

Billards, tours de Young et paires standards

Damien THOMINE*

Ces notes ont été réalisées pour le groupe de travail de théorie ergodique de l'université d'Orsay, en février-avril 2015. Elles se veulent être une brève introduction aux billards dispersifs et à certaines méthodes utilisées pour les étudier, ainsi qu'à certaines applications relativement récentes de ces méthodes. J'espère offrir un contexte suffisant pour la lecture de travaux sur des questions de moyennisation [6] [9].

Je présenterai tout d'abord les billards hyperboliques (Section 1), les difficultés posées par les discontinuités et leur résolution. Ensuite, je détaillerai deux constructions utilisées pour étudier leurs propriétés les plus fines, telles que la décroissance exponentielle des corrélations pour des observables holdériennes : les tours de Young (Section 2) et les paires standards (Section 3). Enfin, je résumerai trois travaux qui utilisent ces méthodes appliquées à des systèmes assez divers (Section 4). Les quelques figures sont regroupées dans l'annexe à la fin du document.

N'étant pas spécialiste de ces questions, les détails techniques des constructions peuvent être inexacts. Toute remarque ou rectification sera appréciée.

1 Billards hyperboliques

Avant toutes choses, présentons les billards dispersifs et quelques problèmes qui se posent dans leur étude.

1.1 Billards dispersifs

On se place sur le tore plat \mathbb{T}^2 de dimension 2. Un *obstacle* est une partie convexe compacte de \mathbb{T}^2 , de frontière de classe \mathcal{C}^3 et dont la courbure de la frontière est partout strictement positive. Une *table de billard* est l'ensemble $\mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \overset{\circ}{C}$, où \mathcal{C} est un ensemble fini et non vide d'obstacles disjoints¹. On ne considèrera par la suite que des tables de billard à *horizon fini*, c'est-à-dire telles qu'il n'existe aucune droite sur le tore qui ne rencontre un obstacle. Un argument simple de semi-continuité inférieure et de compacité implique que, en horizon fini, la longueur d'un segment qui ne rencontre pas d'obstacle est uniformément bornée.

Soit Ω une table de billard. Soit $T^1\Omega$ le fibré tangent unitaire de Ω , sur lequel on identifie les vecteurs enracinés en un point $x \in \partial\Omega$ avec leur symétrique par rapport à $T_x\partial\Omega$. Soit $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot géodésique sur $T^1\Omega$. Les trajectoires de ce flot correspondent aux trajectoires d'une particule ponctuelle se déplaçant en ligne droite et à vitesse unitaire sur $T^1\Omega$, et rebondissant élastiquement sur les parois des obstacles (**Fig. 1**). Le flot géodésique préserve la mesure produit $dx \cdot dy \cdot d\theta$ sur $T^1\Omega$. Il semble aussi être hyperbolique, au sens où des trajectoires proches vont en général s'écarter à cause de la stricte convexité des obstacles (**Fig. 2**).

*2015, Université de Paris-Sud Orsay. Contact : damien.thomine@math.u-psud.fr.

¹L'hypothèse de disjonction peut être affaiblie. On peut par exemple autoriser des pointes, là où deux obstacles convexes sont tangents. Cependant, cela induit des complications techniques considérables.

Le flot du billard est aussi continu, avec des singularités engendrées par les tangences (**Fig. 3**). Pour étudier le flot géodésique, on va utiliser une section de Poincaré. Une telle section est donnée sur un plateau : l'application de collision sur les bords des obstacles, que l'on peut écrire comme $T : A := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \partial C \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow A$. Cette transformation préserve la mesure de Liouville $d\text{Liouv} := \cos(\theta)d\ell d\theta$, que l'on normalisera pour en faire une mesure de probabilité.

Malheureusement, là où le flot $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est continu, l'application de collision ne l'est plus (**Fig. 4**). Le lieu de ses discontinuités est une union finie² de courbes monotones de classe \mathcal{C}^2 . Pire encore, la dérivée de T explose au voisinage des discontinuités. Quel est le comportement du système dynamique associé ?

1.2 Hyperbolicité

Le système dynamique (A, Liouv, T) est un système hyperbolique par morceaux. En tout point $x \in A$, sauf en les singularités, on peut définir sur l'espace tangent un cône stable \mathcal{C}_x^s et un cône instable \mathcal{C}_x^u , de telle sorte que la dynamique soit contractante sur le cône stable, dilatante sur le cône instable, et que ces cônes soient stables respectivement par T^{-1} et par T . Par exemple, on peut choisir $\mathcal{C}_x^u = \{d\ell \leq \mathcal{K}d\theta\}$ pour une constante $\mathcal{K} > 0$ fixée. De là, on peut définir des courbes stables ou instables : une courbe \mathcal{C}^1 est stable (respectivement instable) si son vecteur tangent en x est non nul et appartient à \mathcal{C}_x^s (respectivement \mathcal{C}_x^u) en tout point x de la courbe. Si l'on ignore momentanément les discontinuités et l'explosion de la dérivée près de ces discontinuités, la dynamique allonge les courbes instables, de telle sorte qu'elles s'équidistribuent dans l'espace des phases. Malheureusement, l'application T n'est pas continue...

À cause des effets de distortions près des singularités, il est utile de travailler avec des courbes *homogènes* [8], [14].

Définition 1.1 (Courbes homogènes).

On se fixe une constante $D \gg 1$. Une courbe instable γ de classe \mathcal{C}^1 est dite homogène si elle ne croise pas de singularité et si, en tous points x et y de la courbe,

$$\ln \left| \frac{D_x T(\gamma'(x)) \|\gamma'(y)\|}{D_x T(\gamma'(y)) \|\gamma'(x)\|} \right| \leq D \frac{d(x, y)}{\ell(\gamma)^{2/3}},$$

et :

$$|\angle(\gamma'(x), \gamma'(y))| \leq D \frac{d(x, y)}{\ell(\gamma)^{2/3}}.$$

De même, on peut définir des courbes stables homogènes.

On notera que la définition même des courbes homogènes dépend des constantes \mathcal{K} et D .

Pour un tel système, il n'est pas évident *a priori* que l'hyperbolicité parvienne à engendrer du chaos. De plus, certains objets du monde hyperbolique, tels que les variétés stables et instables, sont plus délicats à définir ou à contrôler. Par exemple, une variété stable en un point x est une sous-variété topologique $W^s(x)$ de dimension 1, telle que $x \in W^s(x)$ et $(T^n)_{n \geq 0}$ contracte $W^s(x)$ à vitesse exponentielle. Mais une telle variété n'existe pas en un point dont l'orbite passe par une discontinuité, ou même seulement dont l'orbite passe souvent "trop près" des discontinuités.

Le pire scénario qui puisse arriver est que l'action de T dilate une courbe instable, mais que cette image soit découpée par une singularité, puis que ses morceaux soient encore découpés, et ainsi de suite (**Fig. 5**). On pourrait alors avoir un nombre croissant exponentiellement de morceaux de

²En horizon infini, le lieu des discontinuités devient une union infinie de telles courbes.

plus en plus petits (mais dont la longueur totale croît). Si l'application T envoyait de plus tous ces morceaux près les uns des autres, alors l'action de T pourrait avoir un effet globalement contractant³ !

Lemme de croissance

L'un des lemmes fondamentaux de l'analyse des billards hyperboliques est le *lemme de croissance*. Celui-ci affirme que, si \mathcal{K} est assez grand, la plupart des morceaux d'une courbe homogène seront plutôt grands. Soit γ une courbe homogène. Si \mathcal{K} est bien choisi, les itérées de γ intersectent toujours les singularités transversalement, de telle sorte que $T^n(\gamma)$ soit toujours une union finie de courbes instables. Pour tout $n \geq 0$ et $x \in \gamma$, soit $r_n(x)$ la distance de $T^n(x)$ aux l'extrémités du morceau de $T^n(\gamma)$ le contenant. Finalement, soit Leb_γ la mesure de Lebesgue sur la courbe γ normalisée pour être de masse 1.

Lemme 1.2 (Lemme de croissance, première version - [8], Theorem 5.52 et Theorem 5.53).

Supposons que \mathcal{K} et D soient suffisamment grands. Alors il existe des constantes $0 < \beta_1 < \Lambda^{-1} < 1$ et $\beta_2, \beta_3, \beta_4 > 0$ telles que, pour toute courbe homogène γ , pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \geq 0$,

$$\text{Leb}_\gamma(r_n \leq \varepsilon) \leq (\beta_1 \Lambda)^n \text{Leb}_\gamma(r_0 \leq \varepsilon \Lambda^{-n}) + \beta_2 \varepsilon, \quad (1.1)$$

et, si $n \geq \beta_3 |\ln \ell(\gamma)|$:

$$\text{Leb}_\gamma(r_n \leq \varepsilon) \leq \beta_4 \varepsilon, \quad (1.2)$$

La deuxième équation de ce lemme affirme que, si on laisse à la courbe γ le temps de grandir, alors les morceaux de taille au plus ε de $T^n(\gamma)$ ne représentent au plus qu'une proportion $O(\varepsilon)$ de la longueur totale des morceaux de $T^n(\gamma)$. En particulier, le scénario catastrophe évoqué précédemment devient impossible, et en presque tout point il existe des variétés stables et instables⁴. Ce lemme est à la base des méthodes permettant d'étudier les propriétés statistiques fines des billards hyperboliques, et en particulier la décroissance exponentielle des corrélations.

