

## Séries de Fourier : Exercices

Les exercices ci-dessous sont principalement adaptés de :

D : *Mathématiques pour l'agrégation interne. Analyse et probabilités.* Dantzer.

FGN2 : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École Polytechnique et des Ecoles Normales Supérieures. Analyse 2.* Francinou, Gianella, Nicolas.

FGN4 : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École Polytechnique et des Ecoles Normales Supérieures. Analyse 3.* Francinou, Gianella, Nicolas.

G : *Analyse.* Gourdon.

MVT : *Suites et séries de fonctions.* Moisan, Vernotte, Tosel.

QZ : *Analyse pour l'agrégation.* Queffélec, Zuily.

RW : *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence.* Ramis, Warusfel.

La dernière application, plus probabiliste, est absente de ces manuels.

Cette liste est une liste non exhaustive de développements possibles pour l'agrégation.

### Fonction $\zeta$

En utilisant l'inégalité de Parseval avec des fonctions bien choisies, on peut expliciter les valeurs de quelques sommes infinies, en particulier les valeurs de la fonction  $\zeta$  aux entiers pairs. Cela demande un peu de pratique en termes de calcul d'intégrales trigonométriques. Une méthode plus sophistiquée, impliquant les nombres de Bernoulli, permet de calculer  $\zeta(2k)$  pour tout  $k \geq 1$ . Voir par exemple la discussion suivant [FGN2, Exercice 4.18], ou [D, Exercice 21.1] pour une version sans séries entières mais avec des polynômes de Bernoulli.

**Exercice 1.** [G, Exercice 1 p. 261] [MVT, Exercice A-1, pp. 155–156]

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique telle que

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi-x}{2} & \forall x \in (0, 2\pi), \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

Donnez la série de Fourier de  $f$ . Déduisez-en la somme  $\zeta(2) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

**Exercice 2.** [MVT, Exercice A-2, p. 156]

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique telle que  $f(x) = |x|$  sur  $[-\pi, \pi]$ .

Donnez la série de Fourier de  $f$ . Déduisez-en les sommes  $\zeta(4) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ .

**Exercice 3.** [MVT, Exercice A-3, p. 156]

Soit  $f$  la fonction impaire  $2\pi$ -périodique telle que<sup>1</sup>  $f(x) = x(\pi - x)$  sur  $[0, \pi]$ .

Donnez la série de Fourier de  $f$ . Déduisez-en les sommes  $\zeta(6) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ .

**Exercice 4.** [FGN2, Exercice 4.18] [G, Sujet d'étude 2 p. 299]

Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . Soit  $\varphi$  la fonction  $2\pi$ -périodique telle que  $\varphi(x) = e^{\frac{zx}{2\pi}}$  pour tout  $x \in (-\pi, \pi]$ .

Déterminez le développement en série de Fourier de  $\varphi$ . Déduisez-en le développement en série entière en 0 de  $f : z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ .

---

1. Pour calculer  $\zeta(2k)$ , il faut une fonction dont les coefficients de Fourier décroissent en  $1/n^k$ . À cause du lien entre régularité d'une fonction et décroissance de la série de Fourier, il faut utiliser des fonctions qui ne sont pas de classe  $C^{k-1}$ ,  $C^k$  par morceaux. Les fonctions polynomiales par morceaux étant toujours  $C^k$  par morceaux, il faut donc utiliser des fonctions qui sont polynomiales par morceaux mais pas de classe  $C^{k-1}$ . Par exemple, des fonctions non continues pour calculer  $\zeta(2)$ , continues mais non  $C^1$  pour calculer  $\zeta(4)$ ,  $C^1$  mais pas  $C^2$  pour calculer  $\zeta(6)$ ...

## Développements eulériens

**Exercice 5.** [FGN2, Exercice 4.9] [G, Exercice 2 p. 262] [MVT, Exercice A-4 pp. 156–157]

Soit  $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Soit  $f_u$  la fonction  $2\pi$ -périodique telle que  $f(x) = \cos(ux)$  pour tout  $x \in [-\pi, \pi)$ .

1. Calculez les coefficients de Fourier de  $f_u$ .
2. Déduisez-en que, pour tout  $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ,

$$\pi \cotan(\pi u) - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2} =: g(u).$$

3. Application : calculez  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .
4. Pour tout  $x \in (0, 1)$ , calculez de deux façons  $I(x) := \int_0^x g(u) du$ .
5. Déduisez-en le produit eulérien

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

## Équation de la chaleur

**Exercice 6.** [FGN4, Exercice 1.28] [MVT, Exercice D-2, pp. 168-169] [RW, Exercice 7, pp. 690-691]

Soit  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodique. Montrez qu'il existe une unique solution  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  à l'équation de la chaleur sur le cercle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

qui soit de plus continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , et telle que  $u(\cdot, t)$  soit  $2\pi$ -périodique pour tout  $t \geq 0$ .

