

TD SEMAINE 7 : EMPRUNTS À TAUX CONSTANT

L'objectif de la semaine est d'apprendre à utiliser la formule liant capital emprunté, remboursements, durée du prêt et taux d'intérêt pour des emprunts à taux constant :

$$C = p \left(\frac{1 - (1 + t)^{-n}}{t} \right),$$

où C est le capital emprunté, p le montant d'un remboursement, n la durée du prêt et t le taux d'intérêts sur une période (par exemple sur 1 mois si les remboursements sont mensuels).

Considérons l'énoncé suivant :

M. Travaux souhaite emprunter 20 000 € au taux d'intérêts de 5% par an. Il souhaite rembourser 300€ par mois. Quelle sera la durée du prêt ?

CONVERSION DE TAUX

Les remboursements étant mensuels, la période de référence est le mois. Nous allons donc convertir le taux d'intérêt en un taux mensuel. En notant t_m le taux mensuel et $t_a = 5\% = 0,05$ le taux annuel,

$$(1 + t_m)^{12} = 1 + t_a = 1,05$$

$$1 + t_m = 1,05^{\frac{1}{12}} \simeq 1,00407412$$

$$t_m = 1,05^{\frac{1}{12}} - 1 \simeq 0,00407412.$$

Le taux d'intérêts mensuel est donc d'environ $0,00407412 = 0,407412\%$.

FORMULE DES EMPRUNTS

On part de la formule :

$$C = p \left(\frac{1 - (1 + t)^{-n}}{t} \right),$$

On connaît $C = 20000$, ainsi que $p = 300$ et $t = 0,00407412$. On cherche la durée du prêt en mois n . Par conséquent,

$$20\,000 = 300 \left(\frac{1 - 1,00407412^{-n}}{0,00407412} \right)$$

$$1 - 1,00407412^{-n} = \frac{20\,000 \times 0,00407412}{300} \simeq 0,271608$$

$$1,00407412^{-n} \simeq 1 - 0,271608 = 0,728392.$$

Ce type d'équation a déjà été travaillé (recherche de durée). On trouve directement :

$$\begin{aligned} -n &\simeq \frac{\log(0,728392)}{\log(1,00407412)} \\ n &\simeq -\frac{\log(0,728392)}{\log(1,00407412)} \simeq 77,95. \end{aligned}$$

Le prêt sera remboursé après 77,95 ans. En arrondissant au mois supérieur et en convertissant en années, on trouve une durée de 78 mois, soit 6 ans et 6 mois.

REMARQUE

S'il n'y avait pas d'intérêts, le nombre de remboursements aurait simplement été de :

$$\frac{20\,000}{300} = 66,7,$$

et donc le prêt aurait duré 67 mois, soit 5 ans et 7 mois. Même avec un taux d'intérêts relativement faible, les intérêts cumulés ont un effet significatif sur sa durée du prêt.