On veut maintenant montrer l'existence de constantes $C \geq 1$ et $\beta_1 \in (0, 1)$ telles que, pour tout couple d'observables f et g sur A à valeurs réelles et suffisamment régulières, disons α -holdériennes pour un certain $\alpha > 0$,

$$|\mathbb{E}(f \circ T^n \cdot g) - \mathbb{E}(f)\mathbb{E}(g)| \leq C \beta_1^n \|f\|_{\alpha\text{-Hölder}} \|g\|_{\alpha\text{-Hölder}}.$$

Les deux principales constructions permettant d'obtenir un tel résultat sont les *tours de Young* et le *couplage de paires standards*.

2 Tours de Young

Je vais maintenant présenter une première méthode permettant d'obtenir des résultats fins sur les billards, tels que la décroissance exponentielle des corrélations pour des observables suffisamment régulières : la construction des tours de Young [17].

³Pour des exemples de ce phénomène de découpage et quelques pathologies associées (convergence presque sûre des mesures empiriques vers un Dirac, existence d'une infinité de mesures invariantes et absolutes continues réciproquement singulières, etc.), nous renvoyons le lecteur aux travaux de M. Tsujii [16] et J. Buzzi [4]

⁴Qui, cependant, peuvent être arbitrairement courtes, à cause des points qui passent trop près des singularités.

2.1 Contexte

Au milieu des années 1980, certaines propriétés statistiques des billards sont connues, comme le théorème central limite [3]. D'autres restent seulement conjecturées. Par exemple, on sait que la décroissance des corrélations pour des observables suffisamment régulières se fait au moins à vitesse exponentielle étirée [3], mais sans que l'on sache améliorer cette estimation en décroissance exponentielle. Les tours de Young sont le premier outil à percer cette barrière [17], en 1998. Je vais décrire brièvement leur origine, afin de souligner à la fois les points communs et les différences par rapport aux méthodes utilisant des paires standards.

Une des approches usuelles en dynamique hyperbolique consiste à coder la dynamique afin de se ramener à un système markovien. De là, par des techniques d'opérateurs, on peut souvent démontrer la décroissance exponentielle des corrélations, ainsi que des propriétés plus fines telles que des estimées de grandes déviations. Cependant, un codage markovien d'un billard ne peut se faire qu'avec un alphabet dénombrable. Bien que cela soit possible [2], sans propriété supplémentaire⁵ cette méthode n'aboutit pas : il manque par exemple une propriété de type "grande image", qui affirmerait que la mesure de l'image de chaque élément de la partition markovienne ne soit pas trop petite. On peut aussi approcher le billard par des systèmes markoviens avec un alphabet fini, mais là encore, les résultats ne sont pas optimaux (voir les bornes exponentielles étirées de Bunimovich et Sinai évoquées précédemment).

La construction des tours de Young est plus complexe. Au lieu de chercher un codage direct des trajectoires, on réalise le billard comme un facteur d'une tour au-dessus d'une extension d'une application Gibbs-Markov (i.e. markovienne telle que les images des boîtes de la partition ne peuvent pas être trop étroites). De plus, la hauteur de la tour est une variable aléatoire dont les queues décroissent exponentiellement vite, et qui est en un certain sens apériodique⁶. Ces extensions d'applications Gibbs-Markov ont d'excellentes propriétés statistiques, et en particulier on peut faire agir l'opérateur de transfert d'une application Gibbs-Markov de façon quasi-compacte sur des espaces de fonctions höldériennes. Comme la hauteur de la tour a une queue exponentielle et vérifie une hypothèse d'apériodicité, on peut en déduire la décorrélation à vitesse exponentielle de certaines observables.

Dans le détail, une tour de Young associée à un billard est la donnée d'une extension $(\Lambda, \mu_\Lambda, f)$ d'une application Gibbs-Markov $(\bar{\Lambda}, \bar{\mu}_\Lambda, \bar{f})$, d'une variable aléatoire $R : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}^*$ qui ne dépend que du futur et qui a une queue exponentielle, et d'une semi-conjugaison $\pi : (\Lambda^R, \mu_\Lambda^R, f_R) \rightarrow (A, T)$, où $(\Lambda^R, \mu_\Lambda^R, f_R)$ est la tour de Rokhlin de base $(\Lambda, \mu_\Lambda, f)$ et de hauteur R (de telle sorte que $f = f_R^R$ sur la base). On définit de même une tour de Rokhlin $(\bar{\Lambda}^R, \bar{\mu}_\Lambda^R, \bar{f}_R)$. On passe de Λ à $\bar{\Lambda}$, et donc de Λ^R à $\bar{\Lambda}^R$, en projetant le long des variétés instables (**Fig. 1**). On obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (\bar{\Lambda}^R, \bar{\mu}_\Lambda^R) & \longleftarrow & (\Lambda^R, \mu_\Lambda^R) & \xrightarrow{\pi} & (A, \mu) \\ \downarrow \bar{f}_R & & \downarrow f_R & & \downarrow T \\ (\bar{\Lambda}^R, \bar{\mu}_\Lambda^R) & \longleftarrow & (\Lambda^R, \mu_\Lambda^R) & \xrightarrow{\pi} & (A, \mu), \end{array}$$

2.2 Construction

J'expose dans cette partie une version simplifiée de la construction des tours de Young, qui est inexacte mais présente néanmoins les principales étapes. Dans cette partie, pour tout $x \in \Omega$ et tout

⁵Comme, par exemple, une propriété de grand image.

⁶Ce qui est équivalent au fait que le système soit mélangeant.

$\delta > 0$, on note $W_\delta^s(x) := \{y \in W^s(x) : d^s(x, y) < \delta\}$, où d^s est la distance mesurée le long de $W^s(x)$. On dit que $W_\delta^s(x)$ existe si cette courbe est de longueur 2δ , auquel cas δ est le rayon de $W_\delta^s(x)$. On définit de même $W_\delta^u(x)$.

Pour construire les tours de Young pour des applications hyperboliques par morceaux [17, Chapitre 7], on part d'un point x en lequel les variétés stables et instables sont bien définies. On fixe $\delta > 0$ suffisamment petit et tel que la variété instable $W^u(x)$ soit de rayon au moins 3δ . Ensuite, on garde l'ensemble $\Omega_\infty(x)$ des éléments de $W_\delta^u(x)$ qui ne s'approchent pas trop près des singularités (et donc en lesquels la variété stable est bien définie et de rayon minoré par un paramètre $\delta' > 0$ suffisamment petit), et qui sont à distance au plus δ de x . L'union des variétés stables de rayon δ' passant par les points de $\Omega_\infty(x)$ donne un ensemble $\Lambda(x)$ qui a une structure produit, c'est-à-dire que $\Lambda(x) \simeq \Omega_\infty(x) \times W_{\delta'}^s(x)$. On note $Q(x)$ le rectangle $W_\delta^u(x) \times W_{\delta'}^s(x)$. En résumé :

- $\Omega(x) = W_\delta^u(x)$ est un morceau de courbe instable de rayon δ ;
- $\Omega_\infty(x) := \{y \in W_\delta^u(x) : W_{\delta'}^s(y) \text{ existe}\}$ est un Cantor de mesure conditionnelle positive dans $\Omega(x)$;
- $\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Omega_\infty(x)} W_{\delta'}^s(y) \simeq \Omega_\infty(x) \times W_{\delta'}^s(x)$ est de mesure de Liouville positive ;
- $Q(x) \simeq \Omega(x) \times W_{\delta'}^s(x)$ est une boîte qui contient $\Lambda(x)$.

Ensuite, on construit le temps de retour R récursivement. Initialement, $R \geq 1$. Étant donné $n \geq 1$, on partitionne l'ensemble $\Omega_\infty(x) \setminus \{R < n\}$ en sous-ensembles de points qui en sont pas séparés par les singularités ou par l'opération qui suit avant le temps n . Soit Ω_n une de ces classes. Alors :

- Si $T^n(\Omega_n)$ n'intersecte pas $Q(x)$, ou si l'intersection ne dépasse pas de δ de chaque côté dans la direction instable, alors $R > n$;
- Sinon, on pose $R \equiv n$ sur $(\Omega_n \times W_{\delta'}^s(x)) \cap T^{-n}(\Lambda_\infty(x))$, et $R > n$ sur les deux morceaux qui dépassent (et qui à partir de maintenant sont désolidarisés) (**Fig. 7**).

En cas de découpage, les deux morceaux créés sont de longueur au moins δ dans la direction instable. Le lemme de croissance, et en particulier l'équation (1.2), permet de s'assurer que ces morceaux mettront un temps au plus $\beta_4 |\ln \delta|$ pour atteindre à nouveau une longueur suffisante, et que quite à attendre un peu plus (mais un temps constant), un proportion positive crociera $Q(x)$ en dépassant de δ de chaque côté. On en déduit des bornes exponentielles sur R . De plus, R est mesurable pour la tribu $\bigvee_{n \geq 1} \Omega_n$, qui est engendrée par une partition dénombrable qui tient lieu d'alphabet. Les trajectoires futures peuvent être codées par cet alphabet. La propriété de Markov découle du fait que, par construction, toutes les branches sont surjectives.

