# Feuille d'exercices 3 : Espaces euclidiens / Espaces affines

**Exercice 1.** Dans $\mathbb{R}^3$, soit $p$ le projecteur orthogonal sur $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - 2z = 0$ et $u$ le vecteur $u = (1, 1, 1)$. Déterminer l'image $p(u)$ de $u$. En déduire la distance $d(u, \mathcal{P})$.

**Exercice 2.** Soit $M = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et soit $f$ l'application linéaire associée à $M$ dans la base canonique. Montrer que $f$ est une isométrie et préciser sa nature.

**Exercice 3.** Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on définit $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrer que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 4.** *(D'après le partiel 2020)*

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, démontrer que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$ de norme 1, il existe une unique réflexion $r$ telle que $r(u) = v$. Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Lorsque $u = (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $v = (-1, 0)$, représenter ces éléments caratéristiques sur un schéma, puis donner la matrice associée à la réflexion dans la base canonique.

**Exercice 5.** *(D'après le partiel 2020)*
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension $n$. Soient $u, v$ deux vecteurs orthogonaux non nuls de $E$ et de norme 1. On note $F$ le sous-espace vectoriel engendré par $u$ et $v$. Pour tout $x \in E$, on pose

$$f(x) = x - < u, x > u - < v, x > v.$$

1. Montrer que pour tout $x$, $f(x) \in F^\perp$.
2. Montrer que $f$ est une projection orthogonale et préciser ses caractéristiques géométriques.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, on choisit $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, -1, 1)$. En adaptant le résultat précédent, exprimer à l'aide de $u$ et $v$ la projection orthogonale de mêmes caractéristiques que dans la question précédente.

**Exercice 6.** Soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\| = 1$. Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$f(x) = x - 2\langle x, y\rangle y.$$

1. Montrer que $f$ est une isométrie et préciser sa nature.
2. On choisit $n = 3$ et $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de $f$ s'écrit simplement ? Comment obtenir alors la matrice de $f$ dans la base canonique ?

**Exercice 7.** Soit $(u, v)$ une famille orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$f(x) = x - \langle x, u + v\rangle u - \langle x, v - u\rangle v.$$

Montrer que $f$ est une isométrie et préciser sa nature. Donner sa matrice dans une base bien choisie.

**Exercice 8.** ($\star$) Soit $p$ un projecteur d'un espace vectoriel euclidien $E$. Montrer que $p$ est orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

**Exercice 9.** ($\star$ ?)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(\alpha) Q^{(k)}(\alpha)$$
où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k$-ième de $P$, définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, \ldots, P_n)$ orthonormale pour le produit scalaire $\varphi$ telle que chaque $P_i$ soit de degré $i$ et de terme de degré maximal positif.
3. Calculer $P_i^{(k)}(\alpha)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

## 1. Systèmes d'équations affines

**Exercice 10.** On note $F$ l'ensemble des $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & 1, \\ x & + & 4y & - & 6z & = & -2. \end{array}\right.$$

1. Montrer que $F$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ et préciser sa direction $\overrightarrow{F}$. Quelle est la nature de $F$ ? Donner une équation paramétrique de $F$.
2. Écrire ce système sous forme matricielle, puis à l'aide d'une application linéaire $f$. Identifier le sous-espace affine $F$ à l'aide de $f$.
3. Interpréter le système d'équations à l'aide d'hyperplans.

**Exercice 11.** Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ un paramètre.

1. À quelles conditions sur $\lambda$ les deux systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} -x+\lambda y-3z & = & \lambda-1 \\ x-3y+\lambda z & = & -2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} y+z & = & -\lambda+2 \\ \lambda x-2z & = & 0 \end{array}\right.$$

   décrivent-ils des droites affines de $\mathbb{R}^3$ ?
2. On suppose les conditions du 1. satisfaites. Trouver pour chaque droite son équation paramétrique.
3. Etudier selon la valeur de $\lambda$ les positions relatives de ces 2 droites. On précisera lorsqu'elles sont parallèles, confondues, sécantes.

**Exercice 12.** Soient $\alpha,\beta,a,b,c$ des réels. On considère trois plans $P_1$, $P_2$ et $P_3$ de $\mathbb{R}^3$, d'équations respectives : $x+2y+\beta z=a$ , $2x+4y=b$ et $\alpha x+(\alpha+1)y=c$. Déterminer, suivant les valeurs de $\alpha,\beta,a,b,c$, la dimension du sous-espace affine $P_1\cap P_2\cap P_3$ (si cette intersection est non vide).

