Valuations et théorème d'Hadwiger

Journées Louis Antoine

Damien Thomine

IRMAR

5 avril 2012

Notations

- $\mathcal{K}_n$: convexes compacts de $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie de Hausdorff
- Polycon_n : unions finies de convexes compacts de $\mathbb{R}^n$
- E_n : isométries affines de $\mathbb{R}^n$
- Pour K dans $\mathcal{K}_n$ et λ dans $\mathbb{R}$, on note $\lambda K := \{\lambda x \ : \ x \in K\}$
- Pour K, K' dans $\mathcal{K}_n$, on note $K + K' := \{x + x' \ : \ x \in K, \ x' \in K'\}$ (somme de Minkowski)

Propriétés du volume

La mesure de Lebesgue $\mu_{n,n} : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ a les cinq propriétés suivantes:

- positivité : $\mu_{n,n} \geq 0$;

Propriétés du volume

La mesure de Lebesgue $\mu_{n,n} : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ a les cinq propriétés suivantes:

- positivité : $\mu_{n,n} \geq 0$;
- continuité ;

Propriétés du volume

La mesure de Lebesgue $\mu_{n,n} : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ a les cinq propriétés suivantes:

- positivité : $\mu_{n,n} \geq 0$;
- continuité ;
- additivité : $\forall K, K' \in \mathcal{K}_n$, $K \cup K' \in \mathcal{K}_n \Rightarrow$ $\mu_{n,n}(K \cup K') = \mu_{n,n}(K) + \mu_{n,n}(K') - \mu_{n,n}(K \cap K')$;

Propriétés du volume

La mesure de Lebesgue $\mu_{n,n} : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ a les cinq propriétés suivantes:

- positivité : $\mu_{n,n} \geq 0$;
- continuité ;
- additivité : $\forall K, K' \in \mathcal{K}_n$, $K \cup K' \in \mathcal{K}_n \Rightarrow \mu_{n,n}(K \cup K') = \mu_{n,n}(K) + \mu_{n,n}(K') - \mu_{n,n}(K \cap K')$;
- invariance sous l'action de E_n : $\forall K \in \mathcal{K}_n$, $\forall T \in E_n$, $\mu_{n,n}(TK) = \mu_{n,n}(K)$;

Propriétés du volume

La mesure de Lebesgue $\mu_{n,n} : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ a les cinq propriétés suivantes:

- positivité : $\mu_{n,n} \geq 0$;
- continuité ;
- additivité : $\forall K, K' \in \mathcal{K}_n$, $K \cup K' \in \mathcal{K}_n \Rightarrow$ $\mu_{n,n}(K \cup K') = \mu_{n,n}(K) + \mu_{n,n}(K') - \mu_{n,n}(K \cap K')$;
- invariance sous l'action de E_n : $\forall K \in \mathcal{K}_n$, $\forall T \in E_n$, $\mu_{n,n}(TK) = \mu_{n,n}(K)$;
- homogénéité de degré n : $\forall K \in \mathcal{K}_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mu_{n,n}(\lambda K) = |\lambda|^n \mu_{n,n}(K)$.

Valuations

Théorème (Théorème d'extension de Groemer, 1978)

Soit n un entier positif. Soit $\mu : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ une valuation continue. Alors μ s'étend de façon unique à $Polycon_n$, et cette extension vérifie la formule d'inclusion-exclusion:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_i\right) = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{m-r} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,m\} \\ |I|=r}} \mu\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right).$$

Valuations

Théorème (Théorème d'extension de Groemer, 1978)

Soit n un entier positif. Soit $\mu : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ une valuation continue. Alors μ s'étend de façon unique à Polycon$_n$, et cette extension vérifie la formule d'inclusion-exclusion:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_i\right) = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{m-r} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,m\} \\ |I|=r}} \mu\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right).$$

Si μ est E_n-invariante, alors son extension l'est aussi.
Si μ est homogène de degré k, alors son extension l'est aussi.

