Leçon 205 : Écriture décimale d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels. Notes de cours.

Table des matières

L'objectif de ces notes de cours est d'aborder les développements décimaux de nombres réels. Cette leçon a deux aspects, analytique (reposant sur les propriétés des réels) et arithmétiques (notamment concernant le développement décimal de nombres rationnels).

Nous adoptons le principe de ne travailler qu'avec des nombres dans $[0,1]$, ou de façon équivalente, avec des écritures décimales de partie entière nulle. Le cas général ne sera évoqué qu'à la fin.

Toutes les propriétés énoncées se généralisent à des bases quelconques. Cet aspect ne sera pas abordé, et laissé intégralement en exercice.

1 Signification d'une écriture décimale

Avant toute chose – et cela manque dans le plan de leçon joint – il faut donner un sens à une écriture décimale !

Propriété 1.1.
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\{0,\dots,9\}$. Alors la suite $(\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k})_{n\geq 1}$ converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.

Démonstration.
Posons $u_n := \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est positive et croissante. Pour montrer qu'elle converge et que sa limite appartient à $[0,1]$, il suffit de montrer qu'elle est majorée par 1.

Soit $n \geq 1$. Alors

$$u_n \leq \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} \leq 9 \cdot \frac{1}{9} = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Exercice 1.2.
Montrez qu'un telle suite converge en utilisant d'autres critères :
- ▷ *Montrez directement qu'une telle suite est de Cauchy.*
- ▷ *Définissez une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ soient adjacentes.*

Les questions suivantes sont :
- ▷ Un nombre réel admet-il toujours une écriture décimale ?
- ▷ Un nombre réel admet-il au plus une écriture décimale ?

Autrement dit, l'application $(a_n)_{n\geq 1} \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ est-elle surjective ? Injective ?

2 Détour : un peu de topologie

L'application $S : (a_n)_{n\geq 1} \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ a pour domaine de définition $\{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}^*}$ (l'espace des suites d'éléments de $\{0,\dots,9\}$) et pour co-domaine $[0,1]$.

L'espace $\{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}^*}$ peut être muni de la topologie produit. Cet espace est alors compact (théorème de Tychonoff), et est un espace de Cantor [1].

De plus, l'application S est alors continue. Or une application continue bijective entre deux espaces topologiques compacts est un homéomorphisme. Donc, si S était bijective, alors l'espace de Cantor et $[0,1]$ seraient homéomorphes. C'est absurde : l'intervalle est connexe, contrairement à l'espace de Cantor.

Par contraposition, S n'est pas bijective. Cet argument – qui s'applique à de nombreux systèmes de numération, plus généraux que les écritures dans des bases diverses – montre que :

1. Chose qu'il est plus facile de dessiner avec un développement binaire, c'est-à-dire avec l'espace $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$

▷ ou il existe des nombres réels n'admettant pas d'écriture décimale ;
▷ ou il existe des nombres réels admettant plusieurs écritures décimales.

Comme nous le verrons, le problème proviendra de la non-injectivité de S.

3 Approximations décimales d'un nombre réel

Références pour cette construction : [Moi, Chapitre I.A] [Ska, Chapitre I.2].

Nous notons ici $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière.

Définition 3.1 (Nombre décimal)**.**
Un nombre rationnel x est dit ***décimal*** *s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.*

Exercice 3.2.
Montrez que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Est-ce un corps ?

Définition 3.3 (Approximations décimales)**.**
*Pour tout réel x, notons $p_n := E(10^n x)$. On appelle $\frac{p_n}{10^n}$ l'****approximation décimale par défaut*** *de x à l'ordre n (ou à 10^{-n} près). Si $x \neq \frac{p_n}{10^n}$, alors $\frac{p_n+1}{10^n}$ est l'****approximation décimale par excès*** *de x à l'ordre n.*

Remarque 3.4.
Par définition de la fonction partie entière, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'entier p_n est l'unique entier tel que $\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n+1}{10^n}$.

