volume in honour of Miklós Csörgő, Elsevier (2000), 373–381.
- [65] E. Csáki et A. Földes. *Asymptotic independence and additive functionals*, Journal of Theoretical Probability, **13** (2000), 1123–1144.
- [66] F. Dal'Bo. *Trajectoires géodésiques et horocycliques*, Savoirs Actuels, EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2007.
- [67] F. Dal'Bo. *Geodesic and horocyclic trajectories*, Universitext, Springer-Verlag, Londres, 2011.
- [68] D.A. Darling et M. Kac. *On occupation times for Markoff processes*, Transactions of the American Mathematical Society, **84** (1957), 444–458.
- [69] J. de Simoi et C. Liverani. *The martingale approach after Varadhan and Dolgopyat*, Dans "Hyperbolic Dynamics, Fluctuations and Large Deviations". Dolgopyat, Pesin, Pollicott, Stoyanov éditeurs. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **89** (2015), American Mathematical Society.
- [70] J. de Simoi et C. Liverani. *Limit Theorems for fast-slow partially hyperbolic systems*, Inventiones Mathematicæ, **213** (2018), 811–1016.
- [71] V. Delecroix, P. Hubert et S. Lelièvre. *Diffusion for the periodic wind-tree model*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Quatrième série, **47** (2014), no. 6, 1085–1110.
- [72] V. Delecroix et A. Zorich. *Cries and whispers in wind-tree forests, What's next ? The mathematical legacy of William P. Thurston*. Annals of Mathematics Studies, **205** (2020). Princeton University Press, Princeton, NJ. 83–115.
- [73] M. Demers. *A gentle introduction to anisotropic Banach spaces*, Chaos, Solitons & Fractals **116** (2018), 29–42.
- [74] M. Demers et H.-K. Zhang. *Spectral analysis of the transfer operator for the Lorentz gases*, Journal of Modern Dynamics **5** (2012), no. 4, 665–709.
- [75] M. Demers et H.-K. Zhang. *Spectral analysis of hyperbolic systems with singularities*, Nonlinearity **27** (2014), 379–433.
- [76] P. Diaconis et D. Stroock. *Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains*, The Annals of Applied Probability, **1** (1991), no. 1, 36–61.
- [77] R.L. Dobrushin. *Two limit theorems for the simplest random walk on a line*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, **10** (1955), 139–146 (en Russe).
- [78] W. Döblin et R. Fortet. *Sur des chaînes à liaisons complètes*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **65** (1937), 132–148.
- [79] D. Dolgopyat. *On decay of correlations in Anosov flows*, Annals of Mathematics, **147** (1998), no. 2, 357–390.

- [80] D. Dolgopyat. *Averaging and invariant measures*, Moscow Mathematical Journal, **5** (2005), 537–576.
- [81] D. Dolgopyat et P. Nándori. *Non equilibrium density profiles in Lorentz tubes with thermo-stated boundaries*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **69** (2016), no. 4, 649–692.
- [82] D. Dolgopyat et P. Nándori. *On mixing and the local limit theorem for hyperbolic flows*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **40** (2020), no. 1, 142–174.
- [83] D. Dolgopyat et P. Nándori. *Infinite measure mixing for some mechanical systems*, Advances in Mathematics, **410** (2022), 108757.
- [84] D. Dolgopyat et P. Wright. *The diffusion coefficient for piecewise expanding maps of the interval with metastable states*, Stochastics and Dynamics, **12** (2012), no. 1, 1150005.
- [85] P.G. Doyle et J.L. Snell. *Random walks and electric networks*, The Carus Mathematical Monographs, Mathematical Association of America, 1984.
- [86] S. Dyatlov, F. Faure et C. Guillarmou. *Power spectrum of the geodesic flow on hyperbolic manifolds*, Analysis & PDE, **8** (2015), no. 4, 923–1000.
- [87] P. Eberlein et B. O’Neill. *Visibility manifolds*, Pacific Journal of Mathematics, **46** (1973), no. 1, 45–109.
- [88] M. Einsiedler et T. Ward. *Ergodic theory. With a view towards Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **259** (2011). Springer-Verlag, Londres, Dordrecht, Heidelberg, New York.