Dans le cadre du billard, l'apériodicité de R se déduit du fait que le billard est mélangeant (voire par exemple Y. Pesin [15]). Il y a cependant un détail technique embêtant : contrairement aux applications hyperboliques par morceaux, la dérivée des billards explose près des singularités. Au contrôle sur les longueurs (i.e. le fait que l'on demande à $f^n(\Omega_n)$ de dépasser suffisamment de chaque côté de $Q(x)$) il faut rajouter un contrôle sur la distortion. Cela se fait en introduisant des *bandes d'homogénéité*, de la forme $T^{-1}(\partial C \times [(k+1)^{-2}, k^{-2}])$ ou $T^{-1}(\partial C \times (\pi - k^{-2}, \pi - (k+1)^{-2}])$, pour k entier. Sur ces bandes, la dérivée de T varie peu. On raffine les partitions de telle sorte que les ensembles Ω_n soient homogènes, au sens où les points d'une même classe appartiennent à des bandes d'homogénéité proches avant qu'ils ne soient arrêtés (i.e. que la procédure pour fixer R termine) ou séparés.

Cela termine la construction des tours de Young. J'insiste sur le fait que l'ensemble $\Lambda(x)$ n'est pas une section de Poincaré. On n'arrête pas un point la première fois qu'il traverse $\Lambda(x)$: encore faut-il qu'un morceau homogène de sa variété instable dépasse suffisamment de chaque côté de la boîte $Q(x)$. Par conséquent, l'application naturelle $\pi : \Lambda^R \rightarrow A$ n'est pas un isomorphisme, mais une semi-conjugaison surjective.

2.3 Avantages et inconvénients

La force de la méthode des tours de Young n'est plus à démontrer. Elle est générale : cette construction s'applique non seulement aux billards, mais aussi à certains applications unimodales (comme la transformation logistique pour des paramètres bien choisis) ou à certains transformations de Hénon. Elle relie ces systèmes à des transformations bien connues (les applications Gibbs-Markov), et permet de leur appliquer des méthodes très puissantes (*via* les opérateurs de transfert). De là, il n'est pas étonnant d'en tirer un certain nombre de résultats très forts : la décroissance exponentielle des corrélations, bien sûr, mais aussi - pour peu que l'on admette aussi des temps de retour R dont les queues sont polynomiales - la récurrence de gaz de Lorentz en horizon fini ou infini [13], un théorème central limite non standard pour le billard stade [1]...

Cependant, cette méthode a aussi ses faiblesses. La principale est la rigidité de la construction est le manque de contact avec la dynamique sous-jacente. L'effet d'une perturbation du système initial sur la tour de Young associée (si elle existe encore) est extrêmement complexe.

Ce second obstacle est peut-être le plus remarquable pour des perturbations locales de gaz de Lorentz, comme expliqué en Sous-section 4.1. Un gaz de Lorentz est une \mathbb{Z}^d -extension $(A \times \mathbb{Z}^d, \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} \mu \otimes \delta_q, (T(\cdot), \cdot + F))$ d'un billard. On dispose d'une \mathbb{Z}^d -extension naturelle de la tour de Young associée au billard, qui est aussi une extension du gaz de Lorentz [13, équation (6)] :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda^R \times \mathbb{Z}^d, \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} \mu \otimes \delta_q, (f^R(\cdot), \cdot + \tilde{F})) & \longrightarrow & (\Lambda^R, \mu, f^R) \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ (A \times \mathbb{Z}^d, \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} \text{Liouv} \otimes \delta_q, (T(\cdot), \cdot + F)) & \longrightarrow & (A, \text{Liouv}, T), \end{array}$$

où $\tilde{\pi}((x, n), q) = (\pi(x, n), q + \sum_{k=0}^{n-1} F \circ \pi(x, k))$ et $\tilde{F}(x, 0) = \sum_{k=0}^{R(x)-1} F \circ \pi(x, k)$. Cependant, si cette construction est très utile pour travailler sur les gaz de Lorentz classiques, elle ne fonctionne plus dès que l'on brise la symétrie introduite par la \mathbb{Z}^d -extension, par exemple en introduisant des perturbations locales du gaz de Lorentz (voir la Sous-section 4.1), ou un champ de force qui, localement, accélère la particule dans une direction (voir la Sous-section 4.2). Ce défaut constitue une des motivations pour la méthode suivante, celle des paires standards.

3 Paires standards

Je vais maintenant présenter une deuxième construction permettant elle aussi d'obtenir la décroissance des corrélations à vitesse exponentielle : une méthode de couplage entre paires standards. Les objets obtenus sont moins rigides, ce qui empêche par exemple l'utilisation de méthodes spectrales, mais permet de mieux s'adapter à des modifications du système dynamique. Cette flexibilité permettra entre autres d'appliquer les méthodes de paires standards à de nombreux problèmes en Section 4, y compris à des questions de moyennisation.

3.1 Présentation

Soit (A, μ, T) un système dynamique hyperbolique. Les *paires standards* sont, grossièrement, des courbes instables régulières portant une mesure absolument continue dont la densité est elle aussi régulière. Le terme de “paire” se réfère au couple formé par la courbe et la mesure portée par la courbe. De telles paires vont être typiquement dilatées par la dynamique et, dans les meilleurs cas, vont s'équidistribuer. On peut alors utiliser une méthode de couplage, esquissée en Sous-section 3.3, pour montrer la décroissance exponentielle des corrélations.

Définition

Il n'y a pas une définition universelle des paires standards ; celle-ci dépend du système étudié. Je vais donner ici une définition pour les billards, en accord avec [8].

Définition 3.1 (Paires standards).

Une *paire standard* est un couple (γ, ρ) , où γ est une courbe instable homogène, où $\rho \in \mathbb{L}^1(\gamma, \text{Leb}_\gamma)$ est la densité continue d'une mesure de probabilité et, pour une certaine constante $D' > 0$:

$$|\ln(\rho(x)) - \ln(\rho(y))| \leq D' \Theta^{s_+(x,y)},$$

où $\Theta \in (0, 1)$ est bien choisi et s_+ est le temps de séparation de x et y par les singularités.

Remarquons que la définition d'une paire standard dépend des constantes Θ et D' , mais aussi des constantes \mathcal{K} et D choisies dans la définition de courbe homogène. Pour peu que ces constantes soient suffisamment grandes, cela n'a aucune influence sur les questions de lemmes de croissance, de couplage de paires standards, ou encore de décroissance des corrélations. Ces constantes ont plus d'importance dans les travaux sur des questions de moyennisation [6] [9].

En revanche, J. De Simoi et C. Liverani travaillent dans un contexte plus simple, et par conséquent leur définition des paires standards est elle aussi plus simple ([9], Section 3). Leur modèle évite les problèmes de discontinuité et de distorsion associés aux billards, et donc les conditions utilisées dans la définition d'une courbe homogène sont remplacées par des bornes élémentaires sur les deux premières dérivées.

Enfin, on définit une *famille standard* comme étant une loi de probabilité sur l'espace des paires standards. À chaque famille standard \mathcal{F} est associée une mesure de probabilité $\mu_{\mathcal{F}}$ sur A par :

$$\mu_{\mathcal{F}}(\varphi) := \int_{\gamma} \int_{\gamma} f(x) \rho(x) \, d\text{Leb}_\gamma(x) \, d\mathcal{F}(\gamma, \rho).$$

Pour simplifier, on peut ne considérer que les lois à support fini (dans le contexte simplifié de [9]) ou dénombrable (pour les billards), mais l'avantage de la définition plus générale est que l'on peut alors associer une famille standard à la mesure de Liouville : il suffit de désintégrer la mesure de Liouville le long d'un feuilletage par des courbes homogènes.

Lemme de croissance

L'espace des paires standards n'est pas stable sous la dynamique : une courbe homogène se fera tôt ou tard découper par des singularités. L'espace des familles standards, lui, est stable sous l'action évidente de T , si l'on associe les paires standards qui se font découper par la dynamique. On peut traduire le lemme de croissance en termes de familles standards, ce qui simplifie son énoncé. Soit (γ, ρ) une paire standard. Posons :

$$Z_{(\gamma, \rho)} := \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\int_{\gamma} \mathbf{1}_{r_0 \leq \varepsilon}(x) \rho(x) \, d\text{Leb}_\gamma(x)}{\varepsilon}.$$

La valeur $Z_{(\gamma,\rho)}$ quantifie la concentration de la masse $\rho d\text{Leb}_\gamma$ près des extrémités de la courbe. Pour un segment portant la mesure de Lebesgue, $Z_{(\gamma,\rho)} = 2\ell(\gamma)^{-1}$. On étend la fonction Z aux familles standards par :

$$Z_{\mathcal{F}} := \int Z_{(\gamma,\rho)} d\mathcal{F}(\gamma,\rho). \quad (3.1)$$

Le lemme de croissance s'énonce alors de la manière suivante.

Lemme 3.2 (Lemme de croissance, deuxième version - [8], Proposition 7.17 et Corollary 7.18).