Exemple 3.5.
1,4142 est l'approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près, et 1,4143 son approximation décimale par excès au même ordre.

Théorème 1.
Les ensembles suivants sont denses dans $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$, l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration.
Commençons par montrer que les nombres décimaux sont denses dans $\mathbb{R}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$, il existe n tel que $10^{-n} \leq \varepsilon$. Mais comme $p_n 10^{-n} \leq x < (p_n + 1)10^{-n}$, on sait que $|x - p_n 10^{-n}| < 10^{-n} \leq \varepsilon$, donc $p_n 10^{-n} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Donc $\mathbb{D} \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ est non vide. Ceci étant vrai pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble des nombres décimaux est bien dense dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{D}$ étant inclus dans $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels est aussi dense dans $\mathbb{R}$.

Finalement, $\sqrt{2}$ est irrationnel [2]. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in (x + \sqrt{2} - \varepsilon, x + \sqrt{2} + \varepsilon)$. Mais alors $q - \sqrt{2} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, donc $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ est non vide. Ceci étant vrai pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble des irrationnels est bien dense dans $\mathbb{R}$. □

2. Nous verrons dans une leçon ultérieure comment ce nombre est défini ; il peut être remplacé par n'importe quel nombre irrationnel, et la suite de la leçon donnera de nombreux critères pour en construire.

4 Développement décimal d'un nombre réel

Théorème 2.
Soit $x \in [0,1)$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n\geq 1}$, à valeurs dans $\{0,\ldots,9\}$ et non stationnaire à 9, telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$. On note $x = 0, a_1 a_2 \ldots$, et on appelle ***développement décimal propre*** *de x cette écriture.*

Démonstration.
Commençons par l'existence d'une telle écriture. Choisissons $a_n := p_n - 10p_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On sait que :

- ▷ $p_n \leq 10^n x$, donc $10p_n \leq 10^{n+1}x$.
- ▷ p_{n+1} est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^{n+1}x$, et en particulier $p_{n+1} \geq 10p_n$.
- ▷ p_n est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^n x$, et en particulier $p_n + 1 > 10^n x$, donc $10p_n + 10 > 10^{n+1}x$, donc $p_{n+1} < 10p_n + 10$

Par conséquent, $a_n \in \{0,\ldots,9\}$ pour tout $n \geq 1$.

Par récurrence [3], en utilisant la définition des a_k, pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k}.$$

Il s'ensuit que $p_n 10^{-n} = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$ pour tout n.

Or la suite $(p_n 10^{-n})_{n\geq 0}$ converge vers x (par le même argument que celui utilisé pour montrer la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$). Donc la série $(\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k})_{n\geq 1}$ converge vers x, ou encore $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$. Tout nombre réel admet donc une écriture décimale.

Supposons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ soit stationnaire à 9. Soit ℓ le plus petit rang tel que $a_k = 9$ pour tout $k \geq \ell$. Alors

$$\sum_{k=\ell}^{+\infty} a_k 10^{-k} = 9 \cdot 10^{-\ell} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 10^{-(\ell-1)} \ ;$$

donc $x = \sum_{k=1}^{\ell-1} a_k 10^{-k} + 10^{-(\ell-1)}$. Si $\ell = 1$, alors $x = 1$, ce qui est absurde. Supposons que $\ell \geq 2$. Alors

$$a_{\ell-1} = p_{\ell-1} - 10p_{\ell-2} = \sum_{k=1}^{\ell-1} a_k 10^{-(\ell-1-k)} + 1 - \sum_{k=1}^{\ell-2} a_k 10^{-(\ell-1-k)} = a_{\ell-1} + 1,$$

ce qui est absurde. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ ainsi obtenue n'est pas stationnaire à 9.