- [89] P. Eslami, I. Melbourne et S. Vaienti. *Sharp statistical properties for a family of multidimensional nonMarkovian nonconformal intermittent maps*, Advances in Mathematics, **388** (2021).
- [90] F. Faure, S. Gouëzel et E. Lanneau. *Ruelle spectrum of linear pseudo-Anosov maps*, Journal de l’École Polytechnique. Mathématiques, **6** (2019), 811–877.
- [91] F. Faure et M. Tsujii. *Band structure of the Ruelle spectrum of contact Anosov flows*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris, Série I, Mathématique, **351** (2014), no. 9–10, 385–391.
- [92] F. Faure et M. Tsujii. *The semiclassical zeta function for geodesic flows on negatively curved manifolds*, Inventiones Mathematicæ, **208** (2017), no. 3, 851–998.
- [93] F. Faure et M. Tsujii. *Fractal Weyl law for the Ruelle spectrum of Anosov flows*, Annales Henri Lebesgue, **6** (2023), 331–426.
- [94] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol II*. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney–Toronto, 1971.
- [95] G. Forni. *Sobolev regularity of solutions of the cohomological equation*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **41** (2021), no. 3, 685–789.
- [96] G. Forni. *Twisted cohomological equations for translation flows*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **42** (2022), no. 3. Anatole Katok Memorial Issue Part 2 : Special Issue of Ergodic Theory and Dynamical Systems. 881–916.
- [97] K. Frączek et C. Ulcigrai. *Non-ergodic \mathbb{Z} -periodic billiards and infinite translation surfaces*, Inventiones Mathematicæ, **197** (2014), no. 2, 241–298.
- [98] A.C.M. Freitas, J.M. Freitas et M. Todd. *The compound Poisson limit ruling periodic extreme behaviour of non-uniformly hyperbolic dynamics*, Communications in Mathematical Physics, **321** (2013), no. 2, 483–527.

- [99] M. Freidlin et L. Koralov. *Metastable distributions of Markov chains with rare transitions*, Journal of Statistical Physics, **167** (2017), 1355–1375.
- [100] G. Froyland, K. Padberg, M.H. England et A.M. Tréguier. *Detection of coherent oceanic structures via transfer operators*, Physical Review Letters, **98** (2007), no. 22, 224503.
- [101] G. Froyland, N. Santitissadeekorn et A. Monahan. *Transport in time-dependent dynamical systems : Finite time coherent sets*, Chaos, **20** (2010), 043116.
- [102] S. Galatolo. *Statistical properties of dynamics. Introduction to the functional analytic approach*, arXiv :1510.02615v3 [math.DS]. Déposé le 9 Octobre 2015. Version du 14 Novembre 2022.
- [103] S. Galatolo, D.H. Kim et K.K. Park. *The recurrence time for ergodic systems with infinite invariant measures*, Nonlinearity, **19** (2006), no. 11, 2567.
- [104] P. Gaspard et S.A. Rice. *Scattering from a classically chaotic repellor*, Journal of Chemical Physics, **90** (1989), 2225–2241.
- [105] P. Gaspard et X.J. Wang. *Sporadicity : Between periodic and chaotic dynamical behaviors*, Proceedings of the National Academy of Science, **85** (1988), 4591–4595.
- [106] P. Giulietti, B. Kloeckner, A.O. Lopes et D. Marcon Farias. *The calculus of thermodynamical formalism*, Journal of the European Mathematical Society, **20** (2018), no. 10, 2357–2412.
- [107] C. Gonzalez Tokman, B.R. Hunt et P. Wright. *Approximating invariant densities for metastable systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **31** (2011), no. 5, 1345–1361.
- [108] P. Góra et A. Boyarsky. *Absolutely continuous invariant measures for piecewise expanding C^2 transformations in \mathbb{R}^n* , Israel Journal of Mathematics, **67** (1989), 272–290.
- [109] M.I. Gordin. *On the central limit theorem for stationary processes*, Doklady Akademii Nauk SSSR, **188** (1969), 739–741. En Russe.
- [110] S. Gouëzel. *Sharp polynomial estimates for the decay of correlations*, Israel Journal of Mathematics, **139** (2004), 29–65.
- [111] S. Gouëzel. *Central limit theorem and stable laws for intermittent maps*, Probability Theory and Related Fields, **128** (2004), 82–122.