Plan

Une interprétation probabiliste du volume

Soit X de loi uniforme sur $[0,1]^2$, et K une partie mesurable de $[0,1]^2$. Alors:

$$\mu_{2,2}(K) = \mathbb{P}(X \in K).$$

Une interprétation probabiliste du volume

Soit X de loi uniforme sur $[0,1]^2$, et K une partie mesurable de $[0,1]^2$. Alors:

$$\mu_{2,2}(K) = \mathbb{E}(|\{X\} \cap K|).$$

Une interprétation probabiliste du volume

Soit X de loi uniforme sur $[0,1]^2$, et K une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$. Alors:

$$\mu_{2,2}(K) = \mathbb{E}\left(|(\{X\} + \mathbb{Z}^2) \cap K|\right).$$

L'expérience de l'aiguille de Buffon

On lance aléatoirement (uniformément en position et en angle) une aiguille de longueur $\ell < 1$ sur un parquet dont les lattes sont séparées d'une distance 1.

Proposition (Buffon, 1777)

Il existe une constante C telle que, pour $\ell \in (0, 1)$, la probabilité qu'une aiguille de longueur ℓ intersecte l'une des rainures du parquet est de $C\ell$.

L'expérience de l'aiguille de Buffon

On lance aléatoirement (uniformément en position et en angle) une aiguille de longueur $\ell < 1$ sur un parquet dont les lattes sont séparées d'une distance 1.

Proposition (Buffon, 1777)

Il existe une constante C telle que, pour $\ell \in (0, 1)$, l'espérance du nombre d'intersections d'une aiguille de longueur ℓ avec les rainures du parquet est de $C\ell$.

L'expérience de l'aiguille de Buffon

On lance aléatoirement (uniformément en position et en angle) une aiguille de longueur $\ell < 1$ sur un parquet dont les lattes sont séparées d'une distance 1.

Proposition

Il existe une constante C telle que, pour toute courbe γ continûment dérivable par morceaux, l'espérance du nombre d'intersection de γ avec les rainures du parquet est de $CL(\gamma)$.

En particulier, si γ est un cercle de diamètre 1, l'espérance du nombre d'intersections de γ avec les rainures est de $2 = C\pi$, donc $C = 2/\pi$.

Propriétés du périmètre

Pour tout $K \in \mathcal{K}_2$, on définit $\mu_{1,2}(K)$ comme étant l'espérance du nombre d'intersections de K avec les rainures.
La fonction $\mu_{1,2} : \mathcal{K}_2 \to \mathbb{R}$ a les cinq propriétés suivantes:

- positivité ;
- continuité ;
- additivité ;
- invariance sous l'action de E_2 ;
- homogénéité de degré 1 : $\forall K \in \mathcal{K}_2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mu_{1,2}(\lambda K) = |\lambda|^1 \mu_{1,2}(K)$.

Une troisième valuation

La fonction $\mu_{0,2} : \mathcal{K}_2 \to \mathbb{R}$ telle que $\mu_{0,2}(\emptyset) = 0$ et $\mu_{0,2}(K) = 1$ sinon a les cinq propriétés suivantes:

- positivité ;
- continuité ;
- additivité ;
- invariance sous l'action de E_2 ;
- homogénéité de degré 0 : $\forall K \in \mathcal{K}_2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mu_{0,2}(\lambda K) = |\lambda|^0 \mu_{0,2}(K)$.

Généralisation

Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers. On définit :

- la *Grassmannienne* $\mathrm{Gr}(k, n)$: l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$;
- la *Grassmannienne affine* $\mathrm{Graff}(k, n)$: l'ensemble des sous-espaces affines de dimension k de $\mathbb{R}^n$;

La Grassmannienne $\mathrm{Gr}(k, n)$ a une unique mesure de probabilité invariante sous l'action de $O(\mathbb{R}^n)$.
La Grassmannienne affine $\mathrm{Graff}(k, n)$ a, à constante près, une unique mesure σ-finie $\lambda_{k,n}$ invariante sous l'action de E_n.