Montrons enfin l'unicité d'une telle suite. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une telle suite. Alors, pour tout $n \geq 1$, par non-stationnarité à 9,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k 10^{-k} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 10^{-n},$$

donc $\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k} \leq 10^n x < \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k} + 1$. Mais, par définition de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$, on a $p_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k}$, et par conséquent $a_n = p_n - 10p_{n-1}$. □

Exercice 4.1.
Montrez que :

1. *Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire à 9, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ est décimal.*
2. *Tout nombre décimal est égal à une série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ avec $(a_n)_{n\geq 0}$ stationnaire à 9.*

3. À savoir rédiger !

3. Un tel développement impropre d'un nombre décimal est unique.

Remarque 4.2.
- ▷ *De plus,* $a_n = p_n - 10p_{n-1}$ *pour tout* $n \geq 1$.
- ▷ *Si l'on enlève la contrainte que la suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *est non stationnaire à 9, alors il n'y a plus unicité du développement décimal : par exemple,* $1 = 0,999\ldots$. *Plus précisément, dans ce cadre, tout nombre décimal a exactement 2 développements décimaux, et tout nombre non décimal a un unique développement décimal. Le second développement décimal d'un nombre décimal est qualifié d'**impropre**.*
- ▷ *Soit* x *un nombre réel positif. Pour obtenir son développement décimal propre, on écrit* $E(x)$ *en base* 10 *avant la virgule, et le développement décimal propre de* $x - E(x)$ *après la virgule.*
- ▷ *Le développement décimal d'un nombre réel* x *strictement négatif est* $-|x|$*, c'est-à-dire le signe* $-$ *précédant le développement décimal de* $|x|$.

5 Développements décimaux des nombres rationnels

Référence pour ce développement : [Ska, Théorème I.3.1].

5.1 Quelques observations

Soit $x = p/q$ un nombre rationnel. On s'intéresse à son développement décimal [4]. Plusieurs cas sont possibles. Par exemple :
- ▷ $x = 13/100$ a pour développement décimal propre $0,13$. La suite de ses décimales est stationnaire à 0.
- ▷ le développement décimal de $x = 1/7$ peut se déterminer à l'aide de l'algorithme de division décimale. On calcule $x = 0,1428571....$ A partir de la 7ème décimale, on retrouve le premier reste, et les décimales vont donc se répéter : $x = 0,142857142857....$
- ▷ le développement décimal de $x = 1/6$ est $x = 0,16666....$ La encore, on observe la répétition d'un motif ; cependant, la répétition n'apparaît qu'à partir de la seconde décimale.

Nous procèderons en deux temps. Dans un premier temps, nous adopterons un point de vue **qualitatif** : nous montrons qu'un réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. Ensuite, nous adopterons un point de vue **quantitatif** : l'objectif sera de trouver la période du développement décimal, ainsi que le rang à partir duquel il est périodique, à l'aide des propriétés arithmétiques des entiers p et q.

5.2 Point de vue qualitatif

Définition 5.1.
Soient P, $R \geq 1$ *deux entiers. Une suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *est dite **périodique de période** P **à partir du rang** R si* $a_{n+P} = a_n$ *pour tout* $n \geq R$.

Par exemple, le développement décimal de $1/7$ est périodique de période 6 à partir du rang 1, tandis que le développement décimal de $1/6$ est périodique de période 1 à partir du rang 2.

Proposition 5.2.
Soit x *un réel. Alors* x *est rationnel si et seulement si le développement décimal propre de* x *est périodique à partir d'un certain rang.*

Les deux sens sont non triviaux, et leurs démonstrations sont assez différentes. Nous allons donc le séprer en deux lemmes.

4. Les énoncés qui suivent pourront bien sûr être adaptés en toute base.

Lemme 5.3.
Soit x un réel. Si le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang, alors x est rationnel.

Remarquons que l'on peut écrire sous forme de fraction $x = 0,142857142857...$ de la façon suivante.

$$x = 0,142857 + 0,000000142857... = 0,142857 + 10^{-6}x,$$

d'où $(10^6 - 1)x = 142857$. Par conséquent, $x = \frac{142857}{10^6-1} = \frac{1}{7}$ est rationnel. Il s'agit de généraliser cet argument.

