Séries de Fourier : Exercices

Cette liste est une liste non exhaustive de développements possibles pour l'agrégation.

Fonction ζ

En utilisant l'inégalité de Parseval avec des fonctions bien choisie, on peut expliciter les valeurs de quelques sommes infinies, en particulier les valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs. Cela demande un peu de pratique en termes de calcul d'intégrales trigonométriques. Une méthode plus sophistiquées, impliquant les nombres de Bernoulli, permet de calculer $\zeta(2k)$ pour tout $k \geq 1$. Voir par exemple la discussion suivant [FGN·Ana2, Exercice 4.18], [Dan, Exercice 21.1] ou [Ska, Exercice 6.16] pour une version sans séries entières mais avec des polynômes de Bernoulli.

Exercice 1. [Gou, Exercice 1 p. 261] [Moi, Exercice A-1, pp. 155–156]
Soit f la fonction 2π-périodique telle que

$$\begin{cases} f(x) &= \frac{\pi-x}{2} \quad \forall x \in (0,2\pi), \\ f(0) &= 0 \end{cases}.$$

Donnez la série de Fourier de f. Déduisez-en la somme $\zeta(2) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 2. [Moi, Exercice A-2, p. 156]
Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$.
Donnez la série de Fourier de f. Déduisez-en les sommes $\zeta(4) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 3. [Moi, Exercice A-3, p. 156]
Soit f la fonction impaire 2π-périodique telle que[1] $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.
Donnez la série de Fourier de f. Déduisez-en les sommes $\zeta(6) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice 4. [FGN·Ana2, Exercice 4.18] [Gou, Sujet d'étude 2 p. 299]
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Soit φ la fonction 2π-périodique telle que $\varphi(x) = e^{\frac{zx}{2\pi}}$ pour tout $x \in (-\pi, \pi]$.
Déterminez le développement en série de Fourier de φ. Déduisez-en le développement en série entière en 0 de $f : z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$.

Développements eulériens

Exercice 5. [FGN·Ana2, Exercice 4.9] [Gou, Exercice 2 p. 262] [Moi, Exercice A-4 pp. 156–157] [Ska, Exercice 6.18]
Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Soit f_u la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(ux)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi)$.

1. Calculez les coefficients de Fourier de f_u.
2. Déduisez-en que, pour tout $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi u) - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2} =: g(u).$$

1. Pour calculer $\zeta(2k)$, il faut une fonction dont les coefficients de Fourier décroissent en $1/n^k$. À cause du lien entre régularité d'une fonction et décroissance de la série de Fourier, il faut utiliser des fonctions qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Les fonctions polynômiale par morceaux étant toujours $\mathcal{C}^k$ par morceaux, il faut donc utiliser des fonctions qui sont polynômiales par morceaux mais pas de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Par exemple, des fonctions non continues pour calculer $\zeta(2)$, continues mais non $\mathcal{C}^1$ pour calculer $\zeta(4)$, $\mathcal{C}^1$ mais pas $\mathcal{C}^2$ pour calculer $\zeta(6)$...

3. Application : calculez $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$.
4. Pour tout $x \in (0,1)$, calculez de deux façons $I(x) := \int_0^x g(u)\ \mathrm{d}u$.
5. Déduisez-en le produit eulérien

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Équation de la chaleur

Exercice 6. [FGN·Ana4, Exercice 1.28] [Moi, Exercice D-2, pp. 168-169]
Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique. Montrez qu'il existe une unique solution $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ à l'équation de la chaleur sur le cercle

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \end{array} \right. ,$$

qui soit de plus continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et telle que $u(\cdot, t)$ soit 2π-périodique pour tout $t \geq 0$.

Inégalité de Wirtinger, inégalité isopérimétrique

Exercice 7. [FGN·Ana2, Exercice 4.20] [Gou, Exercice 3 p. 264] [Moi, Exercice D-3 p. 169]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et T-périodique. Supposons que

$$\int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Montrez l'*inégalité de Wirtinger*[2] :

$$\int_0^T |f(t)|^2\ \mathrm{d}t \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2\ \mathrm{d}t.$$

Caractérisez le cas d'égalité.

