

Feuille d'exercices n°4

Exercice I

On considère plusieurs applications $\varphi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$:

- $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$;
- $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$;
- $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + x_1y_2$;
- $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1$;
- $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2$.

- Lesquelles définissent une forme bilinéaire ?
- Parmi les formes bilinéaires, lesquelles sont symétriques ? antisymétriques ?
- Pour les formes bilinéaires, écrire la matrice de φ dans la base canonique, ainsi que la forme quadratique correspondante.

Exercice II

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On note φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A .

- Déterminer l'expression de φ .
- Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ la base de $\mathbf{R}^2$ définie par $e'_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $e'_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Déterminer l'expression de φ en fonction des coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice A' de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice III

On considère l'application la forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^2$ définie par la formule $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 - x_2y_2$.

- Déterminer deux formes bilinéaires φ_1 et φ_2 telles que $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, avec φ_1 symétrique et φ_2 antisymétrique.
- Déterminer les matrices de φ , φ_1 et φ_2 dans la base canonique.

Exercice IV

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. On note $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application linéaire dont A est la matrice dans la base canonique. Représenter graphiquement les sous-espaces $\ker f$, $\ker f^*$, $\operatorname{im} f$, $\operatorname{im} f^*$.

Exercice V

(1) Parmi les applications $q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ définies ci-dessous, lesquelles sont des formes quadratiques ?

- $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 6x_2^2$;
- $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1 + 3x_2 + 6x_2^2$;
- $q(x_1, x_2, x_3) = 8x_1x_2 + 4x_2^2$;
- $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$;
- $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + x_2x_3 + 7x_3^2$;
- $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2$;
- $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + 2x_2x_3$.

(2) Pour chacune des formes quadratiques identifiées à la question (1), déterminer sa forme bilinéaire symétrique associée, sa matrice dans base canonique, son rang.

(3) Déterminer la signature des formes quadratiques identifiées à la question (1). (Dans un premier temps, ne pas traiter cette dernière question : y revenir quand la réduction de Gauss aura été vue en cours.)

Exercice VI

Soit $q : E \rightarrow \mathbf{R}$ une forme quadratique réelle. On note $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ la forme bilinéaire symétrique associée.

- Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et $u \in E$, $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$.
- Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $q(u + v) = q(u) + q(v) + 2\varphi(u, v)$.
- Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $\varphi(u, v) = \frac{1}{4}(q(u + v) - q(u - v))$.
- Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $(q(u + v) + q(u - v)) = 2(q(u) + q(v))$.

Exercice VII

Déterminer la signature de la forme quadratique $q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2$.

Exercice VIII

On munit $\mathbf{R}^2$ du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $5(x^2 + y^2) + 6xy = 16$.

- (1) Réduire la forme quadratique apparaissant dans le membre de gauche de l'équation dans une base orthonormale.
- (2) Déterminer les caractéristiques géométriques de $\mathcal{C}$.
- (3) Déterminer les valeurs minimales et maximales prises par la restriction de la fonction $(x, y) \mapsto 5(x^2 + y^2) + 6xy$ sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice IX

Soit q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^2$ définie par la formule $q(x, y) = x^2 - y^2$. Existe-t-il un système de coordonnées (x', y') (i.e. x' et y' sont les fonctions coordonnées dans une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^2$ bien choisie) telle que l'expression de q devienne :

- a. $q = 2x'^2 + \frac{1}{4}y'^2$;
- b. $q = 2x'^2 - \frac{1}{4}y'^2$;
- c. $q = -2x'^2 + \frac{1}{4}y'^2$;
- d. $q = x'y'$;
- e. $q = x'^2$;

Exercice X

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Montrer que la forme quadratique réelle $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Exercice XI

Soit E un espace euclidien. Soit $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On définit $q : E \rightarrow \mathbf{R}$ par la formule $q(x) = \lambda\|x\|^2 - \langle x, a \rangle^2$.

- (1) Vérifier que q est une forme quadratique sur E .
- (2) Justifier que tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme $u + ta$ avec $u \in a^\perp$ et $t \in \mathbf{R}$. Calculer $q(u + ta)$.
- (3) Notons $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ la forme bilinéaire symétrique associée à q . Calculer $\varphi(u + ta, u' + t'a)$ où u et u' sont des éléments de $a^\perp$, et t et t' des réels.
- (4) On suppose que $\dim E \geq 2$. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur λ est-ce que q est définie positive ?

Exercice XII

Décrire les courbes déterminées par les équations cartésiennes suivantes dans $\mathbf{R}^2$:

- a. $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$;
- b. $3x^2 - 2xy - 3y^2 = 1$;
- c. $3xy = 1$;

Exercice XIII

Décrire les surfaces déterminées par les équations cartésiennes suivantes dans $\mathbf{R}^3$:

- a. $x + y + z = 3$;
- b. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
- c. $x^2 + y^2 = 1$;
- d. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
- e. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Exercice XIV

On considère la forme quadratique $q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ sur $\mathbf{R}^3$. Soit A la matrice de q dans la base canonique.

- (1) Déterminer A .
- (2) On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculer AU , AV , AW .
- (3) Quelle est la signature de q ?
- (4) Déterminer la matrice de q dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (correspondant aux vecteurs-colonnes U, V, W).
- (5) Déterminer $q(x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w})$ en fonction des réels x', y' et z' .
- (6) Appliquer la réduction de Gauss à la forme quadratique q .
- (7) Quelle est la nature géométrique du cône isotrope de q ?