## Inégalité de Wirtinger, inégalité isopérimétrique

**Exercice 7.** [FGN2, Exercice 4.20] [G, Exercice 3 p. 264] [MVT, Exercice D-3 p. 169]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $T$ -périodique. Supposons que

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

Montrez l'inégalité de Wirtinger<sup>2</sup> :

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2 dt.$$

Caractérissez le cas d'égalité.

**Exercice 8.** [FGN4, Exercice 4.11] [MVT, Exercice D-4 pp. 169-170] [QZ, Chapitre IV.VI.2] [RW, Exercice 8 p. 695]

---

2. Pour des applications de cette inégalité, voir [FGN2, Exercices 4.20 et 4.21]

Soit  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe fermée<sup>3</sup> simple<sup>4</sup> continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. On notera  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Soit  $L$  sa longueur et  $S$  l'aire intérieure, de telle sorte que

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

$$S = \left| \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) dt \right|.$$

1. Montrez que  $L^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|^2 dt$ , et déduisez-en que :

$$L^2 - 4\pi S = 2\pi \left( \int_0^{2\pi} (x'(t)^2 - x(t)^2) dt + \int_0^{2\pi} (y'(t)^2 - y(t)^2) dt \right).$$

2. Utilisez l'inégalité de Wirtinger pour démontrer l'*inégalité isopérimétrique*  $L^2 \geq 4\pi S$ .

3. Montrez de plus que  $L^2 = 4\pi S$  si et seulement si la courbe  $\gamma$  trace un cercle.

### Phénomène de Gibbs

**Exercice 9.** [FGN2, Exercice 4.25] [G, Exercice 6 p. 266] [RW, Exercice 6 pp. 688-689]

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  égale à l'identité sur  $[0, 2\pi)$ .

- Déterminez les coefficients de Fourier de  $f$ .
- Soit  $S_n$  la somme partielle d'indice  $n \geq 1$  de sa série trigonométrique. Déterminez les extrema de  $S_n$ .
- Soit  $m_n$  le premier minimum de  $S_n$  sur  $[0, 2\pi)$ . Étudiez le comportement de la suite  $(m_n)_{n \geq 1}$ . Interprétez.

### Critère d'équidistribution de Weyl

**Exercice 10.** [D, Exercice 21.2] [FGN2, Exercices 1.28 et 1.29] [G, Problème 21 p. 288] [RW, Théorème 29 p. 694]

Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Pour tout réel  $x$ , on note  $\{x\}$  la partie décimale de  $x$ .

1. Soit  $f$  une fonction continue,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et 1-périodique. Posons, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$U_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k\theta).$$

Montrez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(f) = \int_0^1 f(t) dt.$$

- Déduisez-en que l'ensemble  $\{\{\theta n\} : n \geq 0\}$  est dense dans l'intervalle  $[0, 1]$ .
- Déduisez-en de plus que, pour tous  $0 \leq a \leq b \leq 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card} \{0 \leq k < n : \{\theta k\} \in [a, b]\}}{n} = b - a.$$

---

3. C'est-à-dire que  $\gamma(1) = \gamma(0)$

4. C'est-à-dire injective sur  $[0, 1)$

## Formule sommatoire de Poisson

**Exercice 11.** [FGN2, Exercices 4.16 et 4.17] [G, Problème 4 pp. 272-273]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(x) = O(1/x^2)$  et  $f'(x) = O(1/x^2)$  en  $\pm\infty$ . On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n).$$

1. Montrez que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $2\pi$ -périodique.
2. Calculez les coefficients de Fourier  $\hat{\varphi}(n) := c_n(\varphi)$  de  $\varphi$  en fonction des coefficients de Fourier  $\hat{f}(n) := c_n(f)$  de  $f$ .
3. Déduisez-en que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

4. Montrez que<sup>5</sup>, pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}.$$

## Marches aléatoires et intégrales de Wallis

**Exercice 12.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Rademacher ( $\mathbb{P}(X_0 = -1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1/2$ ). Posons  $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ ; le processus  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une marche aléatoire issue de 0. On notera enfin  $p_n$  la loi de  $S_n$ .

1. Justifiez que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \geq 0$ ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_n(k) e^{ikx} = \mathbb{E}(e^{ixS_n}) = \cos(x)^n.$$

2. Déduisez-en que<sup>6</sup>

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)^n dx.$$

3. Grâce à un argument combinatoire, montrez que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)^n dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

---

5. Cette dernière question nécessite de connaître la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne.

6. Ici, la fonction  $x \mapsto \cos(x)^n$  est un polynôme trigonométrique, ce qui rend les arguments élémentaires. Si on avait choisi une loi plus compliquée pour  $X$ , il aurait fallu utiliser des arguments plus compliqués pour justifier cette question.