- [112] S. Gouëzel. *Vitesse de décorrélation et théorèmes limites pour les applications non uniformément dilatantes*, Thèse de doctorat, Université Paris XI, 2004.
- [113] S. Gouëzel. *Correlation asymptotics for large deviations in dynamical systems with infinite measure*, Colloquium Mathematicum, **125** (2011), no. 2, 193–212.
- [114] S. Gouëzel. *Spectre du flot géodésique en courbure négative*. Séminaire Bourbaki. Volume 2014/2015. Exposé no. 1098. Astérisque, **380** (2016), 325–353.
- [115] J. Graczyk et G. Świątek. *Generic hyperbolicity in the logistic family*, Annals of Mathematics, **146** (1997), no. 1, 1–52.
- [116] J. Graczyk et G. Świątek. *The real Fatou conjecture*, Annals of Mathematics Studies, **144**. Princeton University Press, New Jersey. 1998.
- [117] I. Grama, J.-F. Quint et H. Xiao. *Conditioned limit theorems for hyperbolic dynamical systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **44** (2024), no. 1, 50–117.
- [118] Y. Guivarc'h et J. Hardy. *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, **24** (1988), no. 1, 73–98.
- [119] J. Hadamard. *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 5ème série, no. 4 (1898), 27–74.

- [120] H. Hennion. *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens*, Proceedings of the American Mathematical Society, **118** (1993), 627–639.
- [121] M. Hirata. *Poisson law for Axiom A diffeomorphisms*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **13** (1993), no. 3, 533–556.
- [122] M. Hirata. *Poisson law for the dynamical systems with the “Self-mixing” conditions*, Dynamical Systems and Chaos, Vol. 1 (1995), 87–96. International Conference on Dynamical Systems and Chaos, Tokyo, Japan, 23–27 May 1994. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, New Jersey.
- [123] M. Hirata, B. Saussol et S. Vaienti. *Statistics of return times : a general framework and new applications*, Communications in Mathematical Physics, **206** (1999), 33–55.
- [124] E. Hopf. *Ergodentheorie*, Springer, Berlin, 1937 (en Allemand).
- [125] C.T. Ionescu-Tulcea et G. Marinescu. *Théorie ergodique pour des classes d’opérations non complètement continues*, Annals of Mathematic, **52** (1950), no. 1, 140–147.
- [126] M.V. Jakobson. *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Communications in Mathematical Physics, **81** (1981), 39–88.
- [127] D. Jakobson, F. Naud et L. Soares. *Large Covers and Sharp resonances of hyperbolic surfaces*, Annales de l’Institut Fourier, **70** (2020), no. 2, 523–596.
- [128] M. Jézéquel. *Minicourse on resonances in hyperbolic dynamics*, Notes pour l’école d’été *Microlocal and probabilistic methods in geometry and dynamics*, IMJ-PRG, Paris, Juillet 2023.
- [129] M. Kac. *On the notion of recurrence in discrete stochastic processes*, Bulletin of the American Mathematical Society, New Series, **53** (1947), no. 10, 1002–1010.
- [130] V.A. Kaimanovich et A.M. Vershik. *Random walks on discrete groups : Boundary and entropy*, The Annals of Probability, **11** (1983), no. 3, 453–490.
- [131] S. Kakutani. *Induced measure-preserving transformations*, Proceedings of the Imperial Academy, **19** (1943), no. 10, 635–641.
- [132] Y. Kasahara. *Limit theorems of occupation times for Markov processes*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto, **12** (1976), no. 3, 801–818.
- [133] Y. Kasahara. *Two limit theorems for occupation times of Markov processes*, Japanese Journal of Mathematics. New Series, **7** (1981), no. 2, 291–300.
- [134] Y. Kasahara. *Limit theorems for Lévy processes and Poisson point processes and their applications to Brownian excursions*, Journal of Mathematics of Kyoto University, **24** (1984), no. 3, 521–538.
- [135] Y. Kasahara. *A limit theorem for sums of random number of i.i.d. random variables and its application to occupation times of Markov chains*, Journal of the Mathematical Society of Japan, **37** (1985), no. 2, 197–205.
