

Corrigé du partiel du 24 octobre 2024

Exercice I

On ne demandait pas de démontrer que l'énoncé donné était vrai, on demandait seulement une reformulation. Le plus important était de bien faire apparaître les quantificateurs « il existe » ou « pour tout », et de ne pas confondre matrices équivalentes et matrices semblables.

(On suppose fixé un entier naturel n .)

Une formulation possible était :

« Il existe $(A, B) \in M_n(\mathbf{R})^2$ tel qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$, et $\text{rk } A = \text{rk } B$. »

Avec davantage de symboles :

« $\exists (A, B) \in M_n(\mathbf{R})^2, \exists P \in \text{GL}_n(\mathbf{R}), A = PBP^{-1}$ et $\text{rk } A = \text{rk } B$ »

Exercice II

(1) Faux. Deux matrices équivalentes n'ont pas nécessairement la même trace. Par exemple, si $n \geq 1$, I_n et $2I_n$ sont équivalentes (elles sont de même rang n), mais l'une est de trace n et l'autre de trace $2n$. (Cependant, la trace est un invariant de similitude.)

(2) Faux. Les deux matrices A et B sont triangulaires supérieures, donc leurs valeurs propres sont données par leurs coefficients diagonaux. Ainsi, 2 est valeur propre de A , mais pas de B , ce qui implique que A et B ne sont pas semblables.

(3) Vrai. Comme le polynôme caractéristique $P = (X - 5)(X - 1)(X + 1)$ est scindé à racines simples, les deux matrices sont diagonalisables, avec les mêmes valeurs propres $\{5, 1, -1\}$ toutes de multiplicité 1 : elles sont donc semblables.

(4) Faux. Les matrices suivantes ont toutes un spectre égal à $\{-1, 1\}$, mais ne sont pas semblables.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(5) Faux. Considérons la projection $p : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ sur la droite engendrée par $u := (1, 0)$ parallèlement à la droite engendrée par $v := (1, 1)$. On a $p(u) = u$ et $p(v) = 0$. En utilisant le produit scalaire canonique, on a : $\langle p(u), v \rangle = \langle u, v \rangle = 1$, mais $\langle u, p(v) \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$. Ainsi, $\langle p(u), v \rangle \neq \langle u, p(v) \rangle$, ce qui montre que p n'est pas autoadjoint, autrement dit la matrice de p dans la base canonique n'est pas symétrique. (Plus généralement, la matrice dans la base canonique d'une projection $p : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ sur V_1 parallèlement à V_2 est symétrique si et seulement si V_1 et V_2 sont orthogonaux.)

Exercice III

(1) F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par deux équations linéaires dont les coefficients forment deux vecteurs-lignes $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ manifestement non colinéaires, donc F est une droite vectorielle.

(2) On applique le pivot de Gauss à la matrice du système d'équations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Effectuons l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le système est maintenant échelonné, effectuons l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ pour le mettre sous forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le système de départ est donc équivalent à la conjonction des deux équations $x = 7z$ et $y = -3z$. On peut utiliser z comme paramètre, ce qui montre que $F = \{(7t, -3t, t), t \in \mathbf{R}\}$. Autrement dit, F est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(7, -3, 1)$.

(3) On cherche dans un premier temps à déterminer les coefficients (a, b, c, d) de toutes les équations linéaires $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$ vérifiées par tous les éléments de G , autrement dit par les deux vecteurs $(1, 2, -1, 0)$ et $(2, 4, 1, 1)$.

Introduisons la notation suivante :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Si on note $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, la condition cherchée sur (a, b, c, d) se reformule en l'équation matricielle $MX = 0$. (On obtiendra alors une représentation cartésienne de G en considérant les équations linéaires correspondant à une base des solutions de cette équation $MX = 0$.)

(4) On applique l'algorithme du pivot de Gauss à M . Pour cela, on commence par faire l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Les équations se récrivent $a + 2b - c = 0$ et $3c + d = 0$. On remarque que l'on peut alors exprimer a et d en fonction de b et c . Les solutions au système $MX = 0$ correspondent aux X de la forme suivante pour $(b, c) \in \mathbf{R}^2$:

$$X = \begin{pmatrix} -2b + c \\ b \\ c \\ -3c \end{pmatrix}$$

On obtient une base des solutions en faisant $(b, c) = (1, 0)$, puis $(b, c) = (0, 1)$, ce qui donne les deux quadruplets suivants $(-2, 1, 0, 0)$ et $(1, 0, 1, -3)$.

Il résulte de ce qui précède que G est l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 + x_3 - 3x_4 & = 0 \end{cases}$$

Exercice IV

(1) Si f est nilpotent, il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^n = 0$, donc $(f^2)^n = f^{2n} = (f^n)^2 = 0^2 = 0$, ce qui implique que f^2 est nilpotent.

(2) Il y a trois possibilités pour la forme de Jordan associée.

