

Examen

Le 19 décembre 2024

Durée : 3 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Les réponses non argumentées ne rapportent aucun point.

Tous les exercices sont indépendants. Un barème approximatif est indiqué.

Question 1. (1 point)

On fixe un entier $n \geq 0$. Reformulez la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique.

“Le rang est un invariant de congruence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.”

Vous ferez attention aux quantificateurs et aux implications éventuelles.

Question 2. (5 points)

Répondez par vrai ou faux et argumentez à l’aide d’une démonstration ou un contre-exemple.

1. Dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, soient s la symétrie axiale d’axe $y = x$ et r la rotation d’angle $\pi/2$ (dans le sens trigonométrique). Alors $r \circ s$ est la symétrie axiale d’axe $x = 0$.
2. On peut définir un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathbb{R}^5$ à l’aide de deux équations cartésiennes.
3. On peut trouver une forme quadratique q_1 telle que $q_2(\vec{u}) := -3q_1(\vec{u}/3)$ ne soit pas une forme quadratique.
4. La forme quadratique $q(x, y, z) = (x + 2y)^2 + (x + 2z)^2 - (y - z)^2$ est de signature $(1, 2)$.
5. L’ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = 1\}$ n’est pas un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.

Question 3. (1,5 points)

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par les points $A(0, 1, 2)$, $B(1, 3, 2)$ et $C(-1, 0, 3)$.

Soit $D := \{(3 + 8t, 4 + 11t, -2 - 2t), t \in \mathbb{R}\}$.

1. Déterminez un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. La droite D est-elle faiblement parallèle à $\mathcal{P}$? Fortement parallèle?

Question 4. (1 points)

Soient E un espace affine et $f : E \rightarrow E$ une transformation affine. Montrez que si sa partie linéaire $\vec{f}$ est surjective, alors f est surjective.

Question 5. (1,5 points)

Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, lesquelles sont des formes bilinéaires? Chaque réponse est à justifier rigoureusement.

1. $\varphi_1(\vec{u}, \vec{v}) = u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2$;
2. $\varphi_2(\vec{u}, \vec{v}) = (u_1 - 2u_2)(v_2 - v_1)$;
3. $\varphi_3(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_2 + u_2v_1 + u_1 + v_1$.

Question 6. (1 points)

Appliquez l’algorithme de réduction de Gauss à la forme quadratique

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 12xy + 12y^2 - 2xz - 8yz + \frac{z^2}{3}.$$

Quelle est sa signature?

Questions suivantes au verso.

Exercice 1. (5,5 points)

On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, muni de son repère canonique et de sa distance canonique. Soit :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (y, z - 3, x - 3) \end{cases} .$$

Si X sont les coordonnées d'un point $a \in \mathbb{R}^3$, et Y celle de $f(a)$, alors

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} =: AX + B.$$

1. Calculez A^3 . Que peut-on en déduire sur $f \circ f \circ f$?
2. Calculez $\text{Ker}(A - I)$. Que peut on en déduire sur l'ensemble des points fixes de f ?
3. Calculez $f \circ f \circ f(0, 0, 0)$. Que peut on en déduire sur l'ensemble des points fixes de f ?
4. Montrez que $A \in O_3(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire sur f ?

On pose $\vec{e}_1 := (1, 1, 1)$. On cherche une droite invariante par f .

5. Soit $a \in \mathbb{R}^3$. Montrez que l'image de $a + \text{Vect}(\vec{e}_1)$ par f est une droite parallèle à $a + \text{Vect}(\vec{e}_1)$.
6. Déterminez deux réels x_0, y_0 tels que $f(x_0, y_0, 0) \in (x_0, y_0, 0) + \text{Vect}(\vec{e}_1)$.
7. La droite $(x_0, y_0, 0) + \text{Vect}(\vec{e}_1)$ est-elle fixée par f (c'est-à-dire que tous ses points sont fixes) ? Invariante par f ? Stable par f ?

Exercice 2. (7 points)

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon 1 et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = 1$. Soit $f \in L(\mathbb{R}^2)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$P := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

1. Justifiez *sans calcul* que l'application $q(\vec{u}) := \|f^{-1}(\vec{u})\|^2$ est une forme quadratique définie positive.
2. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Montrez que $\vec{u} \in f(\mathcal{C})$ si et seulement si $q(\vec{u}) = 1$. Quelle est la nature de $f(\mathcal{C})$?
3. Montrez que $q(x, y) = x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2$.
4. Soit A la matrice de q dans la base canonique. Calculez $A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, puis déduisez-en les valeurs propres de A et une base orthonormée de vecteurs propres.
5. Dessinez $f(\mathcal{C})$, en prenant soin de respecter les directions et longueurs pertinentes.
6. Rappelez pourquoi $f(\mathcal{D})$ est une droite affine, et déterminez-en une représentation paramétrique.
7. Sur le même dessin qu'à la question 5, tracez $f(\mathcal{D})$.
8. (*) Que vaut $\max\{\|f(\vec{u})\| : \vec{u} \in \mathcal{C}\}$? Pour quels vecteurs ce maximum est-il atteint ?