Démonstration. Supposons le développement décimal propre de x périodique de période P à partir du rang R. Alors

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{R-1} a_n 10^{-n} + \sum_{n=R}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{R-1} a_n 10^{-n} + 10^{-(R-1)} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-R+1} 10^{-n}.$$

Or $\sum_{n=1}^{R-1} a_n 10^{-n}$ et $10^{-(R-1)}$ sont rationnels. Il suffit donc de montrer que $y := \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-R+1} 10^{-n}$ est rationnel. Posons $b_n := a_{n-R+1}$; la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est périodique de période P à partir du rang 1. Or

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{P} b_n 10^{-n} + \sum_{n=P+1}^{+\infty} b_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{P} b_n 10^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n+P} 10^{-(n+P)} = \sum_{n=1}^{P} b_n 10^{-n} + 10^{-P} y,$$

donc

$$y = \frac{\sum_{n=1}^{P} b_n 10^{-n}}{1 - 10^{-P}} = \frac{\sum_{n=1}^{P} b_n 10^{P-n}}{10^P - 1},$$

qui est bien rationnel. □

Lemme 5.4.
Soit x un rationnel. Alors le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang.

En supposant que $x = p/q$ est rationnel, il s'agira dans un premier temps d'exprimer son développement décimal à partir des entiers p et q. Nous avons choisi de nous appuyer sur l'algorithme de division.

Démonstration. Soit $x = p/q$ un nombre rationnel. Supposons pour simplifier que $x \in [0, 1)$, et donc $0 \leq p < q$. Si x est décimal, son développement décimal propre est fini, donc périodique de période 1 à partir d'un certain rang ; on peut donc supposer que x n'est pas décimal. On utilise l'algorithme de division pour trouver les décimales de x.

Soit r_n le reste après n étapes de l'algorithme. Alors $r_0 = p$ et $r_{n+1} = 10r_n\ [q]$ pour tout $n \geq 0$. Soit a_n la n-ième décimale obtenues par l'algorithme. Alors a_{n+1} est le quotient de $10r_n$ par q, que l'on notera $10r_n//q$ (il s'agit d'une notation non standard, mais issue des langages de programmation tels que Python).

Montrons que $(a_n)_{n\geq 1}$ est bien le développement décimal propre de x. Grâce à la définition de la division euclidienne, on a immédiatement, pour tout $n \geq 0$,

$$10r_n = qa_{n+1} + r_{n+1}.$$

Par récurrence, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} + 10^{-n} \frac{r_n}{q}.$$

Or $(r_n)_{n\geq 0}$ est bornée, donc $(10^{-n}\frac{r_n}{q})_{n\geq 0}$ converge vers 0, donc

$$\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}.$$

De plus, pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq r_n < q$, donc $0 \leq 10r_n < 10q$, donc $0 \leq a_n < 10$. Enfin, comme x n'est pas décimal, $(a_n)_{n\geq 1}$ est bien le développement décimal propre de p/q.

Il reste à montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang. La suite $(r_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans l'ensemble fini $\{0, \ldots, q-1\}$, et obéit à une récurrence de la forme $r_{n+1} = F(r_n)$ (ici, $F(y) = 10y\ [q]$). Une telle suite est toujours périodique à partir d'un certain rang. En effet, il existe $R \geq 0$ et $P \geq 1$ tels que $r_{R+P} = r_R$; sinon, la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ serait injective, donc prendrait une infinité de valeurs distinctes, ce qui est absurde. Mais alors, pour tout $n \geq R$, on a

$$r_{n+P} = r_{R+P+(n-R)} = F^{n-R}(r_{R+P}) = F^{n-R}(r_R) = r_n.$$

La suite $(r_n)_{n\geq 0}$ est donc périodique de période P à partir du rang R. Mais, si $r_{n+P} = r_n$, alors $10r_{n+P}//q = 10r_n//q$, donc $a_{(n+1)+P} = a_{n+1}$. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc périodique de période P à partir du rang $R+1$. $\square$

5.3 À propos des périodes

L'objectif suivant est de déterminer la meilleure période et le meilleur rang pour la suite des décimales d'un nombre rationnel. Mais, quel sens donner à “meilleur période” et ‘meilleur rang” ? Nous allons montrer une suite de lemmes, de plus en plus forts, autour de la notion de suite périodique.