- [136] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators. Second edition*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **132** (1966). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [137] A. Katok et J.-P. Thouvenot. *Spectral properties and combinatorial constructions in ergodic theory*. Dans *Handbook of Dynamical Systems, Vol. 1B*. A. Katok, B. Hasselblatt éditeurs. Elsevier B. V., Amsterdam, 2006. 649–743.
- [138] A. Katsuda et T. Sunada. *Closed orbits in homology classes*, Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques **71** (1990), 5–32.

- [139] G. Keller. *On the rate of convergence to equilibrium in one-dimensional systems*, Communications in Mathematical Physics, **96** (1984), 181–193.
- [140] G. Keller. *Generalized bounded variation and applications to piecewise monotonic transformations*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, **69** (1985), 461–478.
- [141] G. Keller et C. Liverani. *Stability of the spectrum for transfer operators*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Série 4, **28** (1999), no. 1, 141–152.
- [142] G. Keller et C. Liverani. *Rare events, escape rates and quasistationarity : Some exact formulae*, Journal of Statistical Physics, **135** (2009), 519–534.
- [143] G. Keller et T. Nowicki. *Spectral theory, Zeta functions and the distribution of periodic points for Collet–Eckmann maps*, Communications in Mathematical Physics, **149** (1992), 31–69.
- [144] H. Kesten. *Occupation times for Markov and semi-Markov chains*, Transactions of the American Mathematical Society, **103** (1962), 82–112.
- [145] A. Korepanov. *Rates in almost sure invariance principle for dynamical systems with some hyperbolicity*, Communications in Mathematical Physics, **363** (2018), 173–190.
- [146] A. Krámlí et D. Szász. *Random walks with internal degrees of freedom. I. Local limit theorems*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, **63** (1983), no. 1, 85–95.
- [147] A. Krámlí et D. Szász. *Random walks with internal degrees of freedom. II. First-hitting probabilities*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, **68** (1984), no. 1, 53–64.
- [148] A. Krámlí, N. Simányi et D. Szász. *Random walks with internal degrees of freedom. III. Stationary probabilities*, Probability Theory and Related Fields, **72** (1986), no. 4, 603–617.
- [149] U. Krengel et L. Sucheston. *On mixing in infinite measure spaces*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, **13** (1969), 150–164.
- [150] A. Lasota et J.A. Yorke. *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Transactions of the American Mathematical Society, **186** (1973), 481–488.
- [151] G.F. Lawler et A.D. Sokal. *Bounds on the \mathbb{L}^2 spectrum for Markov chains and Markov processes : A generalization of Cheeger’s inequality*, Transactions of the American Mathematical Society, **309** (1988), no. 2, 558–580.
- [152] S. Le Borgne. *Limit theorems for non-hyperbolic automorphisms of the torus*, Israel Journal of Mathematics, **109** (1999), 61–73.
- [153] F. Ledrappier et O. Sarig. *Unique ergodicity for non-uniquely ergodic horocycle flows*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **16** (2006), 411–433.
- [154] F. Ledrappier et O. Sarig. *Invariant measures for the horocycle flow on periodic hyperbolic surfaces*, Israel Journal of Mathematics, **160** (2007), 281–315.
- [155] F. Ledrappier et O. Sarig. *Fluctuations of ergodic sums for horocycle flows on \mathbb{Z}^d -covers of finite volume surfaces*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **22** (2008), 247–325.
- [156] J.R. Lee, S.O. Gharan et L. Trevisan. *Multi-way spectral partitioning and higher order Cheeger inequalities*, Journal of the Association for Computing Machinery, **61** (2014), no. 6, 1–30.
- [157] M. Lenci. *On infinite-volume mixing*, Communications in Mathematical Physics, **298** (2010), 485–514.
- [158] P. Lévy. *Sur certains processus stochastiques homogènes*, Compositio Mathematica, **7** (1940), 283–339.

- [159] P. Lévy. *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier–Villars, Paris, 1948.
- [160] C. Liverani. *Central Limit Theorem for deterministic systems*, International Conference on Dynamical Systems, Montevideo 1995. A tribute to Ricardo Mañé. Pitman Research Notes in Mathematics Series, **362** (1996). F. Ledrappier, J. Levovicz, S. Newhouse éditeurs.