**Exercice 13.** On note $F$ l'ensemble des quintuplets $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ vérifiant le système d'équations affine suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1, \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & = & 1, \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & -1. \end{array}\right.$$

Montrer que $F$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^5$, donner sa dimension, sa direction $\overrightarrow{F}$ et une base de celle-ci.

## 2. Droites et plans dans $\mathbb{R}^3$

**Exercice 14.** On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une équation du plan $V$ engendré par les vecteurs $(1,2,1)$ et $(0,1,1)$ et passant par l'origine.
2. Déterminer une équation du plan $V'$ parallèle à $V$ et passant par le point $(0,0,1)$. Quelle est son équation paramétrique ?
3. Soit $D$ la droite passant par $(1,0,0)$ et dirigée par le vecteur $(1,0,1)$. Déterminer les points d'intersection de $V'$ et de $D$.

**Exercice 15.** Déterminer une équation de la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par les points $(1,1,1)$ et $(1,0,2)$.

**Exercice 16.** Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $P$ d'équation $x+y+z=1$.

1. Déterminer une équation de plan $P'$ passant par les points $(2,-1,0)$, $(0,0,2)$ et $(-1,1,2)$.
2. Déterminer la nature de $\overrightarrow{P}\cap\overrightarrow{P'}$.
3. Déduire de la question précédente que $P\cap P'$ est non vide, et préciser sa nature.
4. Déterminer les caractéristiques géométriques de $P\cap P'$ (point et base de sa direction).

## 3. Autres exemples d'espaces affines

**Exercice 17.** Déterminer parmi les sous-ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ et préciser alors leurs directions et leurs dimensions.

1. $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 1\}$
2. $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 1 \text{ et } x = y = 0\}$
3. $V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$
4. $V_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$
5. $V_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2xy + y^2 = 1\}$

**Exercice 18.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E_n$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$. Soit $F_0 = \{f \in E_n, \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ et $F_1 = \{f \in E_n, \int_0^1 f(t)dt = 1\}$.

1. Montrer que $F_0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que $F_1$ est un espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est $F_0$. Quelle est la dimension de $F_1$ ?
3. On suppose $n = 4$. Montrer que la partie $V$ de $F_1$ formée des polynômes divisibles par $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ est un plan affine de $F_1$.

**Exercice 19.** Soit $a$ et $b$ deux réels. Montrer que les suites de réels $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \geq 0$ est un sous-espace affine de l'espace vectoriel des suites réelles. Préciser la dimension de ce sous-espace affine.

**Exercice 20.** Soit $E$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on note $F = \{P \in E, P'(0) = 1\}$.

1. Montrer que $F$ est un sous-espace affine de $E$.
2. On suppose que $E = \mathbb{R}_5[X]$. Déterminer la nature de $F$ ainsi qu'une base de sa direction.
3. On suppose ici que $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que $F$ est un hyperplan affine.

## 4. Exercices théoriques

**Exercice 21.** ($\star$) Soit $E$ un espace affine.

1. Soit $F$ une partie non vide de $E$. Montrer que $F$ est un sous-espace affine de $E$ si et seulement si toute droite passant par deux points distincts de $F$ est contenue dans $F$.
2. Décrire le sous-espace affine engendré par deux droites affines non coplanaires dans un espace affine.
3. Soient $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces affines de $E$. Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine de $E$ si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

**Exercice 22.** ($\star$) On considère deux sous-espaces affines $V$ et $W$ d'un espace affine $E$ et on note $T$ le sous-espace affine engendré par $V \cup W$.

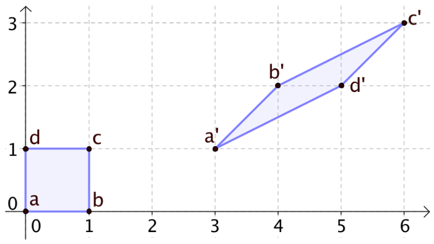
1. Pour tout $a \in V$ et tout $b \in W$, montrer qu'on a $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + \text{Vect}(\overrightarrow{ab})$.
2. Pour tout $a \in V$ et tout $b \in W$, montrer que $V$ rencontre $W$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{ab}$ est dans $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}$.
3. En déduire que $\dim(T) = \dim(()\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}) + 1$ si $V$ ne rencontre pas $W$, et que $\dim(T) = \dim(()\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W})$ sinon.