Lemme 5.5. *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite périodique de période P_1 à partir du rang R_1, de période P_2 à partir du rang R_2. Alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est périodique de période $PGCD(P_1, P_2)$ à partir d'un certain rang.*

Démonstration. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs x, y tels que $PGCD(P_1, P_2) = xP_1 + yP_2$.

Soit $R := \max\{R_2 + |y|P_2, R_1 + |y|P_2 + |x|P_1\}$. Soit $n \geq R$. Alors :

$$u_{n+PGCD(P_1,P_2)} = u_{n+xP_1+yP_2} = u_{n+yP_2} = u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc périodique de période $PGCD(P_1, P_2)$ à partir du rang R. $\square$

Lemme 5.6. *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite périodique de période P_1 à partir du rang R_1, de période P_2 à partir du rang R_2. Alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est périodique de période P_1 et P_2 à partir du rang* $\min\{R_1, R_2\}$.

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $R_2 \geq R_1$. Soit N tel que $R_1 + NP1 \geq R_2$. Soit $n \geq R_1$. Alors

$$u_{n+P_2} = u_{n+P_2+NP_1} = u_{n+NP_1+P_2} = u_{n+NP_1} = u_n,$$

donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien périodique de période P_2 à partir du rang R_1. $\square$

Lemme 5.7. *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite périodique de période P_1 à partir du rang R_1, de période P_2 à partir du rang R_2. Alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est périodique de période $PGCD(P_1, P_2)$ à partir du rang* $\min\{R_1, R_2\}$.

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $R_1 \leq R_2$. Par le premier lemme, il existe R tel que $(u_n)_{n\geq 1}$ est périodique de période $PGCD(P_1, P_2)$ à partir du rang R. Par le second lemme, $(u_n)_{n\geq 1}$ est périodique de période $PGCD(P_1, P_2)$ à partir du rang $\min\{R, R_1\} \leq R_1$, et donc en particulier à partir du rang $R_1 = \min\{R_1, R_2\}$. $\square$

Supposons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang. Il existe bien une plus petite période P (c'est le $PGCD$ de toutes les périodes), un plus petit rang de départ R (c'est le minimum de tous les rang de départ), et $(u_n)_{n\geq 1}$ est périodique de période P à partir du rang R. On dira que P est la **période minimale** (ou primitive) de $(u_n)_{n\geq 1}$, et R le **rang minimal**.

5.4 Point de vue quantitatif

Théorème 3.
Soit x un réel. Alors x est rationnel si et seulement si le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang. Plus précisément, en écrivant $x = \frac{p}{2^m 5^n q}$ avec p, $2^m 5^n q$ premiers entre eux et n, $m \geq 0$:

- ▷ *le développement décimal de x est fini si et seulement si x est décimal, si et seulement si $q = 1$.*
- ▷ *sinon, le développement décimal de x a pour plus petite période l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, qui divise $\varphi(q)$; et ce développement décimal est périodique à partir du rang $1 + \max\{n, m\}$.*

Démonstration.
Soit x rationnel, et plus précisément $x = \frac{p}{2^m 5^n q}$ avec p, $2^m 5^n q$ premiers entre eux et n, $m \geq 0$. Posons $\ell = \max\{m, n\}$.

Étape 1 : Cas des nombres décimaux.

