

## Examen partiel

Le 24 octobre 2024

Durée : 3 heures

*La note tiendra compte du soin et de la qualité de l'expression écrite.*

*Les réponses non argumentées ne rapportent aucun point.*

*Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

*Tous les exercices sont indépendants. Un barème approximatif est indiqué.*

### Question 1. (1 point)

*Reformulez la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique.*

“On peut trouver deux matrices  $n \times n$  semblables de même rang”

*Il n'est pas attendu que vous écriviez la définition avec des symboles mathématiques comme  $\forall$ ,  $\exists$ , ... ; un énoncé en français, mais rigoureux, suffit.*

### Question 2. (5 points)

Répondez par vrai ou faux et argumentez à l'aide d'une démonstration ou un contre-exemple.

1. La trace est un invariant d'équivalence sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. Les matrices  $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  sont semblables.
3. Si deux matrices  $3 \times 3$  ont le même polynôme caractéristique  $P(X) = (X - 5)(X - 1)(X + 1)$ , alors elles sont semblables.
4. Il y a exactement 2 classes de similitude d'endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  dont le spectre est  $\{-1, 1\}$ .
5. La matrice d'une symétrie est toujours symétrique.

### Question 3. (2 points)

1. Quel objet géométrique est  $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 2x + 5y + z = 0\}$ ? Justifiez votre réponse *sans faire trop de calculs*.
2. Donnez une représentation paramétrique de  $F$ .
3. Soit  $G := \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (2, 4, 1, 1)) \subset \mathbb{R}^4$ . On cherche une représentation cartésienne de  $G$ . Reformulez le problème sous forme matricielle.
4. Déterminez une représentation cartésienne de  $G$ .

### Question 4. (2,5 points)

Soit  $f$  un endomorphisme nilpotent de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrez que  $f^2$  est nilpotent.
2. Combien y a-t-il de formes de Jordan possibles pour  $f$ ? Donnez pour chacune de ces formes un représentant matriciel et le tableau de Young associé.
3. Combien y a-t-il de formes de Jordan possibles pour  $f^2$ ? Donnez les tableaux de Young associés.

**Questions suivantes au verso.**

**Question 5. (4,5 points)**

Soit  $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^5$ , et  $f \in L(\mathbb{R}^5)$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose  $B := A - 2I$ .

1. Montrez que  $B$  est nilpotente, et précisez son indice de nilpotence.
2. Quel est le rang de  $B$  ?
3. Déduisez des questions précédentes le tableau de Young associé à  $B$  en expliquant votre démarche.
4. Déduisez-en la matrice réduite associée à  $B$ , puis celle associée à  $f$ .
5. Déterminez une base dans laquelle la matrice de  $f$  est réduite.

**Question 6. (5 points)**

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . Soient  $F$  le plan d'équation  $7x + 2y = 0$  et  $G$  la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $g := (-1, 3, 2)$ . On note :

- $p_F$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .
- $s_F$  la symétrie d'axe  $F$  parallèlement à  $G$ .
- $p_G$  la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

*Dans ce qui suit, les questions 3, 4, 5 d'une part, et les questions 6, 7 d'autre part, sont indépendantes des précédentes. Toute réponse, même partielle, sera valorisée.*

1. Justifiez que  $F$  et  $G$  sont deux espaces supplémentaires.
2. Soit  $v \in \mathbb{R}^3$ . Sur un dessin, représentez  $F$ ,  $G$ ,  $v$ ,  $p_F(v)$ ,  $s_F(v)$ ,  $p_G(v)$  ainsi que les relations entre ces objets. Il n'est pas nécessaire de calculer des coordonnées de vecteurs ; un croquis propre suffit.
3. Calculez  $p_F(e_1)$ ,  $p_F(e_2)$ ,  $p_F(e_3)$ . Déduisez-en la matrice  $P_F$  de  $p_F$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
4. Que pouvez-vous dire de  $p_F + p_G$  ? Déduisez-en la matrice  $P_G$  de  $p_G$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
5. Quel est le lien entre  $p_F$  et  $s_F$  ? Déduisez-en la matrice  $S_F$  de  $s_F$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
6. Donnez un polynôme annulateur minimal de  $p_F$ . L'endomorphisme  $p_F$  est-il diagonalisable ?
7. Déterminez *sans faire trop de calculs* une matrice  $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $Q^{-1}P_FQ$  soit diagonale. Déterminez les matrices  $Q^{-1}S_FQ$  et  $Q^{-1}P_GQ$ .