Leçon 206 : Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.

Dans toute la leçon, I, J désignent des intervalles réels non réduits à un point.

Énoncé

Théorème des valeurs intermédiaires : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels dans I. Soit c un réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors $c \in f((a,b))$.

Ce théorème se démontre par dichotomie, ou bien à l'aide de la propriété de la borne supérieure. Il est équivalent à :

Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque : Cette propriété n'est pas caractéristique de la continuité : une fonction peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$. Alors f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.

Théorème de Darboux [FGN·Ana1, Exercice 4.29 ; Gou, Exercice 4 p. 80 ; Moi, Exercice B-1 p. 138 ; Ska, Exercice 7.15] : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

Applications en analyse

0.1 Applications directes

Propriété : Tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.

Autre application [Moi, Exercice A-2 p. 138 ; FGN·Ana1, Exercice 4.9] : Un cycliste parcourt 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 10 km. Même question avec un intervalle de 3 min et une distance de 1 km, puis avec un intervalle de 45 min et une distance de 15 km.

0.2 Caractérisation des homéomorphismes d'intervalles de $\mathbb{R}$

Théorème (Caractérisation des homéomorphismes) : Une application $f : I \to J$ est un homéomorphisme si et seulement si elle est continue, surjective et strictement monotone.

Attention : Certaines références oublient la surjectivité ! Sans cette condition, f est un homéomorphisme de I dans $f(I)$, mais il n'y a aucune raison pour que $f(I)$ coïncide avec J. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, la surjectivité peut se lire “aux extrémités des intervalles”, mais la condition précise dépend du type d'intervalle ainsi que de la croissance ou décroissance de f.

Propriété :

- ▷ Si I et J sont des segments non réduits à des points, ils sont homéomorphes.
- ▷ Si I et J sont ouverts, ils sont homéomorphes.
- ▷ Si I et J sont semi-ouverts, ils sont homéomorphes.

0.3 Existence de points fixes

Propriété [FGN·Ana1, Exercice 4.8 ; Ska, Exercice 7.1] : Soit I un segment et $f : I \to I$ continue. Alors f admet un point fixe, i.e. il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Propriété [FGN·Ana1, Exercice 4.8] : Soit I un segment et f, $g : I \to I$ continues. Supposons que f et g commutent, i.e. que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Ces deux propriétés tombent en défaut si on enlève la condition de compacité sur I, par exemple en prenant $I = \mathbb{R}$.

0.4 Formule de la moyenne

Théorème (Formule de la moyenne) : Soit $I = [a, b]$ un segment et $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ continues. Supposons g de signe constant. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

0.5 Théorème des fonctions implicites

Théorème (Théorème des fonctions implicites, approche élémentaire) : Soient U un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application continue. Supposons que f admette sur U une dérivée partielle $\partial_y f$ par rapport à sa seconde variable, continue en $(0, 0)$. Supposons de plus que $f(0, 0) = 0$ et $\partial_y f(0, 0) \neq 0$.
Alors il existe un voisinage rectangulaire $V \times W \subset U$ de $(0, 0)$ et une fonction $\varphi : V \to W$ telles que

$$\{(x, y) \in V \times W :\ f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) | x \in V\},$$

et de plus φ est continue.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation $f = 0$ est, sur $V \times W$, le graphe d'une fonction continue φ.

Applications en analyse numérique

On cherche une solution d'une équation de la forme $f(x) = y$, où y est un réel fixé, et $x \in I$ est l'inconnue.

Algorithme de dichotomie classique : On se place sur l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ soient de part et d'autre de y. La méthode par dichotomie consiste à construire un couple de suites adjacentes qui convergent vers une solution ℓ de l'équation $f = y$.

- ▷ On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$; sinon, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$

L'erreur absolue de l'approximation de ℓ par a_n ou b_n est alors majorée par $(b_n - a_n) = (b - a)2^{-n}$.

Exercice : Programmez l'algorithme de dichotomie dans le langage de votre choix, afin de résoudre numériquement des équations quelconques du type $\ln(x)e^{3x+\sin(x)} = 57$.

Problème (Encadrement des racines d'un polynôme) [Moi, Exercice C-3 p. 286] : Soit P un polynôme unitaire, à coefficients réels, et de coefficient constant non nul :

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0, \quad a_0 \neq 0.$$

On lui associe le polynôme Q défini par

$$Q(X) = X^n - |a_{n-1}|X^{n-1} - \ldots - |a_1|X - |a_0|.$$

1. Montrez que Q a une unique racine réelle positive, et que cette racine est simple. On la notera r.
2. Montrez que $r \leq m := 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1}\{|a_k|\}$.
3. Montrez que toutes les racines de P (y compris complexes) sont inférieures à r en module.
4. Montrez que la méthode de Newton appliquée à m pour le polynôme Q converge vers r.

5. Supposons que les racines de P sont toutes réelles et distinctes. Décrivez un algorithme par dichotomie pour déterminer toutes ses racines.

Compléments

0.6 Réciproque partielle du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème [FGN·Ana1, Exercice 4.10] : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires. Alors f est continue si et seulement si, pour tout réel y, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est fermé dans I.

0.7 Caractérisation des homéomorphismes d'intervalles de $\mathbb{R}$

Définition : Une application $f : I \to J$ est un **homéomorphisme** lorsque f est continue sur I, bijective, et f^{-1} est continue sur J. S'il existe un homéomorphisme de I dans J, on dit que I et J sont **homéomorphes**.

Théorème : Soit I un intervalle d'extrémités $a < b$ dans $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$ une fonction continue, surjective et strictement monotone. Alors :

- ▷ J est un intervalle de même nature que I, d'extrémités $\alpha = \lim_{a^+} f$ et $\beta = \lim_{b^-} f$;
- ▷ f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens que f.

0.8 Méthode de dichotomie

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. On se propose de déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = 0$. Admettons que l'étude des variations de f ait permis de déterminer le nombre m de solutions de cette équations, et que f change de signe en toutes ces racines [1].

Séparer les solutions revient à déterminer des réels x_0, x_1, …, x_m tels que $f(x_{i-1})f(x_i) < 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution dans chacun des intervalles (x_{i-1}, x_i). On peut ensuite utiliser un algorithme de dichotomie (ou de descente de gradient, ou de Newton) sur chacun de ces intervalles.

Pour séparer les solution en connaissant leur nombre, on procède par essais successifs en s'aidant éventuellement des précisions apportées par le tableau de variations de f. En l'absence d'indication, on peut utiliser une méthode dichotomique sur le segment $[a, b]$:

1. On divise successivement l'intervalle en deux, puis en quatre, etc. ;
2. En notant $(a_k)_{0 \leq k \leq 2^i}$ les extrémités de ces intervalles à l'étape i, on compte [2] le nombre de changements de signe dans la suite $f(a_k)$;
3. On s'arrête lorsqu'il y a exactement m changements de signe.

Références

[FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Analyse 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Gou] : *Les maths en tête, Analyse.* X. Gourdon.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.

1. Sinon, on utilise la dérivée de f.
2. En fait, on actualise à chaque étape.