Supposons que \mathcal{K} et D soient suffisamment grands. Alors il existe des constantes $\beta_1 \in (0, 1)$ et $C, \beta_2, \beta_3, \beta_4 > 0$ telles que, pour toute famille standard \mathcal{F} , pour tout $n \geq 0$,

$$Z_{T_*^n \mathcal{F}} \leq C\beta_1^n Z_{\mathcal{F}} + \beta_2,$$

et, si $n \geq \beta_3 |\ln Z_{\mathcal{F}}|$:

$$Z_{T_*^n \mathcal{F}} \leq \beta_4.$$

3.2 Couplage et chaînes de Markov

Quand on travaille avec des paires standards, la décroissance des corrélations s'obtient à l'aide d'un mécanisme de couplage. Avant toutes choses, rappelons comment cette méthode fonctionne avec des chaînes de Markov.

Soit E un ensemble fini. On se fixe un noyau de transition sur E mélangeant (c'est-à-dire que la matrice stochastique associée P est irréductible et apériodique). Soient μ et ν des mesures de probabilité sur E . Si l'on considère ces mesures comme étant les mesures au temps initial d'un processus stochastique, on engendre de deux chaînes de Markov (M_n^μ) et (M_n^ν) sur E . On veut coupler ces processus stochastiques.

Définition 3.3 (Couplage).

Soient A et B deux espaces polonais. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans A et B respectivement. Un couplage entre X et Y est la donnée d'un espace polonais probabilisé Ω et de deux variables aléatoires $f : \Omega \rightarrow A$ et $g : \Omega \rightarrow B$ telles que $f \equiv X$ et $g \equiv Y$ en loi.

La matrice P étant mélangeante, il existe $N \geq 1$, $x \in E$ et $c > 0$ tels que, pour toute mesure de probabilité μ' sur E ,

$$\mathbb{P}_{\mu'}(M_N^{\mu'} = x) \geq c.$$

On utilise cette propriété pour coupler les processus (M_n^μ) et (M_n^ν) . Après un temps N , les deux processus ont une probabilité au moins c d'être en x . On couple alors une masse c de ces deux processus en imposant à certaines trajectoires partant de x de coïncider pour tous temps $n \geq N$ (**Fig. 8**). On attend un temps supplémentaire N , et on recommence en couplant une proportion c de la masse non couplée restante, etc.. On a alors montré la proposition suivante :

Proposition 3.4 (Couplage de chaînes de Markov).

On peut définir sur un même espace probabilisé un couplage entre (M_n^μ) et (M_n^ν) et une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, finie presque sûrement, tels que :

- $M_n^\mu = M_n^\nu$ pour tout $n \geq Y$;
- Il existe des constantes $C \geq 1$ et $\beta_1 \in (0, 1)$ telles que, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Y \geq n) \leq C\beta_1^n.$$

De plus, les constantes C et β_1 peuvent être choisies uniformes en μ et ν .

On déduit directement d'un tel couplage la propriété de décroissance des corrélations attendue. Il existe une unique mesure de probabilité stationnaire μ sur E . Pour tout $\nu \in \mathcal{P}(E)$, pour toutes fonctions f, g dans \mathbb{R}^E , pour tout $n \geq 0$,

$$|\mathbb{E}(f(M_n^\nu)g(M_0^\nu)) - \mathbb{E}_\mu(f)\mathbb{E}_\nu(g)| \leq 2C\beta_1^n \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

3.3 Couplage de paires standards

La démonstration de la décroissance exponentielle des corrélations pour des mesures portées par des paires standards est semblable à celle des chaînes de Markov présentée dans la sous-section précédente. La différence principale est que le système garde en mémoire le passé. Il n'est pas raisonnable d'attendre que des itérées de paires standards distinctes coïncident (elles sont en générales disjointes). On va donc attendre qu'elles ne soient séparées que par de petits morceaux de variétés stables avant de les coupler. D'une part, si les couplages sont faits correctement, la masse des morceaux non couplés décroît à vitesse exponentielle ; d'autre part, la distance entre les morceaux couplés décroît elle aussi à vitesse exponentielle.

La construction d'un tel couplage suit de très près la construction des tours de Young. On fixe une boîte $Q(x)$ construite de la même façon. Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux familles standards. Si l'on attend un temps N suffisamment grand, alors une proportion positive des paires standards de chaque famille traverse la boîte transversalement, en dépassant d'une longueur au moins δ de chaque côté de la boîte, et les densités qu'elles portent sont devenues suffisamment proches de la mesure de Lebesgue grâce à l'effet régularisant de la dynamique sur les variétés instables. Il sera utile d'exiger aussi que les variétés stables se continuent uniformément au-delà de la boîte $Q(x)$, ce qui peut se faire en réduisant la taille de la boîte.

Si on voulait construire des tours de Young, on aurait ignoré les densités, et on aurait fixé $R \equiv N$ sur $(T^{-N}$ appliqué à) l'intersection de ces paires standards avec $Q(x)$. Ici, on va s'inspirer de la construction de la Sous-section 3.2, et on va coupler les paires standards de $T_*^N \mathcal{F}$ et $T_*^N \mathcal{F}'$ qui sont dans la boîte, sans toucher à celles au-dehors. Pour cela, on met en correspondance les points sur une même variété stable (**Fig. 9**), de telle sorte qu'ils aient, à écart exponentiellement petit près, les mêmes orbites dans le futur. Il n'y a aucune raison pour que les densités correspondent parfaitement et que l'on puisse coupler toute la masse dans $Q(x)$; cependant, comme toutes les densités sont proches de la mesure de Lebesgue, on peut en coupler une proportion positive bornée inférieurement.

Une fois ce couplage fait, on oublie la masse que l'on a couplée. Cela revient à modifier les familles standards $T_*^N \mathcal{F}$ et $T_*^N \mathcal{F}'$, en désolidarisant les morceaux qui dépassent de la boîte de ceux dans la boîte (un détail déjà présent dans la construction des tours de Young), et en diminuant les densités sur les morceaux dans la boîte (car on leur enlève la masse qui a été couplée). Si on a enlevé la masse de façon raisonnée, cette construction n'augmente pas trop la valeur du paramètre de contrôle Z défini par l'équation (3.1).

Si Z est supposé borné, on obtient des bornes uniformes dans la propriété de décorrélation exponentielle. On se fixe donc une constante C_p suffisamment grande, et on dit qu'une famille standard \mathcal{F} est *propre* si $Z_{\mathcal{F}} \leq C_p$. Si les deux familles standards initiales sont propres, on peut alors faire en sorte que toutes les familles standards qui apparaissent dans l'algorithme précédent soient aussi propres.

Lemme 3.5 (Lemme de couplage - [8], Lemma 7.24).

Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux familles standards propres. Alors on peut définir sur un même espace probabilisé un couplage (x, y) entre $\mu_{\mathcal{F}}$ et $\mu_{\mathcal{F}'}$ et une variable aléatoire Y à valeurs dans \mathbb{N} tels que presque sûrement :

- $T^Y(x)$ et $T^Y(y)$ appartiennent à la même variété stable ;
- Il existe des constantes $C \geq 1$ et $\beta_1 \in (0, 1)$ telles que, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Y \geq n) \leq C\beta_1^n.$$

De plus, les constantes C et β_1 peuvent être choisies uniformes en \mathcal{F} et \mathcal{F}' : elles ne dépendent que du billard, des constantes \mathcal{K} , D , D' , Θ , C_p .

Dans leur lemme [8], N. Chernov et R. Markarian sont un peu plus précis. Ils réalisent l'espace probabilisé sous-jacent comme $\bigcup_{\gamma} \gamma \times [0, 1]$, muni de la mesure $\int \rho \, d\text{Leb}_{\gamma} \otimes d\text{Leb}_{[0,1]} \, d\mathcal{F}$. La coordonnée supplémentaire offerte par l'intervalle $[0, 1]$ permet de prendre en compte la donnée de la masse de chaque paire standard (γ, ρ) que l'on couple à chaque itération.

De ce lemme on déduit la décroissance exponentielle des corrélations. Si f et g sont deux observables holdériennes, avec $g \geq 0$ et $\int g \, d\mu = 1$, alors on peut désintégrer $gd\mu$ en une famille standard, de même que l'on peut désintégrer μ en une famille standard. Le lemme 3.5 permet de conclure.

Remarquons que la décroissance exponentielle des corrélations peut se formuler de façon légèrement différente. Soit ν une mesure de probabilité sur A telle que $d\nu/d\mu$ soit holdérienne. Soit f une fonction holdérienne. Alors $\mathbb{E}_{\nu}(f \circ T^n)$ converge à vitesse exponentielle vers $\mathbb{E}_{\mu}(f)$, et la vitesse se contrôle en fonction de la régularité de f et de $d\nu/d\mu$. La méthode des paires standard permet de généraliser ce résultat à toute mesure ν qui est portée par une famille standard propre, ce qui inclut des mesures singulières par rapport à la mesure de Lebesgue (par exemple, portées par des courbes instables homogènes).

4 Paires standards et méthode de martingale : quelques applications

Je vais maintenant évoquer trois travaux relativement récents portant sur des systèmes dynamiques liés aux billards, qui utilisent les paires standards conjointement à une méthode de martingale pour identifier des processus stochastiques limites. Le premier de ces travaux traite de modifications locales des gaz de Lorentz (Sous-section 4.1, correspondant à un article de D. Dolgopyat, D. Szász et T. Varjú de 2009 [14]). Le second traite de la récurrence de la planche de Galton (Sous-section 4.2, correspondant à un article de N. Chernov et D. Dolgopyat de 2009 [5]). Le troisième traite du mouvement brownien brownien, c'est-à-dire d'un système de deux particules de masses très différentes qui interagissent par des collisions sur une table de billard (Sous-section 4.3, correspondant à un autre article de N. Chernov et D. Dolgopyat de 2009 [6]).