— On peut avoir trois blocs de Jordan de taille 1, ce qui correspond à la matrice nulle, et au tableau suivant :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

— On peut avoir deux blocs de Jordan, un de taille 2 et l'autre de taille 1, ce qui correspond à la matrice et au tableau suivants :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array}$$

— On peut avoir un unique bloc de Jordan de taille 3, ce qui correspond à la matrice et au tableau suivants :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array}$$

(3) On constate que $M_1^2 = M_2^2 = 0$. Dans les deux premiers cas considérés à la question précédente, f^2 sera l'endomorphisme nul, qui correspond au tableau

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Dans le troisième cas, si on note (e_1, e_2, e_3) une base dans laquelle f admet M_3 comme matrice, alors $f^2(e_1) = e_3$, $f^2(e_2) = 0$ et $f^2(e_3) = 0$. On remarque alors que dans la base (e_1, e_3, e_2) (notez l'ordre des vecteurs), la matrice de f^2

est égale à M_2 , et donc le tableau correspondant est

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array}$$

Exercice V

(1) Notons C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 les vecteurs-colonnes de la matrice $B = A - 2I_5$:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est évident que C_1, C_3 et C_5 peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de C_2 et C_5 : $C_1 = C_2 - C_5, C_3 = 0, C_4 = -C_2 + 2C_5$.

On calcule $BC_2 = -C_1 + 2C_2 + C_4 - C_5 = -(C_2 - C_5) + 2C_2 + (-C_2 + 2C_5) - C_5 = 2C_5 \neq 0$ et $BC_5 = C_3 = 0$. On en déduit $BC_1 = BC_2 - BC_5 = 2C_5, BC_3 = 0, BC_4 = -BC_2 + 2BC_5 = -2C_5$.

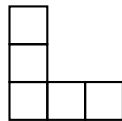
Comme BC_i est la i -ème colonne de B^2 , on a obtenu :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Manifestement, l'image de B^2 est exactement la droite engendrée par C_5 . Comme $BC_5 = C_3 = 0$, on en déduit que $B^3 = 0$. On en déduit que B est nilpotente d'ordre 3.

(2) Il a été montré à la question précédente que $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = \text{Vect}(C_2, C_5)$, mais comme C_2 et C_5 sont évidemment non colinéaires, l'image de B est le plan engendré par C_2 et C_5 , donc B est de rang 2.

(3) D'après le théorème du rang, il vient que le noyau de B est de dimension 3, donc la dernière ligne du tableau contient 3 cases. Par ailleurs, l'indice de nilpotence est 3, donc le nombre de lignes doit être égal à 3. Pour un tableau ayant cinq cases, la seule possibilité est donc :



(4) Si on note $g := f - 2\text{id}$, d'après la question précédente, il doit exister trois vecteurs v_1, v_2, v_3 tels que $\mathcal{B} := (v_1, f(v_1), f^2(v_1), v_2, v_3)$ soit une base de $\mathbf{R}^5$ et tels que la matrice de g dans cette base soit :

$$R = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

et celle de f sera alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

(5) Cherchons des vecteurs-colonnes V_1, V_2 et V_3 dont les vecteurs associés v_1, v_2 et v_3 vérifient les conditions voulues. Pour V_1 , il faut nécessairement prendre un vecteur qui n'est pas dans le noyau de B^2 , par exemple :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet, on a alors $BV_1 = C_2, B^2V_1 = BC_2 = 2C_5, B^3V_1 = 2B(C_5) = 0$.

Les deux vecteurs suivants V_2 et V_3 doivent être dans le noyau de B . Nous avons obtenu les relations linéaires $C_1 - C_2 + C_5 = 0$ et $C_2 + C_4 - 2C_5 = 0$. Ces deux relations linéaires correspondent à deux vecteurs-colonnes V_2 et V_3 appartenant au noyau de B . Considérons la matrice suivante, dont les colonnes sont V_1, BV_1, B^2V_1, V_2 et V_3 définis précédemment :

