# Feuille d'exercices n°1 : Matrices, bases et applications linéaires

***Applications linéaires***

## Exercice I

Existe-t-il une application linéaire entre $K$-espaces vectoriels, avec $K = \mathbf{R}$, telle que

(a) l'image d'une droite vectorielle soit une demi-droite (ouverte/fermée) ?
(b) l'image d'un plan vectoriel soit un plan vectoriel privé de l'origine ?
(c) l'image d'un plan vectoriel privé de l'origine soit une droite vectorielle ?
(d) (*) que pouvez-vous dire de (b) et (c) pour $K$ un corps quelconque ?

## Exercice II

Pour les familles de vecteurs $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ et $\mathcal{F}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ suivantes, existe-t-il une application linéaire permettant de passer de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$ ? Si oui est-elle unique ?

(a) Les vecteurs de $\mathbf{R}^2$ : $e_1 = (1,0), e_2 = (3,2), e_3 = (1,-2)$ et les vecteurs de $\mathbf{R}^2$ : $e'_1 = (0,1), e'_2 = (0,-2), e'_3 = (-2,4)$ (dessiner les vecteurs dans ce cas) ;
(b) Les vecteurs de $\mathbf{C}^3$ : $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ et les vecteurs de $\mathbf{C}^3$ : $e'_1 = (0,0,0), e'_2 = (0,0,1), e'_3 = (1,0,0)$ ;
(c) Les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ : $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1), e_4 = (1,1,1)$ et les vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$ : $e'_1 = X^3, e'_2 = X^2, e'_3 = X, e'_4 = 1$ ;
(d) Les vecteurs de $\mathbf{R}_4[X]$ : $e_1 = 1 + X^4, e_2 = X^2$ et les vecteurs de $\mathbf{R}^2$ $e'_1 = (2,-1), e'_2 = (3,0)$ ;
(e) Les vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$ : $e_1 = 2X+1, e_2 = X^3+X^2+X, e_2 = 2X^3+2X^2+1$ et les vecteurs de $\mathbf{R}_2[X]$ : $e'_1 = 1+X, e'_2 = 2+2X, e'_3 = 3+3X$ ;
(f) Les vecteurs de $\mathbf{C}_4[X]$, $e_1 = (1,1,1,0), e_2 = (0,i,i,i), e_3 = (-1,1,1,2)$ et les matrices de $M_2(\mathbf{C})$ $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

## Exercice III

Si $A$ est la matrice associée à une application linéaire $f$ dans des bases quelconques, montrer que le rang de $f$ est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de $A$.

## Exercice IV

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application définie par $f(e_1) = e'_1$ et $f(e_2) = e'_2$. Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image des vecteurs $v_i$, donner la matrice de $f$ dans la base canonique, puis l'expression de $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Identifier la transformation du plan définie par $f$.

(a) pour $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e'_1 = (1,1)$, $e'_2 = (-1,1)$ et $v_1 = (2,0)$, $v_2 = (2,1)$ ;
(b) pour $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (0,1)$, $e'_1 = (4,1)$, $e'_2 = (3,1)$ et $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (2,-1)$ ;
(c) pour $e_1 = (3,3)$, $e_2 = (0,-3)$, $e'_1 = (1,2)$, $e'_2 = (-2,-4)$ et $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,1)$.

## Exercice V

On considère les applications linéaires $f_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définies pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ par $f_1(x,y) = (y,x)$, $f_2(x,y) = \left(\frac{2x+y}{4}, \frac{2x+y}{2}\right)$ et $f_3(x,y) = \left(\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2}\right)$.

(1) Représenter l'image de la base canonique pour chacune de ces applications. Préciser leur nature.

(2) Donner les matrices associées à ces applications. Ces matrices sont-elles équivalentes ?

## Exercice VI

Quelles sont les classes d'équivalences des matrices de $M_{n,1}(\mathbf{R})$ ?

## Exercice VII

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont équivalentes ?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}$,

$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -6 & 4 \\ 3 & 7 & -7 & 4 \\ 4 & 8 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

***Bases et espaces vectoriels***

## Exercice VIII

Les familles de fonctions suivantes sont-elles libres ?

(a) $\{\mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \exp(kx)\}_{k=\{1,\ldots n\}}$ pour $n \in \mathbf{N}^\star$ ;

(b) $\{\mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^k\}_{k=\{0,\ldots n\}}$ pour $n \in \mathbf{N}^\star$ ;

## Exercice IX

On considère l'ensemble $M_2(\mathbf{C})$ des matrices $2 \times 2$ à coefficients dans $\mathbf{C}$.

(1) Rappelez pourquoi $M_2(\mathbf{C})$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

(2) Montrer que $M_2(\mathbf{C})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

(3) Réciproquement, est-ce que $M_2(\mathbf{R})$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel ?

## Exercice X

(1) Pour $x, y, z \in \mathbf{R}$ calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix}$.

(2) En déduire une équation cartésienne du sous-espace vectoriel $H$ de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs de coordonnées $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 4)$.

(3) Montrer que $H$ est le noyau d'une forme linéaire $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ et donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}$.

## Exercice XI ($\star$)

Soit $\{v_1, v_2, \ldots v_{n-1}\}$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$. Montrer qu'un vecteur $u$ de $E$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs si et seulement si $\det(v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, u) = 0$.

## Exercice XII

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$. On désigne par $E^* = L(E, \mathbf{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur $E$. Remarquer que $E^*$ est un espace vectoriel, préciser sa dimension et donner une base.

## Exercice XIII ($\star$)

Montrer qu'un sous-espace vectoriel est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

***Algèbre***

## Exercice XIV

Montrer que la relation "$A$ *est équivalente à* $B$" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbf{R})$

## Exercice XV

(1) Montrer qu'une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est une matrice de passage si et seulement si elle est inversible.

(2) Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est un groupe multiplicatif. Est-il commutatif ?

## Exercice XVI ($\star$)

L'ensemble $M_{n,p}(\mathbf{R})$ est-il un groupe multiplicatif ?

## Exercice XVII ($\star$)

(1) Montrer que la famille de quatre matrices de $M_2(\mathbf{C})$ suivante est libre : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par cette famille forme une algèbre.

(3) Montrer qu'il forme un corps.

## Exercice XVIII

Soit $K$ un corps. Soit $P \in K[X]$. Soit $\lambda \in K$. Montrer que $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $(X - \lambda)$ divise le polynôme $P$.