4.1 Gaz de Lorentz localement perturbés

Soit $d \in \{1, 2\}$. Un gaz de Lorentz à horizon borné de dimension d est une \mathbb{Z}^d -extension d'une table de billard de dimension 2. Pour $d = 2$, un tel système est un billard périodique dans le plan ; pour $d = 1$, on peut le voir comme un billard périodique sur un cylindre. Cette classe de systèmes est utilisée par exemple pour modéliser la diffusion d'un électron dans un métal. La première application que nous présentons des méthodes de paires standards est la détermination de lois limites de gaz de Lorentz localement perturbés.

L'étude des gaz de Lorentz à horizon borné est faisable par exemple avec des méthodes des tours de Young. Comme nous l'avons mentionné en Sous-section 2.3, étant donné un gaz de Lorentz en dimension d , on peut construire une \mathbb{Z}^d -extension d'une tour de Young qui se projette sur le gaz de

Lorentz. Ceci permet d'en déduire un théorème central limite pour les trajectoires⁷, la convergence des trajectoires vers un mouvement brownien sur \mathbb{R}^d , etc. Cependant, dès que l'on perturbe le système, même si la modification est locale⁸, on perd cette construction, ce qui justifie le recours à des méthodes alternatives telles que les paires standards. L'article de D. Dolgopyat, D. Szász et T. Varjú [14] traite deux types de modifications : les modifications locales des obstacles, et l'application locale d'un champ de force (avec des trajectoires thermostatées).

La démonstration des théorèmes suivants se fait en montrant qu'à la limite, quand N tend vers l'infini, le processus q_N est la solution d'un problème de martingale bien choisi. Cette méthode se retrouve dans les deux applications suivantes : la planche de Galton (Sous-section 4.2) et le mouvement brownien brownien (Sous-section 4.3).

Modification locale des obstacles du gaz de Lorentz

Soit $d \in \{1, 2\}$. Un gaz de Lorentz \mathbb{Z}^d -périodique peut être vu comme le système dynamique associé à une table de billard sur un cylindre (si $d = 1$) ou sur le plan (si $d = 2$) avec une configuration d'obstacles \mathbb{Z}^d -périodique, et les contraintes usuelles (obstacles de courbure strictement positive, de classe \mathcal{C}^3 , disjoints). Une modification locale des obstacles d'un gaz de Lorentz \mathbb{Z}^d périodique est une table de billard qui coïncide avec un gaz de Lorentz en dehors d'un domaine borné (**Fig. 10**).

On lance une particule ponctuelle à vitesse unitaire sur une telle table de billard. Soit $q(t)$ sa position au temps t , et $q_N(t) := N^{-1/2}q(Nt)$ pour tout $N > 0$. On suppose que la position et la vitesse initiales sont aléatoires, choisies selon une loi absolument continue par rapport à la mesure de Liouville. Alors :

Théorème 4.1 ([14], Theorem 1 et Theorem 5).

Soit $(q(t))_{t \geq 0}$ la position d'une particule lancée dans une modification locale des obstacles d'un gaz de Lorentz en dimension $d \in \{1, 2\}$. Le processus stochastique $(q_N(t))_{t \geq 0}$ converge en loi dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, quand N tend vers l'infini, vers un mouvement brownien de matrice de covariance σ_0 , qui coïncide avec la limite en loi du processus non modifié.

Champ de force local

Le deuxième problème étudié est celui de l'application d'un champ de force à support borné. Ce second problème n'est étudié que pour des \mathbb{Z} -extensions (gaz de Lorentz sur un cylindre infini). On applique à la particule un champ de force E à support borné (**Fig. 11**). Cependant, on travaille avec le système *thermostaté*. Au lieu d'appliquer les lois de Newton, on ne garde que la composante tangentielle du champ de force :

$$q''(t) = E(q) - \frac{\langle E(q), q'(t) \rangle}{\|q'(t)\|^2}. \quad (4.1)$$

Ainsi, le champ de force modifie la trajectoire de la particule, en l'incurvant dans sa direction, mais ne modifie pas la vitesse de la particule. L'énergie cinétique des particules est constante, ce qui justifie le terme "thermostaté".

En une dimension, un tel champ de force peut modifier de façon substantielle le comportement à grande échelle des trajectoires. Par exemple, supposons que le champ est supporté sur un voisinage de l'origine, et qu'il est dirigé vers la droite. Alors les particules ont plus de chances de quitter ce voisinage de l'origine vers la droite, et donc une majorité d'excursions ont lieu vers la droite. Le processus limite n'est donc pas en général un mouvement brownien, mais un *mouvement brownien*

⁷Cette propriété ne nécessite pas la puissance des tours de Young pour être démontrée. Elle est connue depuis 1981 [3].

⁸C'est-à-dire qu'elle n'affecte qu'une partie bornée de l'espace des phases.

asymétrique. Pour tout $p \in [0, 1]$ et $\sigma > 0$, on peut construire un mouvement brownien asymétrique de paramètres p et σ . Intuitivement, cela correspond à prendre un mouvement brownien de paramètre de diffusion σ , et de biaiser les excursions pour qu’une proportion p des excursions aient lieu vers la droite. Pour $p \in \{0, 1\}$, un mouvement brownien asymétrique coïncide avec un mouvement brownien réfléchi.

Les choses étant ainsi posées, D. Dolgopyat, D. Szász et T. Varjú obtiennent le théorème suivant :

Théorème 4.2 ([14], Theorem 3 et Theorem 5).

Soit $(q(t))_{t \geq 0}$ la position d’une particule lancée dans un gaz de Lorentz en dimension 1 avec application thermostatée d’un champ de force à support borné. Le processus stochastique $(q_N(t))_{t \geq 0}$ converge en loi dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, quand N tend vers l’infini, vers un mouvement brownien asymétrique.

4.2 Planche de Galton

La planche de Galton est un dispositif inventé par F. Galton qui permet de visualiser expérimentalement le théorème central limite. Il est constitué d’une planche verticale sur laquelle sont plantés, régulièrement et en quinconce, des rangées horizontales de clous. On lâche des billes au centre en haut de la planche. Ces billes descendent une rangée de clous à la fois, et à chaque clou ont une chance sur deux d’aller à droite, et une chance sur deux d’aller à gauche. La position d’une bille arrivée en bas de la planche est alors une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (qui correspondent aux événements “tomber vers la gauche” ou “tomber vers la droite” à chaque rangée). On voit alors les billes s’accumuler en une gaussienne approximative.

Mathématiquement, la planche de Galton peut être idéalisée comme une table de billard \mathbb{Z} -périodique, et sur laquelle les particules évoluent sous l’influence d’un champ de gravité longitudinal constant⁹. Si l’on cherche à avoir une modélisation fidèle au système physique, il est très probablement plus adapté de faire agir ce champ de force de façon thermostatée¹⁰, dans laquelle le champ de gravité modifie les trajectoires mais pas la vitesse des particules. En effet, dans une planche de Galton réelle, les billes restituent leurs gains d’énergie cinétique aux clous, et restent ainsi de vitesse à peu près constante. Sur une telle planche, pour de petits champs de force, les particules dérivent à vitesse constante vers le bas, et la vitesse de la dérive est approximativement proportionnelle au champ de gravité¹¹ [7]. En particulier, ce système dynamique n’est pas récurrent. L’analyse d’un tel modèle est simplifiée par le fait que, après application du champ de force, il reste \mathbb{Z} -périodique, ce qui permet de réduire l’analyse à un facteur de mesure finie.

Dans leur article de 2009 [5], N. Chernov et D. Dolgopyat étudient la planche de Galton, mais avec l’action naturelle du champ de force (de la forme $q'' = g$, où q est la position de la particule) et non son action thermostatée (**Fig. 12**). Ce modèle, qui décrirait intuitivement le comportement d’une balle rebondissante parfaite sur une planche de Galton, est physiquement moins réaliste mais exhibe des phénomènes originaux. La première chose à remarquer est qu’un tel système perd sa symétrie par translations : quand la bille est très bas sur la planche de Galton, elle va très vite, et ses trajectoires sont donc très tendues. En effet, la gravité a alors moins de temps pour appliquer son effet entre deux collisions. En première approximation, très bas sur la planche, les trajectoires sont donc très proches de celles d’un billard sans champ de force extérieur. Une meilleure approximation est de considérer que les trajectoires sont proches de celles d’un système thermostaté (et donc sont

⁹Par exemple, si la table de billard est réalisée sur $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$, alors le champ de gravité est constant et de la forme $(0, g)$ pour un certain $g > 0$.

¹⁰Voir la Sous-section 4.1, et en particulier l’équation 4.1, pour une définition

¹¹Cette dernière propriété n’est rien d’autre que la loi d’Ohm.

courbées vers le bas), mais correspondant à un champ de force d'autant plus faible que la particule est basse - et donc se déplace vite.

Ce travail, une fois encore, fait appel à la même méthode de martingale pour identifier un processus stochastique limite. Cette fois-ci, la méthode est par nature plus perturbative, comme elle nécessite d'étudier le comportement d'un billard sous l'effet thermostaté d'un champ de force pour de petits champs de forces.