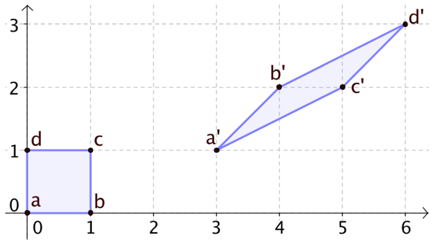
## 5. Transformations affines-Définitions

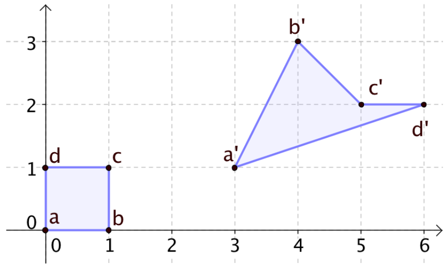
**Exercice 23.** Dans $\mathbb{R}^2$, on note $a = (0,0)$, $b = (1,0)$, $c = (1,1)$ et $d = (0,1)$. Représenter l'image de $abcd$ par les applications affines suivantes :

1. l'application $g$ telle que $g(a) = c$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de $\overrightarrow{g}$ dans la base canonique ;
2. l'application $h$ telle que $h(a) = d$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de $\overrightarrow{h}$ dans la base canonique.
3. $h$ et $g$ sont-elles égales ? Donner une application affine envoyant $g(a), g(b), g(c)$ sur $h(a), h(b), h(c)$. Ecrire la matrice de son application linéaire associée. Que constate-t-on ?

**Exercice 24.** Soit $f$ une application affine qui envoie $abcd$ sur $a'b'c'd'$, comme indiqué sur l'une des figures suivantes.








1. Justifier que $f$ ne définit une application affine que dans un seul des cas représentés. Montrer qu'elle est alors unique.
2. $f$ est-elle bijective ?
3. Donner la matrice de l'application linéaire associée dans la base $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ad})$ puis dans la base $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$. En déduire l'expression matricielle de $f$ dans le répère $(a, b, c)$.

**Exercice 25.** Déterminer toutes les applications affines d'un espace affine de dimension 1.

## 6. Translations-Homothéties

**Exercice 26.** Démontrer qu'une application affine qui commute avec toutes les translations est elle-même une translation.

**Exercice 27.** On définit quatre points $a = (1, 1)$, $a' = (-2, 2)$, $b = (1, 3)$ et $b' = (-2, 1)$. Montrer qu'il existe une homothétie $h$ transformant $a$ en $a'$ et $b$ en $b'$. Préciser son centre et son rapport.

**Exercice 28.** Soit $f$ une transformation affine du plan. Soient $a$, $b$ et $c$ trois points non alignés. On note $a'$, $b'$ et $c'$ les images respectives de $a$, $b$ et $c$ par $f$. On suppose que $(a'b')$ est parallèle à $(ab)$, $(a'c')$ à $(ac)$ et $(b'c')$ à $(bc)$. Montrer que $f$ est une homothétie ou une translation.

**Exercice 29.** ($\star$) *Theorème de Desargues.* Soient deux triangles non aplatis $abc$ et $a'b'c'$ sans sommets communs. On suppose que $(ab)$ est parallèle à $(a'b')$, que $(bc)$ est parallèle à $(b'c')$ et que $(ac)$ est parallèle à $(a'c')$. Montrer que les droites $(aa')$, $(bb')$ et $(cc')$ sont concourantes ou parallèles.

**Exercice 30.** Soit $E$ un espace affine, $a$ et $b$ deux points (non nécessairement distincts) de $E$ et $\lambda, \mu$ deux réels non nuls et différents de 1. On note $h$ l'homothétie de centre $a$ et de rapport $\lambda$ et $h'$ celle de centre $b$ et de rapport $\mu$.

1. On suppose $\lambda\mu = 1$. Déterminer la nature de $h' \circ h$ et $h \circ h'$.
2. On suppose $\lambda = 1/3$ et $\mu = 2$. Déterminer $h' \circ h$ et $h \circ h'$.

**Exercice 31.** Montrer que 2 homothéties commutent si et seulement si elles ont le même centre.