Montrons que x est décimal si et seulement si $q = 1$. Si x est décimal, écrivons $x = p/10^n$; en écrivant $p = p' 2^{m'} 5^{n'}$ avec $p' \wedge 10 = 1$, on a $x = p'/2^{n-m'} 5^{n-n'}$. Réciproquement, si $q = 1$, alors $x = p/2^m 5^n = p 2^{\ell - m} 5^{\ell - n}/10^\ell$, et x est décimal.

Remarquons de plus que l'écriture décimale propre d'un nombre décimal a $p/10^\ell$ avec p non divisible par 10 a exactement [5] ℓ décimales (en effet, $10^\ell x$ est un entier dont le chiffre des unités est non nul).

Étape 2 : Cas des nombres dont le dénominateur est premier avec 10.

Nous avons traité le cas des nombres décimaux ($q = 1$, et première alternative de la proposition). Supposons maintenant que $q > 1$ et que $m = n = 0$.

Revenons à la construction du cas qualitatif. Soit $(r_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $r_0 = p$ et $r_{n+1} = 10 r_n$ $[q]$, et $a_{n+1} := r_n // q$. Alors $(a_n)_{n\geq 1}$ est la suite des décimales de p/q.

Or p est premier avec q, donc $p \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. De plus, 10 est premier avec q, donc $x \mapsto 10x$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. Enfin, $r_{n+k} = 10^k r_n$ $[q]$, donc $r_{n+k} = r_n$ si et seulement si $10^k = 1$ $[q]$; la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ est donc périodique de période d à partir du rang 0, où d est l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

Comme $a_{n+1} = 10 r_n // q$ est une fonction de r_n, la suite des décimales est périodique de période d à partir du rang 1.

Il reste à vérifier que d est bien la période minimale du développement décimal de p/q. Soit P la période minimale de $(a_n)_{n\geq 1}$. Alors $\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{P} a_k 10^{-k} + 10^{-P} \frac{p}{q}$, donc $10^P p = q p_P + p$, donc $p 10^P \equiv p$ $[q]$; p étant premier avec q, on a finalement $10^P \equiv 1$ $[q]$, donc P est divisible par l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. Finalement, la période minimale du développement décimal de p/q est exactement l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

Étape 3 : Cas général.

Dans le cas général, $x = \frac{p}{2^m 5^n q}$. Par le théorème de Bézout, il existe α, β entiers tels que $p = \alpha 2^m 5^n + \beta q$. De plus, α est premier avec q et β avec $2^m 5^n$. Mais alors $x = \frac{\beta}{2^m 5^n} + \frac{\alpha}{q}$. Or le

5. Ce qui rejoint l'observation suivante : pour calculer l'écriture décimale de 2^{-n} (respectivement, 5^{-n}), il suffit de connaître l'écriture décimale de 5^n (respectivement, 2^n). Ainsi, $\frac{1}{5} = 0,2$; et $\frac{1}{25} = 0,04$; et $\frac{1}{125} = 0,008$; et $\frac{1}{625} = 0,0016$...

développement décimal de $\frac{\alpha}{q}$ est périodique à partir du rang 1, sa période est l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, et $\frac{\beta}{2^m 5^n}$ a exactement ℓ décimales. En ajoutant les deux, la ℓ-ième décimale de $\frac{\alpha}{q}$ est modifiée, donc $\frac{p}{q}$ n'est périodique qu'à partir du rang $\ell + 1$. □

Exemple 5.8.

