

Leçon 237 : Construction de l'intégrale et lien avec les primitives

Notations : soient $a < b$ des réels. On note $\mathcal{CM}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ continue par morceaux}\}$ et $\mathcal{E}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ en escalier}\}$.

Pour $f \in \mathcal{E}([a, b])$, on définit l'intégrale $I(f)$ comme l'aire des rectangles (**dessin**).

On va étendre cette intégrale à $\mathcal{CM}([a, b])$ par densité (théorème de Heine).

Construction de l'intégrale

Théorème : $\mathcal{E}([a, b])$ est dense dans $\mathcal{CM}([a, b])$ (conséquence du théorème de Heine).

Lemme : Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$ et $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f . Alors la suite $(I(\varphi_n))_{n \geq 0}$ converge, et la limite ne dépend pas de la suite (φ_n) .

Définition : L'intégrale sur $[a, b]$ de $f \in \mathcal{CM}([a, b])$ est la limite d'une telle suite $(I(\varphi_n))$. On la note $\int_a^b f(t)dt$, ou $\int_a^b f$ s'il n'y a pas de confusion possible.

Propriétés : L'intégrale est linéaire, vérifie la relation de Chasles. L'intégrale d'une fonction positive est positive, et $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$. En particulier, par linéarité, $\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$. Toutes ces propriétés se démontrent d'abord sur $\mathcal{E}([a, b])$, puis s'étendent à $\mathcal{CM}([a, b])$.

Propriété : on munit le plan d'un repère orthonormé. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b])$ positive. Alors l'aire du domaine $\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ vaut $\int_a^b f$. Plus généralement, pour $f, g \in \mathcal{CM}([a, b])$ réelle, l'aire du domaine $\{(x, y) : a \leq x \leq b, \min\{f(x), g(x)\} \leq y \leq \max\{f(x), g(x)\}\}$ vaut $\int_a^b |f - g|$.

Remarque : On prolonge la relation de Chasles par $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Somme de Riemann

Définition : Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ bornée, $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_k)$ une subdivision de $[a, b]$ et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ tels que $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. On appelle **somme de Riemann** de f relative à (σ, θ) la quantité

$$S(f, \sigma, \theta) := \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) f(\theta_i);$$

c'est l'intégrale d'une fonction en escalier (**dessin**). On définit le **pas** de σ par $p(\sigma) := \max_{1 \leq i \leq k} (t_i - t_{i-1})$.

Propriété : soient $f \in \mathcal{CM}([a, b])$, (σ_n) une suite de subdivisions telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(\sigma_n) = 0$ et (θ_n) une suite de points marqués. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \sigma_n, \theta_n) = \int_a^b f(t)dt.$$

Corollaire : on choisit $\sigma_n = (a + i \frac{b-a}{n})_{0 \leq i \leq n}$ et $\theta_n = (a + (i-1) \frac{b-a}{n})_{1 \leq i \leq n}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b])$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt.$$

Application : méthode des trapèzes et analyse d'erreur si f est \mathcal{C}^1 ou \mathcal{C}^2 .

Application : si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) = -\frac{1}{2n} [f(0) - f(1)] + o(1/n).$$

Primitives

Théorème : soit $f \in \mathcal{CM}([a, b])$. Soit F définie sur $[a, b]$ par $F(t) = \int_a^t f$. Alors F est continue ; si f est positive, alors F est croissante ; si f est continue et t , alors F est dérivable en t et $F'(t) = f(t)$. On appelle F une **primitive** de f .

Conséquence : si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$.

On peut donc calculer l'aire sous la courbe de certaines fonctions, ou à l'inverse, calculer des primitives à l'aide d'aires.

Proposition : intégration par partie sur un segment.

Proposition : changement de variables sur un segment.

Application : Lemme de Riemman-Lebesgue : pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b])$,

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\xi t} f(t) dt = 0.$$

Application :

- ▷ Calcul de $\int_0^\pi t(\pi - t) \cos(2nt) dt = -\frac{\pi}{2n^2}$ pour tout $n \geq 1$.
- ▷ En déduire que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \varphi(t) \sin((2N+1)t) dt$, où φ est une fonction continue sur $[0, \pi]$.
- ▷ Conclure à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue.

Références

[CA] : *Analyse pour le CAPES et l'agrégation interne*. Caby, Auliac

[MCDT] : *Manuel de mathématique – Mathématiques supérieures – Analyse*. Moisan, Chanet, Delmas, Tosel.

[ML] : *Mathématiques L1*. Marco, Lazzarini

Les énoncés sont tirés de [CA] (pp. 304–315), les applications de [MCDT] (pp. 187–204). Voir aussi [ML] (pp. 763–789) pour des commentaires additionnels.