Généralisation

Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers. On définit :

- la *Grassmannienne* $\mathrm{Gr}(k, n)$: l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$;
- la *Grassmannienne affine* $\mathrm{Graff}(k, n)$: l'ensemble des sous-espaces affines de dimension k de $\mathbb{R}^n$;

La Grassmannienne $\mathrm{Gr}(k, n)$ a une unique mesure de probabilité invariante sous l'action de $O(\mathbb{R}^n)$.
La Grassmannienne affine $\mathrm{Graff}(k, n)$ a, à constante près, une unique mesure σ-finie $\lambda_{k,n}$ invariante sous l'action de E_n.
On pose :

$$\mu_{k,n}(K) := \lambda_{n-k,n}\left(\{V \in \mathrm{Graff}(n-k, n) : V \cap K \neq \emptyset\}\right).$$

Quelques propriétés

La fonction $\mu_{k,n} : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ a les cinq propriétés suivantes:

- positivité ;
- continuité ;
- additivité ;
- invariance sous l'action de E_n ;
- homogénéité de degré k.

Plan

Théorème de Steiner

Théorème (Steiner, 1840)

Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$. La fonction

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon & \mapsto & \mathrm{Vol}(K + \varepsilon \overline{B}) \\ \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$$

est un polynôme de degré n si K est non vide, et nul si K est vide.

Théorème de Steiner

Théorème (Steiner, 1840)

Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$. La fonction

$$\begin{cases} \varepsilon & \mapsto & \mathrm{Vol}(K + \varepsilon \overline{B}) \\ \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

est un polynôme de degré n si K est non vide, et nul si K est vide.

On définit des quermassintégrales $W_{0,n}(K), \ldots, W_{n,n}(K)$ comme étant (à constante près) les coefficients de ce polynôme:

$$\mathrm{Vol}(K + \varepsilon \overline{B}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_{k,n}(K) \varepsilon^{n-k}.$$

Théorème de Steiner : éléments de preuve

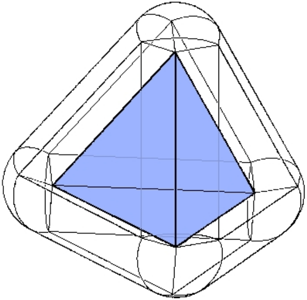

Figure: H. Hadwiger, *Altes und Neues über konvexe Körper*, p.18

Théorème de Steiner : éléments de preuve

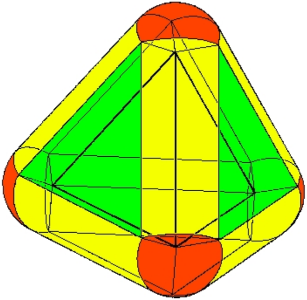

Figure: H. Hadwiger, *Altes und Neues über konvexe Körper*, p.18

Propriétés des quermassintégrales

Soit n un entier positif. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, la fonction $W_{k,n} : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ a les cinq propriétés suivantes:

- positivité ;
- continuité ;
- additivité ;
- invariance sous l'action de E_n ;
- homogénéité de degré k.

Plan

Courbures principales

Soient K un convexe compact à bord de classe $\mathcal{C}^2$, et x un point de ∂K. Soit u le vecteur normal à ∂K en x, unitaire, et dirigé vers l'intérieur de K.

Proposition

Il existe un voisinage U de x et une fonction $f : U \cap T_x\partial K \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout y dans U,

$$y \in \partial K \Leftrightarrow \exists y' \in U \cap T_x\partial K,\ y = y' + f(y')u.$$

On appelle *courbures principales* de ∂K en x les valeurs propres $k_1(x) \geq \cdots \geq k_{n-1}(x) \geq 0$ de la matrice hessienne de f en x.

