

Suites réelles : Exercices

Rationalité, irrationalité, transcendance

Exercice 1. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ et applications [CAPES 2005] [FGN·Ana1, ex. 1.13] [FGN·3, ex. 1.23] [Moi, TD 1 p. 51] [Ska, ex. 1.15]

1. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $H' := \{x \in H : x > 0\}$.
 - (a) Montrez que H' est non vide. On notera a sa borne inférieure.
 - (b) Supposons que $a > 0$. Montrez que $a \in H'$ (et donc que $a = \min H'$), et déduisez-en que $H = a\mathbb{Z}$.
 - (c) Supposons que $a = 0$. Montrer que H est une partie dense de $\mathbb{R}$.
2. Applications :
 - (a) Soient u, v deux réels non nuls tels que u/v soit irrationnel. Montrez que $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.
 - (b) Soit $r \in \mathbb{Q}^*$. Déduisez-en que $\{\cos(rn) : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
 - (c) Montrez que l'ensemble des rationnels décimaux inversibles (dans $\mathbb{D}$) est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Variante et applications :
 - (a) Soient u, v deux réels strictement positifs tels que u/v soit irrationnel. Montrez que $u\mathbb{N} - v\mathbb{N} = \{mu - nv : (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
 - (b) Soit $r \in \mathbb{Q}^*$. Déduisez-en que $\{\sin(rn) : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
 - (c) Soient $c_1, \dots, c_q \in \{0, \dots, p\}$ avec $c_1 \neq 0$. Montrez qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que l'écriture en base 10 de 2^p commence par les chiffres $c_1, \dots, c_p$.

Exercice 2. Nombres de Liouville [FGN·Alg1, ex. 5.55] [FGN·3, ex. 1.17] [Mon, P. 4.2 p. 283] [Ska, ex. 1.4]

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un irrationnel et $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers tels que $P(x) = 0$. Soit d le degré de P . Montrez qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}.$$
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{0, \dots, 9\}$. Montrez que le réel $u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 10^{-n!}$ est transcendant.
3. Déduisez-en que l'ensemble des réels transcendants n'est pas dénombrable¹.

Suites réelles

Exercice 3. Moyenne de Cesàro et applications [Moi, TD 2 p. 54] [Ska, ex. 1.9]

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On lui associe une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 := u_0 \text{ et } v_n := \frac{u_0 + \dots + u_{n-1}}{n} \quad \forall n \geq 1.$$

1. Cette conclusion peut se démontrer beaucoup plus vite, mais de façon non constructive, en démontrant que les réels algébriques sont dénombrables.

- (a) Montrez que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ .
 - (b) Donnez un exemple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non convergente telle que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 - (c) Application : Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $a_{n+1} - a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \lambda$. Montrez que $\frac{a_n}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \lambda$.
2. Extension. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $S_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On lui associe une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_n := \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n \alpha_k u_k \quad \forall n \geq 0.$$

- (a) Montrez que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ .
- (b) Montrez que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers $+\infty$.
- (c) Montrez que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ .

Exercice 4. Valeurs d'adhérence d'une suite [FGN·Ana1, ex. 2.19] [FGN·3, ex. 2.25 et 2.27] [Moi, TD 4 p. 59] [Ska, ex. 1.12 et 3.17]

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée, et V l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.
 - (a) Montrez que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence x_0 , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0 .
 - (b) Montrez que, si $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, alors V est un intervalle.
2. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue. Soit $x_0 \in [a, b]$. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 := x_0 \text{ et } u_{n+1} := f(u_n) \quad \forall n \geq 0.$$

Montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles tendant vers $+\infty$ et telles que $u_n - v_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrez que $A := \{u_m - v_n : (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Étude de suites

Exercice 5. Lemme de Fekete [FGN·3, ex. 2.3]

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs réelles.

1. Supposons que $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ pour tous $n, m \geq 1$. Soient $n, d \geq 1$. Majorez u_n à l'aide de u_m et u_r , où m et r sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de n par d .
2. Déduisez-en, sous la même hypothèse, le **Lemme de Fekete** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

3. Sans calcul, que pouvez-vous dire des suites réelles (éventuellement positives) vérifiant, pour tous $n, m \geq 1$, que $u_{n+m} \geq u_n + u_m$, ou bien $u_{n+m} \leq u_n \cdot u_m$, ou encore $u_{n+m} \geq u_n \cdot u_m$?
4. Supposons qu'il existe un réel M tel que $u_{n+m} \leq u_n + u_m + M$ pour tous $n, m \geq 1$. Montrez que la suite $(u_n/n)_{n \geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
5. Cherchez au moins 2 applications du lemme de Fekete ou de l'une de ses variantes.

Exercice 6. Méthode des isopérimètres [FGN·Ana1, ex. 2.42]

Soit P un polygone régulier à 2^n côtés et de périmètre 1. Notons u_n et v_n les rayons des cercles inscrit et circonscrit respectivement.

1. Calculez u_n et v_n pour tout $n \geq 1$. Déterminez u_1 et v_1 , et montrez les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2}, \\ v_{n+1} &= \sqrt{u_{n+1} v_n}. \end{cases}$$

2. Montrez que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes, précisez leur limite commune, et donnez un équivalent en $+\infty$ de $v_n - u_n$.
3. Dédisez-en simplement deux suites adjacentes $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ dont la limite est π . Majorez $|a_n - b_n|$ et déterminez un rang n suffisant pour obtenir un encadrement de π à 10^{-20} près.

Exercice 7. Équivalents de suites définies par récurrence

Soit $a > 0$. Soit $f : [0, a] \rightarrow [0, a]$ telle que $f(0) = 0$. Soit $x_0 \in (0, a]$. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 := x_0 \text{ et } u_{n+1} := f(u_n) \quad \forall n \geq 0.$$

1. Supposons pour cette question que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, a]$, que $f'(0) \neq 0$ et qu'il existe $K \in (0, 1)$ tel que $|f'| \leq K$ sur $[0, a]$. Montrez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et donnez un équivalent de $(\ln(u_n))_{n \geq 0}$.
2. Supposons maintenant qu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $p > 1$ tels que :
 $\triangleright 0 < f(x) < x$ pour tout $x \in (0, a]$;
 $\triangleright f(x) =_{0+} x - \alpha x^p + o(x^p)$.
 Montrez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. Déterminez un réel β tel que la suite $v_n := u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ ait une limite réelle non nulle. En utilisant le *lemme de Cesàro*², déduisez-en un équivalent de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
3. Application : déterminez le comportement asymptotique des suites définies par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,
 $\triangleright u_{n+1} = \sin(\lambda u_n)$, avec $\lambda \in [0, 1]$;
 $\triangleright u_{n+1} = \int_0^{u_n} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$.

Références

- [FGN·Alg1] : *Oraux X-ENS. Algèbre 1*. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
 [FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Analyse 1*. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
 [FGN·3] : *Oraux X-ENS. 3. Nouvelle série*. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
 [Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse*. J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
 [Mon] : *Analyse MP*. J.M. Monier.
 [Ska] : *Analyse*. G. Skandalis.

2. Voir le deuxième exercice de cette feuille.