Exercice 8. [FGN·Ana4, Exercice 4.11] [Moi, Exercice D-4 pp. 169-170]
Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée[3] simple[4] continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On notera $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Soit L sa longueur et S l'aire intérieure, de telle sorte que

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t,$$
$$S = \left| \int_0^{2\pi} x(t) y'(t)\ \mathrm{d}t \right|.$$

1. Montrez que $L^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|^2\ \mathrm{d}t$, et déduisez-en que :

$$L^2 - 4\pi S = 2\pi \left(\int_0^{2\pi} (x'(t)^2 - x(t)^2)\ \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} (y'(t)^2 - y(t)^2)\ \mathrm{d}t \right).$$

2. Pour des applications de cette inégalité, voir [FGN2, Exercices 4.20 et 4.21]
3. C'est-à-dire que $\gamma(1) = \gamma(0)$
4. C'est-à-dire injective sur $[0, 1)$

2. Utilisez l'inégalité de Wirtinger pour démontrer l'*inégalité isopérimétrique* $L^2 \geq 4\pi S$.
3. Montrez de plus que $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si la courbe γ trace un cercle.

Phénomène de Gibbs

Exercice 9. [FGN·Ana2, Exercice 4.25] [Gou, Exercice 6 p. 266]
Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ égale à l'identité sur $[0, 2\pi)$.

1. Déterminez les coefficients de Fourier de f.
2. Soit S_n la somme partielle d'indice $n \geq 1$ de sa série trigonométrique. Déterminez les extrema de S_n.
3. Soit m_n le premier minimum de S_n sur $[0, 2\pi)$. Étudiez le comportement de la suite $(m_n)_{n\geq 1}$. Interprétez.

Critère d'équidistribution de Weyl

Exercice 10. [D, Exercice 21.2] [FGN2, Exercices 1.28 et 1.29] [G, Problème 21 p. 288] [RW, Théorème 29 p. 694]

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour tout réel x, on note $\{x\}$ la partie décimale de x.

1. Soit f une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 1-périodique. Posons, pour tout $n \geq 0$,
$$U_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k\theta).$$
Montrez que
$$\lim_{n\to+\infty} U_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Déduisez-en que l'ensemble $\{\{\theta n\} \ : \ n \geq 0\}$ est dense dans l'intervalle $[0, 1]$.
3. Déduisez-en de plus que, pour tous $0 \leq a \leq b \leq 1$,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{Card}\{0 \leq k < n \ : \ \{\theta k\} \in [a, b]\}}{n} = b - a.$$

Formule sommatoire de Poisson

Exercice 11. [FGN·Ana2, Exercices 4.16 et 4.17] [Gou, Problème 4 pp. 272-273]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$ en $\pm\infty$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n).$$

1. Montrez que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.
2. Calculez les coefficients de Fourier $\hat{\varphi}(n) := c_n(\varphi)$ de φ en fonction des coefficients de Fourier $\hat{f}(n) := c_n(f)$ de f.
3. Déduisez-en que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

4. Montrez que[5], pour tout $\alpha > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}.$$

Marches aléatoires et intégrales de Wallis

Exercice 12. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Rademacher ($\mathbb{P}(X_0 = -1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1/2$). Posons $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} X_k$; le processus $(S_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire issue de 0. On notera enfin p_n la loi de S_n.

1. Justifiez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_n(k) e^{ikx} = \mathbb{E}\left(e^{ixS_n}\right) = \cos(x)^n.$$

2. Déduisez-en que[6]

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)^n \, \mathrm{d}x.$$

3. Grâce à un argument combinatoire, montrez que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)^n \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Références

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation interne. Analyse et probabilités.* Dantzer.
[FGN·Ana2] : *Oraux X-ENS. Analyse 2.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[FGN·Ana4] : *Oraux X-ENS. Analyse 4.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Gou] : *Les maths en tête, Analyse.* X. Gourdon.
[Moi] : *Suites et séries de fonctions.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.

5. Cette dernière question nécessite de connaître la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne.

6. Ici, la fonction $x \mapsto \cos(x)^n$ est un polynôme trigonométrique, ce qui rend les arguments élémentaires. Si on avait choisi une loi plus compliquée pour X, il aurait fallu utiliser des arguments plus compliqués pour justifier cette question.