

---

## Intégrale, primitives. Notes de cours.

---

### Table des matières

<b>1 Fonctions continues par morceaux sur un segment</b>	<b>3</b>
1.1 Définition . . . . .	3
1.2 Opérations sur les fonctions continues par morceaux . . . . .	3
1.3 Densité des fonctions en escalier . . . . .	4
<b>2 Construction de l'intégrale</b>	<b>4</b>
<b>3 Sommes de Riemann</b>	<b>6</b>
<b>4 Primitives</b>	<b>6</b>
<b>5 Applications de l'intégrale sur un segment</b>	<b>8</b>
5.1 Application 1 : Lemme de Riemman–Lebesgue sur un segment . . . . .	8
5.2 Application 2 : Moyenne et moyenne quadratique . . . . .	9
5.2.1 Normes $\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})$ et $\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})$ . . . . .	9
5.2.2 Comparaisons de normes . . . . .	10
5.3 Application 3 : Approximations numériques d'intégrales . . . . .	10
5.3.1 Méthode des rectangles, méthode des trapèzes . . . . .	11
5.3.2 Méthode de Simpson . . . . .	13
<b>6 Intégrales impropres</b>	<b>14</b>
6.1 Définition . . . . .	15
6.2 Fonctions positives et comparaisons . . . . .	16
6.2.1 Application 1 : Vitesses de divergence . . . . .	17
6.2.2 Application 2 : Comparaisons séries-intégrales . . . . .	18
6.3 Fonctions intégrables . . . . .	19
6.3.1 Application 3 : Lemme de Riemann–Lebesgue revisité . . . . .	19
6.4 Fonctions non intégrables . . . . .	20
6.5 Retour sur la convergence en moyenne quadratique . . . . .	20
<b>7 Convergences monotone, convergence dominée, intégration terme à terme</b>	<b>21</b>
7.1 Interversions somme-intégrales . . . . .	21
7.2 Perte de masse . . . . .	23
<b>8 Intégrales à paramètres</b>	<b>23</b>
8.1 Convergence uniforme sur les compacts . . . . .	24
8.2 Segments . . . . .	25
8.3 Application 1 : Fonction Gamma . . . . .	25
8.3.1 Comportement en l'infini . . . . .	27
8.3.2 Comportement en l'origine . . . . .	27
8.4 Application 3 : Transformée de Fourier . . . . .	27
8.5 Application 4 : Produit de convolution . . . . .	28



# 1 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Dans le contexte de ce cours, l'intégrale est définie de la façon suivante :

- ▷ Pour des fonctions *en escalier* sur un segment, dont le graphe est une union finie de rectangles, l'intégrale est définie comme l'aire signée sous la courbe.
- ▷ Les fonctions en escalier sur un segment sont denses dans l'espace des fonctions continues sur ce même segment. L'intégrale s'étend par densité.
- ▷ Sur un intervalle (ou une union finie d'intervalles) qui n'est pas un segment, l'intégrale s'étend en prenant des limites en espace.

## 1.1 Définition

### Définition 1.1.

Une **subdivision** de  $[a, b]$  est une suite finie  $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ , strictement croissante, telle que  $t_0 = a$  et  $t_n = b$ .

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision  $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$  telle que  $f$  est continue à valeurs complexes sur chaque intervalle ouvert  $(t_{i-1}, t_i)$ , et admette des limites finies aux extrémités des intervalles. Autrement dit :  $f|_{(t_{i-1}, t_i)}$  est restriction d'une fonction continue sur  $[t_{i-1}, t_i]$ . On notera ici  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions complexes continues par morceaux sur  $[a, b]$ ,

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est dite **en escalier** s'il existe une subdivision  $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$  telle que  $f$  est constante sur chaque intervalle ouvert  $(t_{i-1}, t_i)$ . On notera ici  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions complexes en escalier sur  $[a, b]$ .

**Attention :** Les valeurs prises par une telle fonction aux extrémités des intervalles de subdivision sont quelconques.

### Exemple 1.2.

Les fonctions continues sur  $[a, b]$ , ainsi que les fonctions en escalier sur  $[a, b]$ , sont continues par morceaux sur  $[a, b]$ .

La fonction  $f : x \mapsto 1/x$  pour  $x \in (0, 1)$ ,  $f(0) = 0$  n'est pas continue par morceaux sur  $[0, 1]$ .

La fonction  $f : x \mapsto \sin(1/x)$  pour  $x \in (0, 1)$ ,  $f(0) = 0$  n'est pas continue par morceaux sur  $[0, 1]$ .

## 1.2 Opérations sur les fonctions continues par morceaux

### Lemme 1.3.

$\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$  est un espace vectoriel.

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ .

*Démonstration.*

La fonction nulle est bien dans  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$  et  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ . La stabilité par multiplication par un scalaire ne pose pas de difficulté.

La difficulté consiste à montrer qu'une somme de fonctions en escalier (respectivement continues par morceaux) est encore en escalier (respectivement continue par morceaux). Pour cela, il faut raffiner des subdivisions, ce qui est très facile à dessiner et très ennuyeux à formaliser. Étant données deux subdivisions  $S = (s_i)_{0 \leq i \leq m}$  et  $T = (t_j)_{0 \leq j \leq n}$ , on classe les  $s_i$  et les  $t_j$  par ordre croissant (en supprimant les doublons) pour obtenir  $S \vee T = (\sigma_k)_{1 \leq k \leq p}$ .