Remarquons que, pour ce système, l'énergie cinétique n'est pas conservée, mais l'énergie totale (cinétique et potentielle) l'est. Par conséquent, si la bille remonte trop haut, sa vitesse peut s'annuler, ce qui complique l'analyse du système. Pour contourner cet écueil, N. Chernov et D. Dolgopyat modifient le système de la façon suivante. On se fixe $v_0 > 0$. La particule part d'une ligne horizontale L fixée à vitesse $v(0) \geq v_0$ vers le bas, avec une position horizontale et une direction aléatoires (choisis selon une loi uniformément continue). Si la particule atteint à un instant la ligne L , elle rebondit comme sur un miroir. Ainsi, la vitesse de la particule est toujours au moins v_0 . Dans ce cadre, N. Chernov et D. Dolgopyat obtiennent deux théorèmes assez surprenants : la limite en loi de la position et de la vitesse de la particule d'une part, et la récurrence du système d'autre part. Autrement dit, presque sûrement, la particule finira par remonter contre la gravité jusqu'à la ligne L !

Théorème 4.3 ([5], Theorem 1).

Le billard sur la planche de Galton, réfléchi en L , est récurrent.

Théorème 4.4 ([5], Theorem 2).

Soient q et v respectivement la position et la vitesse scalaire de la particule. Il existe des constantes $c, v_0 > 0$ telle que, si $v(0) \geq v_0$, alors $ct^{-1/3}v(t)$ converge en loi, quand t tend vers l'infini, vers une variable aléatoire de densité :

$$\frac{3z}{\Gamma(2/3)} e^{-z^3}.$$

De plus, $2gc^2t^{-2/3}q(t)$ converge en loi, quand t tend vers l'infini, vers une variable aléatoire de densité :

$$\frac{3}{2\Gamma(2/3)} e^{-z^{3/2}}.$$

4.3 Mouvement brownien brownien

La troisième application que nous présentons est celle du mouvement brownien brownien, par N. Chernov et D. Dolgopyat [6].

Motivation et modèle

Le problème initial découle de la définition du mouvement brownien. En mathématiques, celui-ci est vu le plus souvent comme la loi limite des trajectoires d'une marche aléatoire, une fois ces trajectoire renormalisées en espace comme en temps. D'un point de vue dynamique, le comportement d'une marche aléatoire à sauts de carré intégrable est proche de celui d'un gaz de Lorentz. On peut donc voir le mouvement brownien comme une description à grande échelle de la trajectoire d'une particule dans un champ périodique d'obstacles strictement convexes et sans canaux (autrement dit, à horizon borné).

Cependant, historiquement, la première description du mouvement brownien vient d'un modèle très différent : celui d'une particule massive (un grain de pollen) subissant des chocs aléatoires de la part d'un grand nombre de particules beaucoup plus légères et rapides (des molécules d'un fluide environnant). La trajectoire de la particule massive suit alors un mouvement brownien, au sens

physique du terme. Le but du travail de N. Chernov et D. Dolgopyat est de décrire ce modèle historique dans un contexte simplifié : celui d'une particule massive subissant des chocs aléatoires de la part d'une seule particule légère et rapide. Ce retour au mouvement brownien au sens de R. Brown justifie le titre de mouvement brownien brownien.

Plus précisément, on fixe une table de billard dans le tore, et on place dessus un disque de rayon R et de masse $M > 1$, ainsi qu'une particule ponctuelle de masse unité. Soient $Q(t)$ et $V(t)$ respectivement la position et la vitesse du centre de la particule massive¹², et $q(t)$ et $v(t)$ celles de la particule ponctuelle. Ces deux particules évoluent en ligne droite et suivent les lois de réflexion de Descartes quand elles rencontrent un obstacle (**Fig. 13**). Quand les deux particules s'entrechoquent, leur vitesse tangentielle à leur point de contact reste inchangée. Si on note V_{old}^\perp (respectivement v_{old}^\perp) la vitesse radiale de la particule massive (respectivement la particule ponctuelle) avant la collision et V_{new}^\perp , v_{new}^\perp leur vitesse après la collision, alors :

$$v_{\text{new}}^\perp = -\frac{M-1}{M+1}v_{\text{old}}^\perp + \frac{2M}{M+1}V_{\text{old}}^\perp,$$

et :

$$V_{\text{new}}^\perp = \frac{2}{M+1}v_{\text{old}}^\perp + \frac{M-1}{M+1}V_{\text{old}}^\perp.$$

On fixe $Q(0)$ et $V(0)$ de telle sorte que le disque soit à distance strictement positive de chaque obstacle. On choisit $q(0)$ et $v(0)$ de façon aléatoire, selon une loi absolument continue par rapport à la mesure de Liouville.

La particule massive joue le rôle de la particule de pollen dans l'expérience de R. Brown, et la particule ponctuelle celle de d'une des molécules du fluide environnant. Les résultats souhaités sont de nature perturbative : on cherche à déterminer les caractéristiques de ce système, et en particulier du couple $(Q(t), V(t))$, pour $M \gg 1$ et éventuellement pour $R \ll 1$. Il s'agit d'un problème de moyennisation. La particule ponctuelle évolue beaucoup plus rapidement que la particule massive, et est soumise à un système qui est hyperbolique (à Q fixé), de telle sorte que la particule massive ne sent que l'effet moyen des chocs de la particule ponctuelle, qui ici est nul, ainsi que des variations stochastiques autour de cette moyenne.

Il serait trop long de décrire l'ensemble des techniques utilisées dans l'article en question, ainsi que leur agencement. Celui-ci combine une utilisation astucieuse des paires standards, et une méthode de martingale due à Stroock et Varadhan pour déterminer le processus stochastique limite, le tout avec des estimées de moment fines pour pouvoir appliquer cette dernière méthode. Ces techniques ont été appliquées à d'autres problèmes de moyennisation, par exemple pour des systèmes hamiltoniens en interaction sur des réseaux dans la limite de faible interaction [12], et en plus grande généralité par J. De Simoi et C. Liverani [10] [11]. Le lecteur intéressé pourra consulter un autre article de J. De Simoi et C. Liverani qui traite un cas simplifié [9]. Je me bornerai à retranscrire deux théorèmes remarquables. Le premier décrit la limite du processus $(Q(t), V(t))$ quand $M \rightarrow +\infty$ à R fixé, alors que le second décrit une limite jointe quand $M \rightarrow +\infty$ et $R \rightarrow 0$.

Disque massif au repos

On suppose que $V(0) = 0$. Soit $\delta > 0$. On pose $t_* := \inf\{t > 0 : d(Q(t), \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \partial C) < R + \delta\}$ le premier temps auquel le disque s'approche à distance δ d'un des obstacles. On arrête l'observation du système au temps t_* , en posant $Q_*(t) := Q(t \wedge t_*)$ et $V_*(t) = 1_{t \leq t_*} V(t)$. Finalement, on renormalise la position et la vitesse de la particule massive :

$$\begin{aligned} Q_M(t) &:= Q_*(M^{2/3}t); \\ V_M(t) &:= M^{2/3}V_*(M^{2/3}t). \end{aligned}$$

¹²Celle-ci sera donc supposée n'avoir aucun moment de rotation.

Pour tout x tel que $d(x, \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) > 0$, on peut définir une matrice positive $\sigma_R(x)$ qui décrit l'effet des fluctuations aléatoires des chocs de la particule ponctuelle sur la particule massive de rayon R . Pour des raisons techniques, il faut ici faire deux hypothèses supplémentaires, l'une sur la régularité des obstacles et l'autre sur le comportement de σ_R .

Théorème 4.5 ([6], Theorem 2).

Supposons que les frontières des obstacles soient de classe \mathcal{C}^4 (et non seulement de classe \mathcal{C}^3)¹³, et que $\sigma_R(x)$ est définie positive dès que $d(x, \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \partial C) \geq \delta$.

Pour tout $c > 0$, le processus stochastique $(Q_M(t), V_M(t))_{t \in [0, c]}$ converge en loi vers un processus stochastique $(\mathcal{Q}(t), \mathcal{V}(t))_{t \in [0, c]}$, qui est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} d\mathcal{Q} = \mathcal{V}dt & \mathcal{Q}(0) = Q(0) \\ d\mathcal{V} = \sigma(\mathcal{Q})dB_t & \mathcal{V}(0) = 0 \end{cases},$$

arrêtée au premier temps d'atteinte du δ -voisinage de $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \partial C$, et où $(B_t)_{t \in [0, c]}$ est un mouvement brownien standard en deux dimensions.

Petit disque massif au repos

On suppose maintenant que la taille de la particule massive tend aussi vers 0. Il faut alors ajuster les normalisations en temps. On pose cette fois-ci :

$$\begin{aligned} Q_{M,R}(t) &:= Q_*(R^{-1/3}M^{2/3}t); \\ V_{M,R}(t) &:= R^{-1/3}M^{2/3}V_*(R^{-1/3}M^{2/3}t). \end{aligned}$$

Ce nouveau système se comporte mieux que le précédent. En effet, quand R tend vers 0, la fonction $R^{-1/2}\sigma_R$ converge vers une constante σ_0 . En particulier, les deux hypothèses supplémentaires du théorème 4.5 (la régularité accrue des obstacles, et le fait que σ_R soit définie positive) ne sont plus nécessaires. On peut supposer que les obstacles sont \mathcal{C}^3 , et la condition selon laquelle σ_R doit être définie positive est redondante.