- ▷ $0,212121\ldots = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$. *Ici, $p = 7$, $q = 33$ et $m = n = 0$. Le développement décimal est périodique à partir du rang 1, de période 2. Remarquons que $10^2 = 100 \equiv 1$ $[33]$, donc 10 est bien d'ordre 2 dans $(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})^*$.*
- ▷ $3,5212121\ldots = 3,5 + \frac{7}{330} = \frac{581}{165}$. *Ici, $p = 581$, $q = 33$, $m = 0$ et $n = 1$. Le développement décimal est périodique à partir du rang 2, de période 2.*

Remarque 5.9.
Soit q un nombre premier avec 10, et d l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. Appliquons ce qui précède à $p = 1$. Le développement décimal de $1/q$ est périodique de période minimale d à partir du rang 1. Par conséquent,

$$\frac{1}{q} = \sum_{k=1}^{d} a_k 10^{-k} + 10^{-d}\frac{1}{q},$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{\sum_{k=1}^{d} a_k 10^{d-k}}{10^d - 1} \\ q &= \frac{10^d - 1}{\sum_{k=1}^{d} a_k 10^{d-k}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, tout nombre premier avec 10 divise un entier de la forme $10^d - 1$, dont tous les chiffres sont des 9. Quitte à appliquer cela à $9q$, tout nombre premier avec 10 divise un entier de la forme $\sum_{k=0}^{d-1} 10^k$, dont tous les chiffres sont des 1. Ce résultat s'étend en toute base.

6 Quelques développements choisis

6.1 Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Référence pour ce développement : [Ska, Théorème I.2.8].

Théorème 4.
$\mathbb{R}$ *est non dénombrable.*

Démonstration.
Cela se fait par l'argument diagonal de Cantor. On procède par l'absurde ; supposons que $\mathbb{R}$ soit dénombrable. Alors il existe une bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, et en particulier une suite réelle surjective[6] $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour simplifier l'argument ci-dessous, posons $v_n := u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Soit $(a_{n,k})_{k\geq 1}$ le développement décimal propre de v_n. Posons $b_n = 0$ si $a_{n,n} \neq 0$, et $b_n = 1$ si $a_{n,n} = 0$. Alors la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans $\{0, \ldots, 9\}$ et est non stationnaire à 9. Soit $x := 0, b_1 b_2 \ldots$. Soit n tel que $v_n = x$, ce qui existe car la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est surjective. Alors, par unicité du développement décimal propre, $b_k = a_{n,k}$ pour tout k, et en particulier $b_n = a_{n,n}$. Cela contredit la définition de la suite b_n. □

6. Et injective, mais cela ne sert pas pour la suite de l'argument. Nous montrons en fait qu'il n'existe pas de fonction surjective $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Remarque 6.1.
Il ne suffit pas de prendre $b_n \neq a_{n,n}$ *sans plus de contrainte, ou de prendre benoîtement* $b_n = a_n + 1$ $[10]$ *(par exemple) ; on risquerait d'obtenir une suite* $(b_n)_{n\geq 1}$ *stationnaire à* 9*, et le développement décimal propre de* x *serait alors distinct de* $0, b_1 b_2 \ldots$*, ce qui ferait perdre la contradiction.*

Exercice 6.2.
(*) En prenant en compte la remarque précédente, rédigez l'argument diagonal de Cantor en utilisant le développement binaire au lieu du développement décimal.

6.2 Nombres de Liouville et transcendance

Références pour ce développement : [FGN·Alg1, ex. 5.55] [Mon, P. 4.2 p. 283] [Ska, ex. 1.4].

Définition 6.3 (Nombre de Liouville)**.**
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*. On dit que* x *est* ***de Liouville*** *si, pour tout* $r > 0$ *et tout* $C > 0$*, il existe une infinité de rationnels* p/q *tels que*
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{C}{q^r}.$$

Théorème 5.
Tout nombre de Liouville est transcendant.

