

---

## Intégrales impropres, intégrales à paramètres : Exercices

---

### Intégrales impropres

**Exercice 1.**

Montrez que les intégrales suivantes sont bien définies, et les calculer.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx ; \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} dx ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx.$$

**Exercice 2.**

Soient  $a < b$  deux réels. Montrez la convergence de

$$I_{a,b} := \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx.$$

Calculez  $I_{-1,1}$ , et effectuez un changement de variables pour calculer  $I_{a,b}$ .

**Exercice 3.** [FGN·Ana3, Exercice 4.12]

1. Montrez que l'intégrale suivante converge :

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$$

2. Montrez que

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) dx \quad \text{et} \quad 2I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx.$$

3. En déduire  $I$ .

**Exercice 4.**

1. Montrez que les intégrales suivantes convergent :

$$I := \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad J := \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx.$$

2. À l'aide d'un changement de variables, trouvez une relation entre  $I$  et  $J$ .

3. Déduisez-en la valeur de

$$K(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\alpha^2 + x^2} dx.$$

**Exercice 5.**

Montrez que les intégrales suivantes convergent ( $\alpha > 0$ ).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{1-\alpha}} dt ; \quad \int_0^{+\infty} x e^{ix^\alpha} dx ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \cos(t)} dt.$$

## Intégrales et limites

**Exercice 6.** [Moi, Exercice C.5 p. 207]

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Montrez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \cdot nt^n dt = f(1).$$

**Exercice 7.**

Pour tout  $n \geq 0$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose :

$$g_n(x) := (n+1)(n+2)x^n(1-x).$$

1. Calculez l'intégrale de  $g_n$ .
2. Montrez que  $(g_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers une fonction  $g$  que l'on précisera.
3. A-t-on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(t) dt = \int_0^1 g(t) dt \quad ?$$

Commentez.

**Exercice 8.**

On pose  $f(x) := x^{-x}$  pour tout  $x \in (0, 1]$ , et  $f(0) = 1$ .

1. Montrez que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n \ln(x)^n}{n!},$$

2. Calculez par récurrence l'intégrale

$$I_n := \int_0^1 x^n \ln(x)^n dx.$$

3. Concluez en montrant que

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

**Exercice 9.**

Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $I_n := \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ .

1. Montrez que, pour tout  $x \in (-1, 1)$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

2. Déduisez-en la valeur de  $I_n$ .

**Exercice 10.**

1. Montrez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^n dt = 0.$$

2. On cherche à préciser la vitesse de convergence de la suite ci-dessus. Montrez tout d'abord que, pour tout  $x < 1$ , la suite  $(1 - \frac{x}{n})_{n \geq 1}$  est croissante. Quelle est sa limite ?

3. À l'aide d'un changement de variables, montrez que, pour tous  $a, \beta > 0$  tels que  $\beta a^2 < 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_{-a}^a (1 - \beta t^2)^n dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t^2} dt.$$

4. Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrez qu'il existe  $a > 0$  tel que  $1 - (1 + \varepsilon)\frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1 - (1 - \varepsilon)\frac{t^2}{2}$  pour tout  $t \in [-a, a]$ , puis que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+\varepsilon)\frac{t^2}{2}} dt &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^n dt \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^n dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\varepsilon)\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Concluez.

### Intégrales à paramètre

**Remarque :** Pour de nombreux exercices corrigés sur les intégrales à paramètres, nous renvoyons à l'ouvrage [FGN·Ana3].

#### Exercice 11.

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, +\infty)$  admettant une limite finie en  $+\infty$ . Montrez que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

#### Exercice 12.

Montrez à l'aide d'un changement de variables que

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t^2} \cdot e^{-\lambda t} dt \sim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda^2}.$$

#### Exercice 13.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée. Montrez la continuité, puis la dérivabilité, de la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2} f(t) dt.$$

#### Exercice 14. [FGN·Ana3, Exercice 4.29]

On pose, pour tout  $x$  réel,

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad F(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dx.$$

1. Montrez que  $F$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Construisez une équation différentielle du premier ordre satisfaite par  $F$ , et déduisez-en la valeur de l'intégrale de Gauss  $I$ .

**Exercice 15.** [FGN·Ana3, Exercice 4.28]

On pose, lorsque cela a un sens,

$$F(x) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt, \quad G(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \quad \text{et} \quad I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

1. Montrez que  $F$  est définie et continue de  $[0, +\infty)$ , ainsi que de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $(0, +\infty)$ . Construisez une équation différentielle du second ordre satisfaite par  $F$ .
2. Montrez que  $G$  est définie et continue de  $[0, +\infty)$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $(0, +\infty)$ , et satisfait la même équation différentielle que celle satisfaite par  $F$  sur  $(0, +\infty)$ .
3. Montrez que  $F$  et  $G$  coïncident sur  $(0, +\infty)$ , puis déterminez la valeur de  $I$ .

**Exercice 16.**

Étudiez la régularité de la fonction  $F$  définie sur  $(0, 2)$  par

$$F(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt.$$

### Références

[FGN·Ana3] : *Oraux X-ENS. Analyse 3*. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.

[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse*. J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.