Théorème 4.6 ([6], Theorem 3).

Il existe une fonction $M_0(R)$ telle que $\lim_{0+} M_0 = +\infty$ et que ce qui suit soit vrai. Soit M une fonction réelle définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}_+^* . Supposons que $M(R) \geq M_0(R)$ pour tout R suffisamment petit. Alors, pour tout $c > 0$, le processus stochastique $(Q_{M(R),R}(t), V_{M(R),R}(t))_{t \in [0, c]}$ converge en loi vers un processus stochastique $(\mathcal{Q}(t), \mathcal{V}(t))_{t \in [0, c]}$, qui est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} d\mathcal{Q} = \mathcal{V}dt & \mathcal{Q}(0) = Q(0) \\ d\mathcal{V} = \sigma_0 dB_t & \mathcal{V}(0) = 0 \end{cases},$$

arrêtée au premier temps d'atteinte du δ -voisinage de $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \partial C$, et où $(B_t)_{t \in [0, c]}$ est un mouvement brownien standard en deux dimensions.

¹³Le but de cette condition est de montrer que la fonction σ_R est log-lipschitzienne, ce qui permet de faire fonctionner les méthodes de martingale.

A Figures

A.1 Billards dispersifs

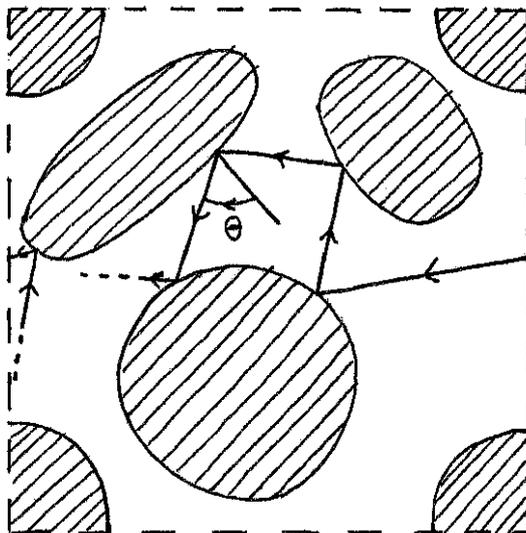


Fig. 1 : Une table de billard et une trajectoire

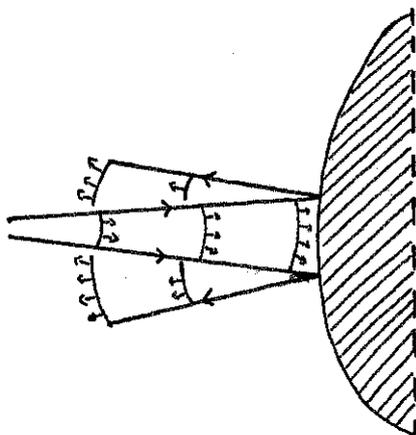


Fig. 2 : Dispersion d'un front d'ondes

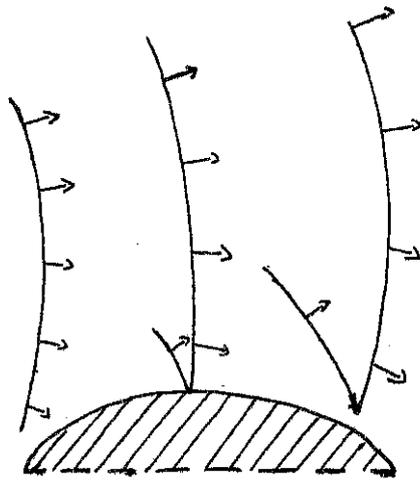


Fig. 3 : Effet d'une tangence sur le flot

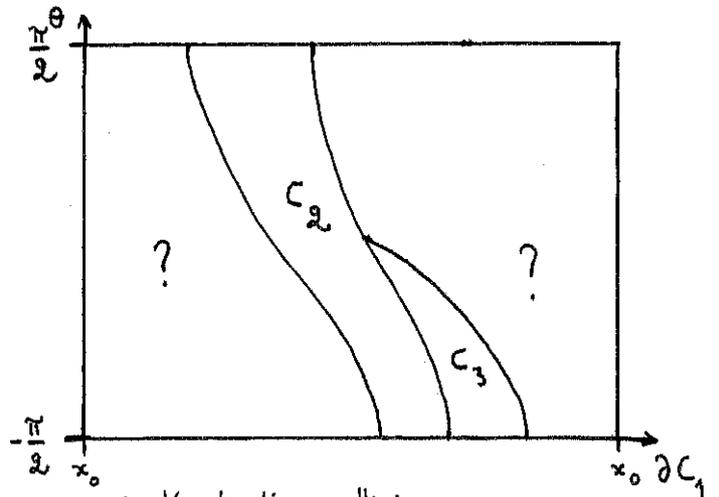
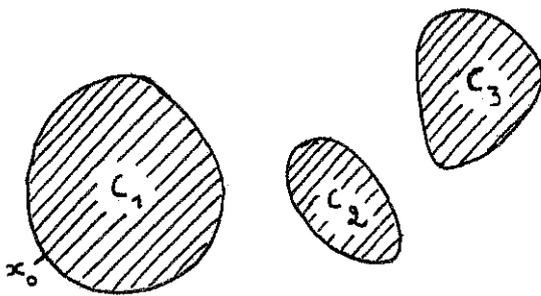


Fig. 4 : Une configuration et les domaines de continuité de l'application collision