- [161] C. Liverani. *On contact Anosov flows*, Annals of Mathematics, **159** (2004), no. 3, 1275–1312.
- [162] C. Liverani. *On the work and vision of Dmitry Dolgopyat (Brin Prize article)*, Journal of Modern Dynamics, **4** (2010), no. 2, 211–225.
- [163] C. Liverani. *Statistical properties of uniformly hyperbolic maps and transfer operators' spectrum*, arXiv :1810.05924v2 [math.DS]. Déposé le 13 Octobre 2018, Version du 18 Janvier 2019.
- [164] C. Liverani, B. Saussol et S. Vaienti. *A probabilistic approach to intermittency*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **19** (1999), no. 3, 671–685.
- [165] A.N. Livšic. *Homology properties of Y-systems*, Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR, **10** (1971), 758–763.
- [166] A.N. Livšic. *Cohomology of dynamical systems*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **6** (1972), no. 6, 1278–1301.
- [167] H. Lorentz. *Le mouvement des électrons dans les métaux*, Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, **10** (1905), 336–371.
- [168] V. Lucarini, D. Faranda, A.C.M. Freitas, J.M. Freitas, T. Kuna, M. Holland, M. Nicol, M. Todd, S. Vaienti. *Extremes and recurrence in dynamical systems*, Pure and Applied Mathematics : A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. John Wiley & Sons. 2016.
- [169] M. Lyubich. *Dynamics of quadratic polynomials, I-II*, Acta Mathematica, **178** (1997), 185–297.
- [170] J. Marklof et A. Strömbärgsson. *Universal Hitting Time Statistics for Integrable Flows*, Journal of Statistical Physics, **116** (2017), 714–749.
- [171] R.S. Martin. *Minimal positive harmonic functions*, Transactions of the American Mathematical Society, **49** (1941), 137–172.
- [172] R.D. Mauldin et M. Urbański. *Gibbs states on the symbolic space over an infinite alphabet*, Israel Journal of Mathematics, **125** (2001), 93–130.
- [173] I. Melbourne et D. Terhesiu. *Operator renewal theory and mixing rates for dynamical systems with infinite measure*, Inventiones Mathematicæ, **189** (2012), 61–110.
- [174] I. Melbourne et D. Terhesiu. *Renewal theorems and mixing for non Markov flows with infinite measure*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, **56** (2020), no. 1, 449–476.
- [175] K.R. Meyer. *Energy functions for Morse-Smale systems*, American Journal of Mathematics, **90** (1968), 1031–1040.
- [176] S.V. Nagaev. *Some limit theorems for stationary Markov chains*, Theory of Probability and its Applications, **11** (1957), no. 4, 378–406.
- [177] S.V. Nagaev. *More exact statements of limit theorems for homogeneous Markov chains*, Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya, **6** (1961), 67–87 (in Russian).
- [178] R.D. Nussbaum. *The radius of the essential spectrum*, Duke Mathematical Journal, **37** (1970), no. 3, 473–478.
- [179] F. Pène. *Mixing in infinite measure for \mathbb{Z}^d -extensions, applications to the periodic Sinai billiard*, Chaos Solitons Fractals, **106** (2018), 44–48.

- [180] F. Pène. *Mixing and decorrelation in infinite measure : the case of the periodic Sinai billiard*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, **55** (2019), no. 1, 378–411.
- [181] F. Pène. *Stochastic properties of dynamical systems*, Cours Spécialisés, Vol. **30**. Société Mathématique de France. 2022.
- [182] F. Pène et B. Saussol. *Back to balls in billiards*, Communications in Mathematical Physics, **293** (2010), no. 3, 837–866.
- [183] F. Pène et B. Saussol. *Poisson law for some nonuniformly hyperbolic dynamical systems with polynomial rate of mixing*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **36** (2016), no. 8, 2602–2626.
- [184] F. Pène et D. Thomine. *Potential kernel, hitting probabilities and distributional asymptotics*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **40** (2020), no. 7, 1894–1967.
- [185] F. Pène et D. Thomine. *Probabilistic potential theory and induction of dynamical systems*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, **57** (2021), no. 3, 1736–1767.
- [186] F. Pène et D. Thomine. *Central limit theorems for the \mathbb{Z}^2 -periodic Lorentz gas*, Israel Journal of Mathematics, **241** (2021), 539–582.