Démonstration.
Soit x un nombre irrationnel algébrique ; montrons que x n'est pas de Liouville. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme non nul à coefficients entiers tel que $P(x) = 0$. Comme P est non nul, ses racines sont isolées : il existe $\delta > 0$ tel que P n'a pas d'autre racine que x sur $[x-\delta, x+\delta]$. Posons $D := \max_{[x-\delta,x+\delta]} |P'|$. Soit p/q un nombre rationnel tel que $|x - p/q| \leq \delta$. Alors
$$|P(p/q)| \leq |P(x)| + D \left| x - \frac{p}{q} \right| = D \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

De plus, $q^d P(p/q)$ est entier. Comme x est irrationnel, $x \neq p/q$, donc $P(p/q) \neq 0$ (car $p/q \in [x-\delta, x+\delta]$), donc $|q^d P(p/q)| \geq 1$. Alors
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{|P(p/q)|}{D} \geq \frac{1}{Dq^d}.$$

Quitte à augmenter D, on a $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Dq^d}$ pour tout rationnel p/q, donc x n'est pas de Liouville. $\square$

Remarque 6.4.
En fait, si x *est irrationnel algébrique, alors pour* $d' > 2$*, il existe* C *tel que* $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^{d'}}$ *pour tout rationnel. Autrement dit, l'exposant peut être pris aussi près de* 2 *que souhaité. Cette amélioration est légèrement plus compliquée à démontrer ; elle a valu a son auteur, Klaus Roth, une médaille Fields en 1958.*

Proposition 6.5.
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite à valeur dans* $\{0, \ldots, 9\}$ *et non stationnaire à* 0*. Alors* $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n!}$ *est un nombre de Liouville, et en particulier est transcendant.*

Démonstration.
Tout d'abord, x est irrationnel car son développement décimal n'est pas périodique à partir d'un certain rang. Soient $r > 0$ et tout $C > 0$. Soit $n \geq 1$. Choisissons $\frac{p}{q} := \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k!}$. Alors $q = 10^{n!}$, et

$$x - \frac{p}{q} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k 10^{-k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-(n+1)!+k} = 10 \cdot 10^{-(n+1)!} = 10q^{-(n+1)}.$$

Or $\lim_{q\to\infty} \frac{10q^{-(n+1)}}{Cq^{-r}} = 0$, donc $|x - \frac{p}{q}| \leq Cq^{-r}$ pour tout n suffisamment grand : x est bien de Liouville, et donc transcendant. □

6.3 Dénominateurs d'approximations rationnelles d'irrationnels

Théorème 6.
Soit x un réel irrationnel. Soit $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres rationnels convergeant vers x, où $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \geq 1$. Alors $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.

Démonstration.
Soit $M \geq 1$.On veut montrer que $q_n > M$ pour tout n suffisamment grand.

Soit $r \in \{1, \ldots, \lfloor M \rfloor\}$. L'intervalle $[x-1, x+1]$ contient au plus $2r+1$ points de $(1/r)\mathbb{Z}$. Par conséquent, l'ensemble $A := [x-1, x+1] \cap \bigcup_{r=1}^{\lfloor M \rfloor} (1/r)\mathbb{Z}$ est fini. Comme x est irrationnel, il n'appartient pas à cet ensemble. Soit $\varepsilon := \min_{y\in A} |x-y| > 0$.

Par convergence, pour tout n suffisamment grand, $|x - p_n/q_n| < \varepsilon$ et $|x - p_n/q_n| < 1$. Cela implique que $p_n/q_n \in [x-1, x+1]$ et $p_n/q_n \notin A$, donc $p_n/q_n \notin (1/r)\mathbb{Z}$ pour tout $r \leq M$. En particulier, $q_n > M$ pour tout n suffisamment grand. □

Exercice 6.6.
On peut aussi procéder par l'absurde. En supposant que (q_n) ne tend pas vers $+\infty$, mntrez que l'on peut extraire une sous-suite strictement croissante (n_k) telle que p_{n_k}, q_{n_k} soient constants. Déduisez-en que x est rationnel.

7 Références

[FGN·Alg1] : *Oraux X-ENS. Algèbre 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.

La présentation, en l'absence d'autre mention, est tirée de [**Ska, Chapitre I**]. La plupart des propositions sont reprises dans [**FGN·Alg1**] et [**FGN·Ana1**], mais la structure d'une suite d'exercices, bien qu'idéale pour des développements, manque de cohérence pour concevoir la leçon elle-même.