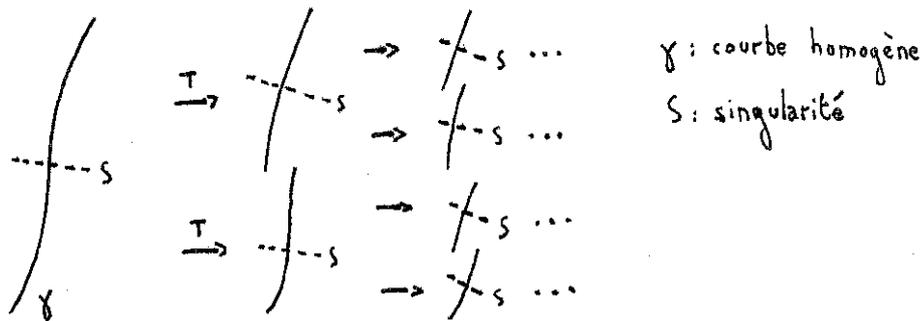


Fig. 5 : Un scénario catastrophe

A.2 Tours de Young

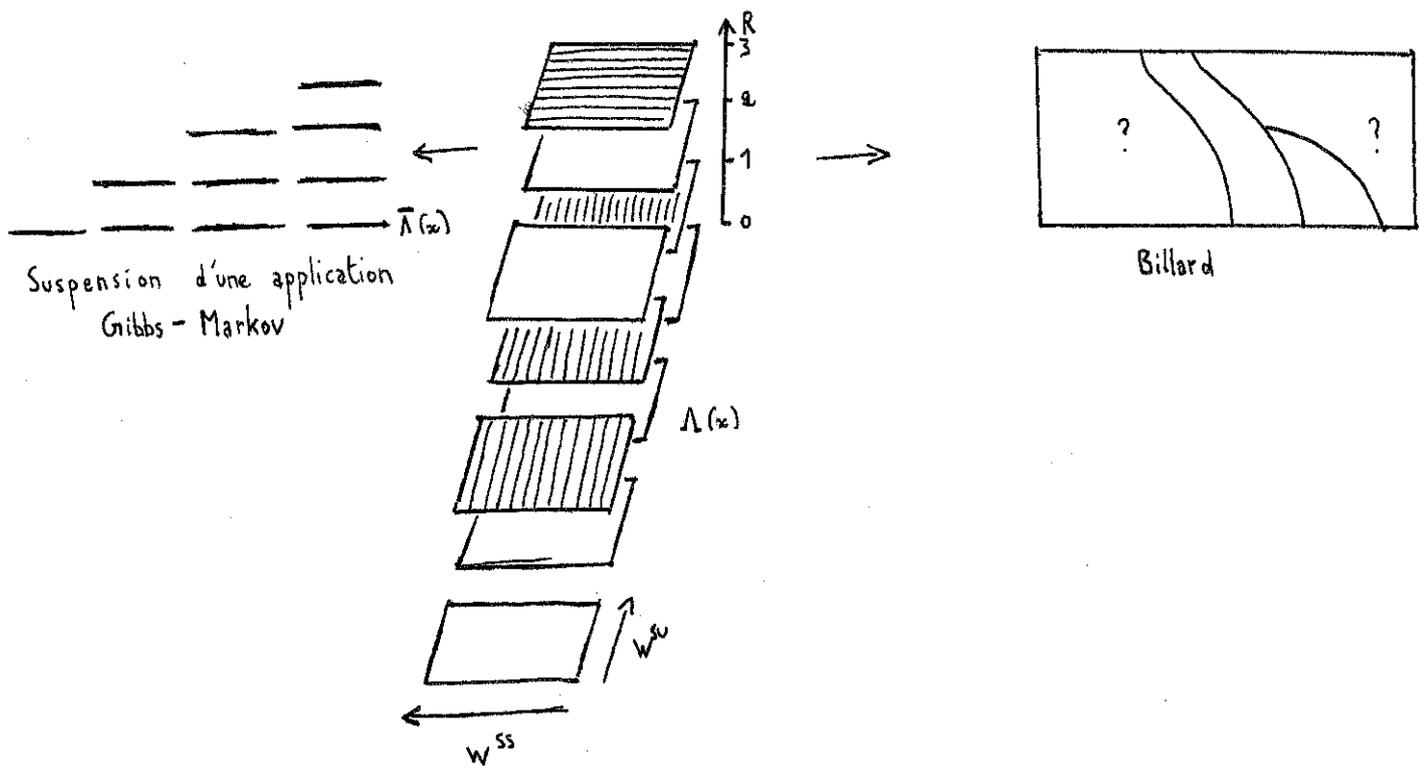


Fig. 6 : Une tour de Young

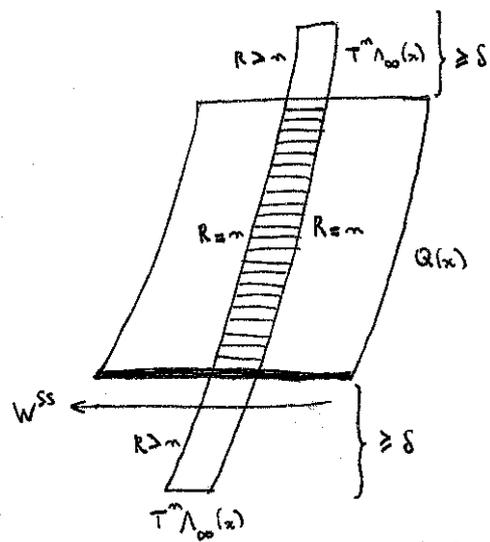


Fig. 7 : Construction de R

A.3 Paires standards

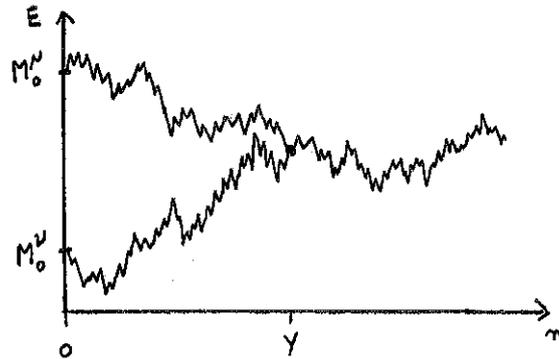


Fig. 8 : Couplage de chaînes de Markov

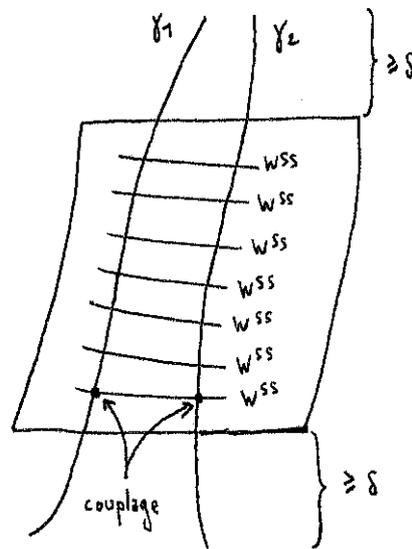


Fig. 9 : Couplage de paires standards

A.4 Paires standards et méthode de martingale : quelques applications

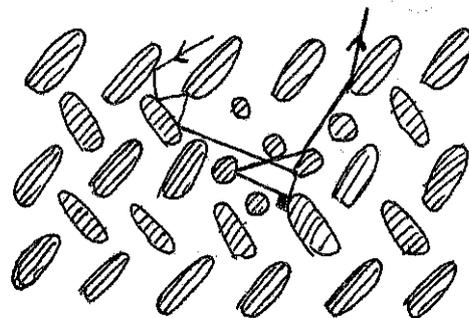


Fig 10 : Gaz de Lorentz localement perturbé

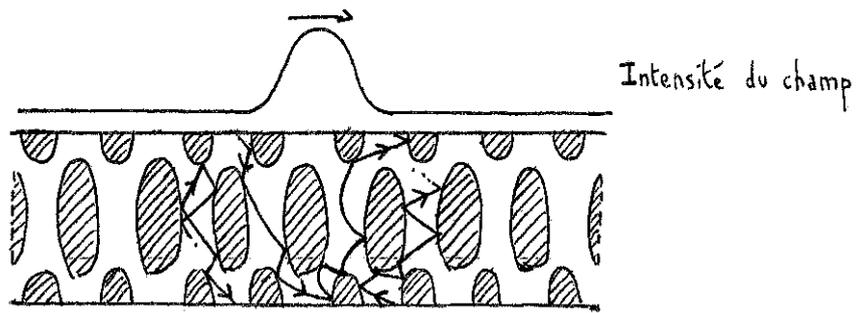


Fig. 11: Gaz de Lorentz soumis à un champ de force local

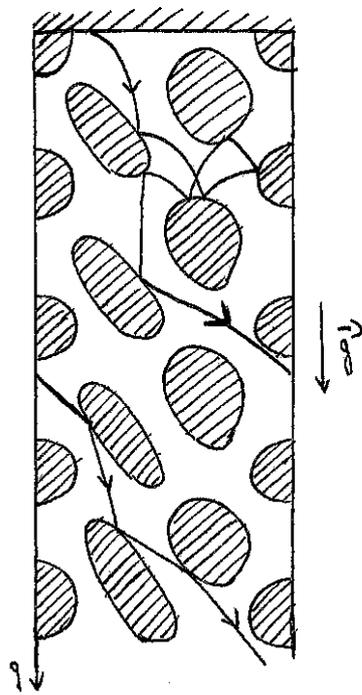


Fig. 12: Planche de Galton

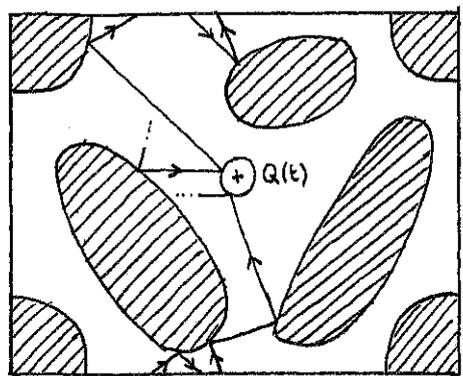


Fig. 13: Mouvement brownien

References

- [1] P. Bálint et S. Gouëzel, *Limit theorems in the stadium billiard*, Communications in Mathematical Physics, **263** (2006), 451–512.
- [2] L. Bunimovich et Y.G. Sinai, *Markov partitions for dispersed billiards*, Communications in Mathematical Physics, **78** (1980-1981), no. 2, 247–280.
- [3] L. Bunimovich et Y.G. Sinai, *Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers*, Communications in Mathematical Physics, **78** (1980-1981), no. 4, 479–497.
- [4] J. Buzzzi, *No or infinitely many a.c.i.p. for piecewise expanding C^r maps in higher dimensions*, Communications in Mathematical Physics, **222** (2001), no. 3, 495–501.
- [5] N. Chernov et D. Dolgopyat, *The Galton board: limit theorems and recurrence*, Journal of the American Mathematical Society, **22** (2009), no. 3, 821–858.
- [6] N. Chernov et D. Dolgopyat, *Brownian Brownian motion. I.*, Memoirs of the American Mathematical Society, **198** (2009), no. 927, viii+193 pp.
- [7] N. Chernov, G. Eyink, J. Lebowitz et Y.A. Sinai, *Steady-state electrical conduction in the periodic Lorentz gas*, Communications in Mathematical Physics, **154** (1993), no. 3, 569–601.
- [8] N. Chernov et R. Markarian, *Chaotic billiards*, Mathematical Surveys and Monographs, **127** (2006), American Mathematical Society, Providence, RI, xii+316 pp.
- [9] J. De Simoi et C. Liverani, *The martingale approach after Varadhan and Dolgopyat*, In *Hyperbolic Dynamics, Fluctuations and Large Deviations*, Dolgopyat, Pesin, Pollicott, Stoyanov editors, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 89, AMS (2015).
- [10] J. De Simoi et C. Liverani, *Fast-slow partially hyperbolic systems: Beyond averaging. Part I (Limit Theorems)*, preprint, 96 pp..
- [11] J. De Simoi et C. Liverani, *Fast-slow partially hyperbolic systems: Beyond averaging. Part II (statistical properties)*, preprint, 36 pp..
- [12] D. Dolgopyat et C. Liverani, *Energy transfer in a fast-slow Hamiltonian system*, Communications in Mathematical Physics, **308** (2011), no. 1, 201–225.
- [13] D. Dolgopyat, D. Szász et T. Varjú, *Recurrence properties of planar Lorentz process*, Duke Mathematical Journal, **142** (2008), no. 2, 241–281.
- [14] D. Dolgopyat, D. Szász et T. Varjú, *Limit theorems for locally perturbed planar Lorentz processes*, Duke Mathematical Journal, **148** (2009), no. 3, 459–499.
- [15] Y. Pesin, *Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties*, Annals of Mathematics, Second Series, **12** (1992), no. 1, 123–151.
- [16] M. Tsujii, *Piecewise expanding maps on the plane with singular ergodic properties*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **20** (2000), no. 6, 1851–1857.
- [17] L-S. Young, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Annals of Mathematics, Second Series, **147** (1998), no. 3, 585–650.