- [187] F. Pène et D. Terhesiu. *Strong mixing for the periodic Lorentz gas flow with infinite horizon*, Preprint.
- [188] J.K. Percus. *Correlation inequalities for Ising spin lattices*, Communications in Mathematical Physics, **40** (1975), no. 3, 283–308.
- [189] V. Petkov et L. Stoyanov. *Spectral estimates for Ruelle operators with two parameters and sharp large deviations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **39** (2019), no. 11, 6391–6417.
- [190] M. Phalempin. *Averaging theorems for slow fast systems in \mathbb{Z} -extensions (discrete time)*, arXiv :2401.11277v1 [math.DS]. Déposé le 20 janvier 2024, À paraître aux Annales Henri Poincaré.
- [191] B. Pitskel. *Poisson law for Markov chains*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **11** (1991), no. 3, 501–513.
- [192] H. Poincaré. *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Mathematica, **13** (1890), 1–270.
- [193] H. Poincaré. *Sur un théorème en géométrie*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **33** (1912), 375–407.
- [194] M. Pollicott et R. Sharp. *Orbit counting for some discrete groups acting on simply connected manifolds with negative curvature*, Inventiones Mathematicæ, **117** (1994), no. 2, 275–302.
- [195] Y. Pomeau et P. Manneville. *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*, Communications in Mathematical Physics, **74** (1980), 189–197.
- [196] S. Popov. *Two dimensional random walk. From path counting to random interlacements*, IMS Textbooks. Cambridge University Press, 2020.
- [197] M. Ratner. *Markov partitions for Anosov flows on n-dimensional manifolds*, Israel Journal of Mathematics, **15** (1973), 92–114.
- [198] A. Rényi. *Valós számok előállítására szolgáló algoritmusokról*, A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei, **7** (1957), 265–293 (en Hongrois).

- [199] D. Revuz. *Markov chains*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 11. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford ; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975.
- [200] V. Rokhlin. A “general” measure-preserving transformation is not mixing, Doklady Akademii Nauk SSSR, **60** (1948), 349–351. En Russe.
- [201] H.-H. Rugh. *Cones and gauges in complex spaces : Spectral gaps and complex Perron-Frobenius theory*, Annals of Mathematics, Second Series, **171** (2010), no. 3, 1707–1752.
- [202] O. Sarig. *Subexponential decay of correlations*, Inventiones Mathematicæ, **150** (2002), 629–653.
- [203] O. Sarig. *Existence of Gibbs measures for countable Markov shifts*, Proceedings of the American Mathematical Society, **131** (2003), no. 6, 1751–1758.
- [204] B. Saussol. *Absolutely continuous invariant measures for multidimensional expanding maps*, Israel Journal of Mathematics, **116** (2000), 223–248.
- [205] K. Schmidt. *Lectures on cocycles of ergodic transformation groups*, MacMillan Lectures in Mathematics, MacMillan Company of India, New Delhi, 1977.
- [206] T. Sera et K. Yano. *Multiray generalization of the arcsine laws for occupation times of infinite ergodic transformations*, Transactions of the American Mathematical Society, **372** (2019), no. 5, 3191–3209.
- [207] C. Series. *Symbolic dynamics for geodesic flows*, Acta Mathematica, **146** (1981), 103–128.
- [208] C. Series. *The modular surface and continued fractions*, Journal of the London Mathematical Society. Second Series, **31** (1985), no. 1, 69–89.
- [209] C. Series. *The geometry of Markoff numbers*, The Mathematical Intelligencer, **7** (1985), no. 3, 20–29.
- [210] W. Shen et S. van Strien. *Recent developments in interval dynamics*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians – Seoul, 2014. Vol. III. Kyunh Moon Sa, Seoul, 2014. 699–719.
- [211] Y.G. Sinai. *Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards*, Akademija Nauk SSSR i Moskovskoe Matematicheskoe Obscestvo. Uspehi Matematicheskikh Nauk, **25** (1970), no. 2, 141–192. En Russe.
- [212] A.V. Skorokhod. *Limit theorems for stochastic processes*, Theory of Probability & Its Applications, **1** (1956), no. 3, 261–290.