Cas particuliers

Soit K un convexe compact à bord de classe $\mathcal{C}^2$. Soit σ la mesure d'aire sur ∂K. L'aire de ∂K vaut donc :

$$\int_{\partial K} 1(x) \, \mathrm{d}\sigma(x).$$

Cas particuliers

Soit K un convexe compact à bord de classe $\mathcal{C}^2$. Soit σ la mesure d'aire sur ∂K. L'aire de ∂K vaut donc :

$$\int_{\partial K} 1(x) \, \mathrm{d}\sigma(x).$$

Théorème (Gauss-Bonnet)

En dimension 3,

$$\int_{\partial K} k_1 k_2(x) \, \mathrm{d}\sigma(x) = 4\pi.$$

Polynômes symétriques élémentaires

Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers positifs. On définit le *k-ième polynôme symétrique élémentaire à n indéterminées* $\Sigma_{k,n}$ par:

$$\Sigma_{k,n}(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} X_i.$$

Polynômes symétriques élémentaires

Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers positifs. On définit le *k-ième polynôme symétrique élémentaire à n indéterminées* $\Sigma_{k,n}$ par:

$$\Sigma_{k,n}(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} X_i.$$

On peut exprimer grâce à eux un polynôme en fonction de ses racines:

$$(X - \alpha_1)\ldots(X - \alpha_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \Sigma_{n-k,n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) X^k.$$

Intégrales de courbure

Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers positifs. Soit $K \in \mathcal{K}_n$ un convexe compact à bords lisses. On définit les intégrales de courbure par :

$$H_{k,n} := \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \int_{\partial K} \Sigma_{n-1-k,n-1}(k_1(x), \ldots, k_{n-1}(x)) \, \mathrm{d}\sigma(x).$$

En particulier, $H_{0,n}$ est constant et $H_{n-1,n}$ est la surface.

Propriétés des intégrales de courbure

Soit n un entier strictement positif. Pour tout entier k tel que $0 \leq k < n$, la fonction $H_{k,n} : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ a les cinq propriétés suivantes:

- positivité ;
- continuité ;
- additivité ;
- invariance sous l'action de E_n ;
- homogénéité de degré k.

Plan

Théorème d'Hadwiger

Théorème (Hadwiger, 1955-1957)

Soit n un entier positif. L'ensemble des valuations sur $\mathcal{K}_n$ qui sont :

- *continues ;*
- *invariantes sous l'action de E_n ;*

est un espace vectoriel de dimension $n+1$.

Une conséquence du théorème d'Hadwiger

Corollaire

Soient $0 \leq k < n$ des entiers. Il existe des constantes strictement positives $C_{k,n}$ et $C'_{k,n}$ telles que :

$$\mu_{k,n} = C_{k,n} W_{k,n} = C'_{k,n} H_{k,n}.$$

Classification des valuations

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	$\mu_{0,0}$					$\mu_{0,5}$
1						
2						
3						
4		0				
5						$\mu_{5,5}$

Classification des valuations

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	$\mu_{0,0}$					$\mu_{0,5}$
1						
2						
3						
4			0			
5						$\mu_{5,5}$

$\longrightarrow$ Caractéristique d'Euler

$\longrightarrow$ Largeur moyenne

$\searrow$ Courbure moyenne

$\searrow$ (Hyper)surface

$\searrow$ Volume

Log-concavité des valuations

Corollaire (Corollaire au théorème de Fenchel-Alexandroff)

Soit $n \geq 0$ un entier. La fonction :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} k & \mapsto & W_{k,n} \\ \{0, \ldots, n\} & \to & \mathcal{F}(\mathcal{K}_n, \mathbb{R}_+) \end{array} \right.$$

est log-concave, et la suite $(W_k(\overline{B}_R))_{0 \leq k \leq n}$ est log-linéaire.

Ce corollaire est suffisant pour démontrer certaines familles d'inégalités isopérimétriques.

Plan

Bibliographie

- E. Barbier, *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2ème série, Volume 5, 273-286, 1860.
- H. Hadwiger, *Altes und Neues über konvexe Körper*, Elementes des Mathematik vom höheren Standpunkt aus, Birkhäuser Verlag, 1955.
- D.A. Klain et G.-C. Rota, *Introduction to geometric probability*, Lezioni Lincee, Cambridge University Press, 1997.
- R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1993.