Leçon 212 : Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples

Dans toute la leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'algèbre des séries entières

Définition : On appelle **série entière** de variable réelle (respectivement, complexe) toute série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où x est une variable réelle (respectivement, complexe) et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs réelles (respectivement, complexe).

Définition : On définit les trois opérations suivantes sur les séries entières :
- ▷ Somme : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$.
- ▷ Multiplication par un scalaire : $\lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) x^n$.
- ▷ Produit de Cauchy : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Ces définitions sont purement algébriques, et ne préjugent pas de la convergence de ces séries.

Théorème : Muni de ces trois opérations, l'ensemble des séries entières est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

Rayon de convergence

Définition : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pose

$$R := \sup\{r \geq 0,\ (a_n r^n)_{n\geq 0} \text{ est bornée}\}. \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Alors R est appelé le **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et $B(0,R)$ le **disque de convergence** de cette série entière.

En cas d'ambiguité, on notera $R(a)$ le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Proposition : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $x \in \mathbb{K}$.
- ▷ Si $|x| < R$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument.
- ▷ Si $|x| > R$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ diverge.

Proposition : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $x \in \mathbb{K}$.
- ▷ Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est bornée alors $R \geq 1$.
- ▷ Si $(a_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0 alors $R \leq 1$.

Exemple : Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n) x^n$ est 1.

Proposition : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors les rayons de convergence des la séries $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ sont égaux.

Proposition (Règle de d'Alembert) : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite ne s'annulant pas. Si la limite $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ existe, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$, avec les conventions $1/0 = +\infty$ et $1/(+\infty) = 0$.

Proposition (Règle de Cauchy) : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite. Si la limite $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} =: \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ existe, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$, avec les conventions $1/0 = +\infty$ et $1/(+\infty) = 0$.

Exemple : Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$; le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n$ est 2.

Proposition : Soient $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ deux séries entières, et c leur produit de Cauchy. Alors :

- $\triangleright$ $R(a+b) \geq \min\{R(a), R(b)\}$;
- $\triangleright$ $R(a+b) = \min\{R(a), R(b)\}$ si $R(a) \neq R(b)$;
- $\triangleright$ $R(c) \geq \min\{R(a), R(b)\}$.

Propriétés de la somme

Dans ce qui suit, on fixe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence[1] R. Pour tout $x \in B(0,R)$, on pose $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Proposition : Pour tout $r < R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement sur $B(0,r)$.

Conséquence : La fonction f est continue sur $B(0,R)$.

Proposition : La fonction f est dérivable sur $B(0,R)$, et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ pour tout $x \in B(0,R)$. La série dérivée a le même rayon de convergence.

Conséquence : La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $B(0,R)$, et $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$ pour tout $x \in B(0,R)$.

Proposition : La série $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ a le même rayon de convergence, est dérivable sur $B(0,R)$, et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in B(0,R)$.

Comportement au bord du disque de convergence

La convergence de la série en un point du bord du disque de convergence se fait par exemple à l'aide du théorème d'Abel.

Théorème : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que la suite $(a_n R^{-n})_{n\geq 0}$ soit positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$ et $z \neq R$.

Théorème (Critère d'Abel radial) : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R < +\infty$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge, alors elle converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$. En particulier, cette série est continue sur le segment $[0, z_0]$.

Exemple : Calcul des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$ n'admet pas de prolongement continu à un ouvert connexe strictement plus grand que $B(0,1)$ **[Sk]**.

Applications

De nombreuses applications sont présentes dans **[FGN] et [Moi]**. **Attention :** De nombreuses interactions avec d'autres domaines des mathématiques ; penser à préparer des développements commun à d'autres leçons.

0.1 Probabilités : Fonctions génératrices

Définition : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n := \mathbb{P}(X = n)$. On appelle **fonction génératrice** de X l'application G définie par $G(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

Théorème : X admet une espérance si et seulement si G' a une limite à gauche en 1. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G'(1)$.
X admet une variance si et seulement si $G^{(2)}$ a une limite à gauche en 1. Dans ce cas, $G^{(2)}(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.

Application : Calcul de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli, d'une loi de Poisson **[ESC] ou [GK, Chapitre 9]**.

1. Attention : dans ce qui suit, le rayon de convergence peut être nul. Cela n'invalide pas les énoncés, mais ce cas particulier doit être vérifié séparément.

0.2 Analyse : Résolution d'équations différentielles

On suppose qu'une solution développable en série entière d'une équation différentielle existe, puis on montre que sont rayon de convergence est strictement positif.

Exemple : Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$. Déterminer une formule explicite de cette solution.

Exemple : Soit $J_0(x) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin(t))\, \mathrm{d}t$. Montrer que J_0 est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$. Déterminer son développement en série entière [**Moi, E-4**].

0.3 Combinatoire : Calcul de suites

Exemple : Calcul des nombres de Catalan [**FGN**].

Exemple : Calcul des nombres de partitions, des nombres d'arbres [**Moi, E-6 et E-7**].

Références

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation – Analyse et probabilités.* Dantzer.
[Esc] : *Probabilités et statistiques.* Escoffier.
[FGN] : *Exercices de mathématiques des oraux de l'Ecole polytechnique et des Ecoles normales supérieures. Algebre-Analyse.* Francinou, Gianella, Nicolas.
[GK] : *De l'intégration aux probabilités.* Garet, Kurtzmann.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Suites et séries de fonctions.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Ska] : *Analyse.* Skandalis.

La présentation, en l'absence d'autre mention, est tirée de [**Dan**]. Pour les développements, voir en particulier [**FGN**] et [**Moi**]. Les textes [**Esc**] et [**GK**] permettent éventuellement de compléter les applications aux probabilités.

Autres développement possibles (liste non exhaustive) :

- ▷ Critère d'analiticité et principe des zéros isolés [Moi, p. 88].
- ▷ Séries de Taylor ayant un rayon de convergence nul [Moi, p. 87].
- ▷ Application aux équations différentielles [Moi, p. 91].
- ▷ Identités combinatoires [Moi, p. 94].