- [213] F. Spitzer. *Principles of random walk*, Graduate Texts in Mathematics, **34** (1964). Springer-Verlag, New York.
- [214] D. Szász et T. Varjú. *Local limit theorem for the Lorentz process and its recurrence in the plane*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **24** (2004), no. 1, 257–278.
- [215] D. Szász et T. Varjú. *Limit laws and recurrence for the planar Lorentz process with infinite horizon*, Journal of Statistical Physics, **129** (2007), no. 1, 59–80.
- [216] M. Thaler. *Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points*, Israel Journal of Mathematics, **37** (1980), 303–314.
- [217] M. Thaler. *A limit theorem for the Perron-Frobenius operator of transformations on $[0, 1]$ with indifferent fixed points*, Israel Journal of Mathematics, **91** (1995), 111–127.
- [218] M. Thaler. *The asymptotics of the Perron-Frobenius operator of a class of interval maps preserving infinite measures*, Studia Mathematica, **143** (2000), 103–119.

- [219] M. Thaler. *A limit theorem for sojourns near indifferent fixed points of one-dimensional maps*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **22** (2002), no. 4, 1289–1312.
- [220] D. Thomine. *A spectral gap for transfer operators of piecewise expanding maps*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **30** (2011), no. 3, 917–944.
- [221] D. Thomine. *A generalized central limit theorem in infinite ergodic theory*, Probability Theory and Related Fields, **158** (2014), no. 3-4, 597–636.
- [222] D. Thomine. *Variations on a central limit theorem in infinite ergodic theory*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **35** (2015), no. 5, 1610–1657.
- [223] D. Thomine. *Local time and first return time for periodic semi-flows*, Israel Journal of Mathematics, **215** (2016), no. 1, 53–98.
- [224] D. Thomine. *Sinaï billiard maps with Ruelle resonances*, Nonlinearity, **33** (2020), no. 12, 6971.
- [225] D. Thomine. *Keplerian shear in ergodic theory*, Annales Henri Lebesgue, **3** (2020), 649–676.
- [226] D. Thomine. *Potential theory and \mathbb{Z}^d -extensions*, arXiv :2112.08339v1. Déposé le 15 décembre 2021. À paraître aux Mémoires de la Société Mathématique de France. 83 pp.
- [227] H. Thorisson. *Coupling methods in probability theory*, Scandinavian Journal of Statistics, **22** (1995), no. 2, 159–182.
- [228] M. Tsujii. *Piecewise expanding maps on the plane with singular ergodic properties*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **20** (2000), no. 6, 1851–1857.
- [229] H.D. Ursell. *The evaluation of Gibbs phase-integral for imperfect gases*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **23** (1927), no. 6, 685–697.
- [230] E. van Sebille, M.H. England et G. Froyland. *Origin, dynamics and evolution of ocean garbage patches from observed surface drifters*, Environmental Research Letters, **7** (2012), no. 4, 044040.
- [231] U. von Luxburg. *A tutorial on spectral clustering*, Statistics and Computing, **17** (2007), no. 4, 395–416.
- [232] J. von Neumann. *Proof of the quasi-ergodic hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **18** (1932), no. 1, 70–82.
- [233] L.-S. Young. *Some large deviation results for dynamical systems*, Transactions of the American Mathematical Society, **318** (1990), no. 2, 525–543.
- [234] L.-S. Young. *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Annals of Mathematics, Second Series, **147** (1998), no. 3, 585–650.
- [235] L.-S. Young. *Recurrence times and rates of mixing*, Israel Journal of Mathematics, **110** (1999), 153–188.
- [236] H.-K. Zhang. *Decay of correlations for billiards with flat points I : Channel effects, Dynamical systems, ergodic theory, and probability : In memory of Kolya Chernov*, Contemporary Mathematics **693** (2017). American Mathematical Society, Providence, RI. 239–286.
- [237] H.-K. Zhang. *Decay of correlations for billiards with flat points II : Cusps effect, Dynamical systems, ergodic theory, and probability : In memory of Kolya Chernov*, Contemporary Mathematics **693** (2017). American Mathematical Society, Providence, RI. 287–316.
- [238] R. Zweimüller. *Mixing limit theorems for ergodic transformations*, Journal of Theoretical Probability, **20** (2007), 1059–1071.