

Suites et fonctions réelles : Exercices

Comparaison de fonctions

Exercice 1.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Donnez un exemple de deux fonctions f et g , chacune dominant l'autre en x_0 , mais qui ne sont pas équivalentes en x_0 .
2. Supposons que f_1 (respectivement, f_2) est équivalente à g_1 (respectivement, g_2) en x_0 . Est-ce que $f_1 f_2$ est équivalente à $g_1 g_2$? Est-ce que $\varphi \circ f_1$ est équivalente à $\varphi \circ g_1$, où φ est une fonction continue donnée?
3. Supposons que $f =_{x_0} O(g)$. Montrez qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que tout zéro de g dans V soit aussi un zéro de f . En déduire que deux fonctions équivalentes en x_0 ont les mêmes zéros dans un voisinage de x_0 . Quelles sont les fonctions équivalentes en un point à la fonction nulle? Construisez deux fonctions équivalentes en un point dont la différence n'est pas équivalente à 0 (*on ne peut pas "ajouter les équivalents"*).
4. Supposons que f et g sont équivalentes en x_0 . Montrez qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que :
 - ▷ f et g ont les mêmes zéros dans v ;
 - ▷ f et g ont le même signe là où elles ne s'annulent pas.

Exercice 2.

1. On définit f et g sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|^{\frac{3}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ g(x) &= |x|^{\frac{3}{2}} + x^2 \cos(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \text{ et } g(0) = 0. \end{aligned}$$

Montrez que f et g sont équivalentes en 0, mais que leurs dérivées ne le sont pas.

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues par morceaux au voisinage de a . Soit F (respectivement, G) la primitive de f (respectivement, G) sur un tel voisinage s'annulant en a . Supposons de plus que g est à valeurs positives. Montrez que, si g domine f en a , alors G domine F en a . Montrez de plus que, si f est équivalente à g en a , alors F est équivalente à G en a .

Exercice 3. [FGN·Ana1, Exercice 4.3][FGN·3, Exercice 4.92]

Calculez

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sinh(x)} - \sinh(x)^x}{x^{\sin(x)} - \sin(x)^x}.$$

Exercice 4.

1. On définit f et g sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|^{\frac{3}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ g(x) &= |x|^{\frac{3}{2}} + x^2 \cos(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \text{ et } g(0) = 0. \end{aligned}$$

Montrez que f et g sont équivalentes en 0, mais que leurs dérivées ne le sont pas.

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues par morceaux au voisinage de a . Soit F (respectivement, G) la primitive de f (respectivement, G) sur un tel voisinage s'annulant en a . Supposons de plus que g est à valeurs positives. Montrez que, si g domine f en a , alors G domine F en a . Montrez de plus que, si f est équivalente à g en a , alors F est équivalente à G en a .

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 5. [Moi, Exercice 2 p. 70][Ska, Exercice 7.5]

1. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels convergeant vers $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour tout n , notons $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$ et p_n, q_n premiers entre eux. Montrez¹ que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$.
2. Étudiez la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad p \wedge q = 1 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 6. [Moi, Exercice A-2 p. 138][FGN·Ana1, Exercice 4.9][FGN·3, Exercice 4.16]

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Soit $n \geq 1$ un entier et $a := \frac{1}{n}$. Montrez que l'équation

$$(*) : f(x + a) = f(x)$$

admet au moins une solution. Vous pourrez vous aider de la fonction auxiliaire $g : [0, 1 - a] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x + a) - f(x)$.

2. Montrez que si a n'est pas l'inverse d'un entier, alors l'équation $(*)$ peut ne pas admettre de solution.
3. Application : un cycliste a parcouru 20 kilomètres en une heure ; montrer qu'il existe au moins un intervalle de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 10 kilomètres. Même question avec un intervalle de temps de 3 minutes et un parcours d'un kilomètre.

Continuité uniforme

Exercice 7. [Moi, Exercice 6 p. 71][Ska, Exercice 7.2]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites finies en $\pm\infty$. Montrez que f est bornée et uniformément continue.

Exercice 8. [FGN·Ana1, Exercice 4.22][FGN·3, Exercice 4.33][Ska, Exercice 7.3]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrez qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $|f(x)| \leq \alpha|x| + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrez que $f(x) = x \sin(x)$ satisfait la condition précédente sans être uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Prolongements de fonctions [Ska, Exercice 7.7 pour la première question]

1. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$ et $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrez qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue étendant f (c'est-à-dire telle que $g|_F = f$). On pourra étendre f affinement sur le complémentaire de F , et vérifier que cette extension est continue.

1. Par exemple, mais pas nécessairement, par un raisonnement par l'absurde.

2. Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrez que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeurs dans A , alors $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
3. Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrez qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue étendant f .
4. Le résultat précédent reste-t-il vrai si l'on suppose que f est seulement continue ?

Exercice 10. Produit de convolution

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, nulle en-dehors du segment $[-1, 1]$, et d'intégrale

1. Soit f une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(\varepsilon^{-1}(x-t)) \, dt.$$

1. Justifiez que f_ε est bien définie.
2. Montrez que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x)$ pour tout réel x .
3. Montrez que, si f est uniformément continue, alors $(f_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge uniformément vers f .
4. En supposant seulement que f est continue, montrez que $(f_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge uniformément sur tout segment vers f .

Fonctions dérivables

Exercice 11. [Gou, Exercice 9 p. 86][Ska, Exercice 7.11]

Posons $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \sin(10^n x)$ pour tout réel x . Montrez que f est continue et nulle part dérivable.

Exercice 12. Théorème des accroissements finis généralisé [Moi, p. 108]

Soient f, g deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur (a, b) . Montrez qu'il existe $c \in (a, b)$ tel que le déterminant suivant soit nul :

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix}.$$

En traçant la courbe paramétrée $x \mapsto (f(x), g(x))$, donnez une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 13. Règle de l'Hôpital [Moi, Exercice 6 p. 140]

Soit I un intervalle réel et $a \in I$. Soient f, g deux fonctions à valeurs réelles continues sur I , dérivables sur $I \setminus \{a\}$, et nulle en a .

1. Donnez un exemple de telles fonctions telles que la limite de $\frac{f}{g}$ en a existe, mais que $\frac{f'}{g'}$ n'admette pas de limite en a .
2. Supposons que g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$ et que le quotient $\frac{f'}{g'}$ admette une limite ℓ (finie ou infinie) en a . Montrez que $\lim_a \frac{f}{g} = \ell$.
3. Application : calculez $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{argcosh}(x)}{\arccos(1/x)}$.

Exercice 14. [Gou, Exercice 9 p. 47][Moi, Exercice B-1 p. 138][Ska, Exercice 7.15]

Soit I un intervalle réel et $a < b$ deux points de I . Soit f une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$. On définit deux applications $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \forall x \in (a, b] \text{ et } \varphi(a) := f'(a) ; \\ \psi(x) &:= \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \quad \forall x \in [a, b) \text{ et } \psi(b) := f'(b). \end{aligned}$$

1. Montrez² que $[f'(a), f'(b)] \subset \varphi(I) \cup \psi(I)$.
2. Dédisez-en que f' satisfait à la propriété des valeurs intermédiaires : l'image par f' de tout sous-intervalle de I est un intervalle.

Références

- [FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Analyse 1*. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
 [FGN·3] : *Oraux X-ENS. 3. Nouvelle série*. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
 [Gou] : *Les maths en tête, Analyse*. X. Gourdon.
 [Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse*. J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
 [Ska] : *Analyse*. G. Skandalis.

2. Si $f'(a) < f'(b)$, et en adaptant l'énoncé dans les autres cas.