$$P := \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

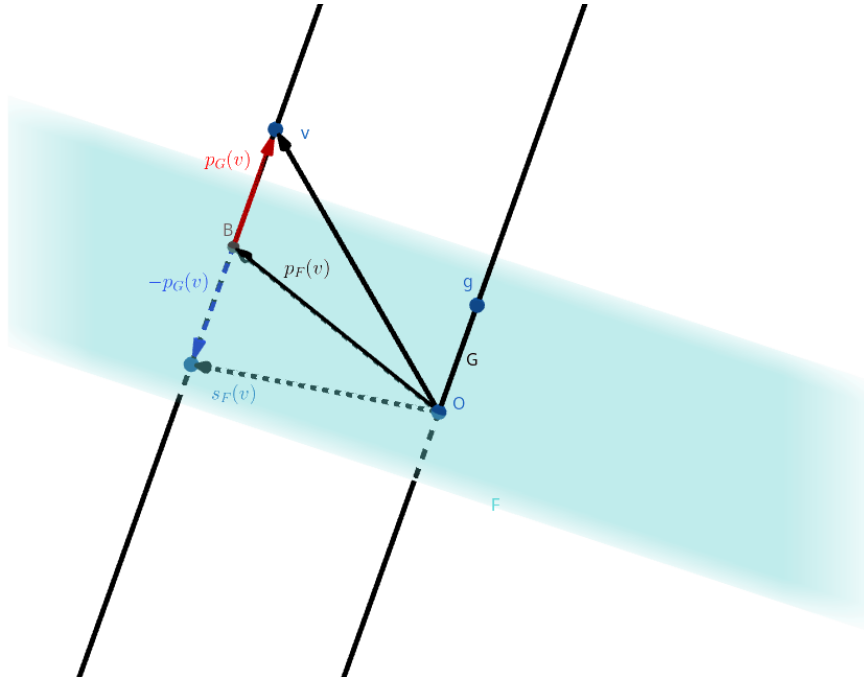
Par construction, on a $BP = PR$, donc pour conclure que $R = P^{-1}BP$, il reste simplement à vérifier que P est inversible, autrement dit que les colonnes de P sont linéairement indépendantes.

Supposons que $a_1V_1 + a_2BV_1 + a_3B^2V_1 + a_4V_2 + a_5V_3 = 0$. En multipliant à gauche par B , vu que V_2 et V_3 sont dans le noyau de B , on obtient $a_1BV_1 + a_2B^2V_2 = a_1C_2 + 2a_2C_5 = 0$. Comme C_2 et C_5 sont linéairement indépendants, on déduit que $a_1 = a_2 = 0$. Pour conclure que $a_3 = a_4 = a_5 = 0$, on est ramené à montrer que les trois dernières colonnes de P sont linéairement indépendantes, ce qui est assez évident.

Exercice VI

(1) Notons $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ l'application linéaire qui à (x, y, z) associe $7x + 2y$. Par définition, $F = \ker \varphi$. On a aussi $\varphi(g) = -7 + 6 = -1 \neq 0$, donc $g \notin F$, autrement dit $G \cap F = \{0\}$. Ainsi, la droite G est en somme directe avec le plan F . Pour des raisons de dimension ($\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3$), F et G sont des sous-espaces supplémentaires.

(2)



(3) Soit $u \in \mathbf{R}^3$. On doit avoir une décomposition $u = p_F(u) + \lambda g$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}$ (qui dépend de u). On doit aussi avoir $\varphi(p_F(u)) = 0$, donc par linéarité, on doit avoir $\varphi(u) = \lambda\varphi(g) = -\lambda$, autrement dit $\lambda = -\varphi(u)$. Par conséquent, $p_F(u) = u - \lambda g = u + \varphi(u)g$.

En particulier, $p_F(e_1) = e_1 + \varphi(e_1)g = e_1 + 7g = (-6, 21, 14)$, $p_F(e_2) = e_2 - \varphi(e_2)g = e_2 + 2g = (-2, 7, 4)$ et $p_F(e_3) = e_3 - \varphi(e_3)g = e_3 = (0, 0, 1)$. On obtient ainsi :

$$P_F = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 21 & 7 & 0 \\ 14 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) On a bien sûr $p_F + p_G = \text{id}$. (En effet, $p_F + p_G$ et l'identité sont deux applications linéaires qui coïncident sur les deux sous-espaces F et G : elles sont donc égales.) On en déduit :

$$P_G = I_3 - P_F = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -21 & -6 & 0 \\ -14 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) Essentiellement par définition, on a $s_F = p_F - p_G = p_F - (\text{id} - p_F) = 2p_F - \text{id}$. On en déduit :

$$S_F = I_3 - P_G = \begin{pmatrix} -13 & -4 & 0 \\ 42 & 13 & 0 \\ 28 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) Comme p_F est un projecteur, on a $p_F^2 = p_F$, donc p_F est annulé par $X^2 - X = X(X - 1)$. Manifestement, $p_F \neq 0$ et $p_F \neq \text{id}$, donc $X(X - 1)$ est la polynôme minimal de p_F . L'endomorphisme p_F est donc bien sûr diagonalisable, avec 1 et 0 comme valeurs propres. L'espace propre associé à 1 est F et celui associé à 0 est G .

(7) Introduisons la matrice Q suivante :

$$Q := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il est évident que les deux premières colonnes de Q correspondent à des vecteurs formant une base du plan F d'équation $7x + 2y = 0$, et le troisième correspond

à g qui engendre la droite G . Comme F et G sont supplémentaires, les colonnes de Q correspondent à une base de $\mathbf{R}^3$, et d'après les résultats précédents, on a bien sûr :

$$Q^{-1}P_FQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}P_GQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}S_FQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$