La subdivision  $S \vee T$  a pour propriété que, pour tous  $1 \leq k \leq p - 1$ , l'intervalle  $(\sigma_k, \sigma_{k+1})$  est inclus à la fois dans un intervalle  $(s_i, s_{i+1})$  et dans un intervalle  $(t_j, t_{j+1})$ . Mais alors, si  $f|_{(s_i, s_{i+1})}$  et  $g|_{(t_j, t_{j+1})}$  se prolongent par continuité aux extrémités de ces intervalles, alors  $f|_{(\sigma_k, \sigma_{k+1})}$  et  $g|_{(\sigma_k, \sigma_{k+1})}$

aussi, donc  $f|_{(\sigma_k, \sigma_{k+1})} + g|_{(\sigma_k, \sigma_{k+1})}$  aussi. Par conséquent, si  $f$  et  $g$  sont continues par morceaux de subdivisions associées  $S$  et  $T$ , alors  $f+g$  est continue par morceaux de subdivision associée  $S \vee T$ .  $\square$

De même que pour la somme, on montre :

**Lemme 1.4.**

*Le maximum, le minimum, le produit de deux fonctions en escalier sont en escalier.*

*Pour tous  $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$  et  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , la fonction  $g \circ f$  est en escalier.*

*Le maximum, le minimum, le produit de deux fonctions continues par morceaux sont continues par morceaux.*

*Pour tous  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$  et  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , la fonction  $g \circ f$  est continue par morceaux.*

En particulier, la valeur absolue d'une fonction continue par morceaux est continue par morceaux.

**Exercice 1.5.**

*La composition par une fonction continue ne fonctionne qu'à gauche ! Construisez une fonction continue  $g$  sur un segment  $[a, b]$  et une fonction continue par morceaux  $f$  telles que  $f \circ g$  ne soit pas continue par morceaux.*

### 1.3 Densité des fonctions en escalier

**Lemme 1.6.**

*Les fonctions de  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$  sont bornées.*

*$\mathcal{E}([a, b])$  est dense dans  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$  pour  $\|\cdot\|_\infty$ .*

*Démonstration.*

*Existence d'une borne supérieure :* On applique le théorème de Weierstrass (les fonctions continues sur un segment sont bornées) sur chaque segment de subdivision (la formulation en termes de restrictions est pratique ici). Il faut aussi tenir compte des valeurs aux extrémités des subdivisions, heureusement en nombre fini.

*Densité :* Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[\alpha, \beta]$ . Par le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue. Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\delta > 0$  tel que  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  dès que  $|x - y| \leq \delta$ . Soit  $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$  une subdivision de  $[\alpha, \beta]$  telle que  $t_1 = \alpha$ ,  $t_n = \beta$  et  $t_{i+1} - t_i \leq \delta$  pour tout  $i$ . Soit  $g_\varepsilon$  la fonction valant  $f(t_i)$  sur  $[t_i, t_{i+1})$ , et  $g_\varepsilon(\beta) = f(\beta)$ . Alors  $g_\varepsilon$  est en escalier et  $\|f - g_\varepsilon\|_\infty \leq (\beta - \alpha)\varepsilon$ .

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$ . Soit  $(t_i)_{i \leq i \leq n}$  une subdivision adaptée. Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors, par le point précédent, il existe une fonction en escalier  $g_\varepsilon$  telle que  $|f - g_\varepsilon| \leq (t_{i+1} - t_i)\varepsilon$  sur chaque intervalle  $(t_{i+1}, t_i)$ . On prolonge  $g_\varepsilon$  à  $[a, b]$  en posant  $g_\varepsilon(x) = f(x)$  pour chaque extrémité  $x$  d'une subdivision. Alors  $\|f - g_\varepsilon\|_\infty \leq (b - a)\varepsilon$ .  $\square$

## 2 Construction de l'intégrale

**Définition 2.1.**

*Soit  $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$ . Soient  $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$  une subdivision associée et  $a_i$  la valeur de  $f$  sur l'intervalle  $(t_{i-1}, t_i)$ . On pose*

$$I(f) := \sum_{i=1}^n a_i(t_i - t_{i-1}).$$

*A priori,  $I(f)$  dépend de la subdivision choisie ; on peut montrer que ce n'est pas le cas, mais ce ne sera pas nécessaire pour la suite.*

On dispose de la borne suivante :

**Lemme 2.2.**

Soient  $f$  en escalier sur  $[a, b]$ . Alors  $|I(f)| \leq (b - a) \|f\|_\infty$ .

**Remarque 2.3.**

Comme mentionné dans le chapitre sur la continuité uniforme,  $I : \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  est uniformément continue (car  $(b - a)$ -lipschitzienne),  $\mathbb{C}$  est complet et  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$  est dense dans  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ . Par conséquent,  $I$  s'étend de façon unique en une fonctionnelle  $I : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  continue. Nous allons redémontrer ce résultat, mais la logique globale de ce qui suit n'est qu'une expansion de ce court paragraphe.

**Lemme 2.4.**

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$  et  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers  $f$ . Alors la suite  $(I(\varphi_n))_{n \geq 0}$  converge, et la limite ne dépend pas de la suite  $(\varphi_n)$ .

*Démonstration.*

Soit  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  convergeant uniformément vers  $f$ . Alors  $\sup_{k, \ell \geq n} \|\varphi_k - \varphi_\ell\|_\infty$  converge vers 0, donc  $\sup_{k, \ell \geq n} |I(\varphi_k) - I(\varphi_\ell)|$  aussi. La suite  $(I(\varphi_n))_{n \geq 0}$  est donc de Cauchy, et converge donc vers un réel  $I(\varphi)$ .

Pour montrer que la limite ne dépend pas du choix de la suite, on peut entrelacer deux suites différentes. La limite existe encore par le même raisonnement, et donc les deux suites que l'on a entrelacées ont la même limite.  $\square$

**Propriété 2.5.**

*L'intégrale est linéaire et vérifie la relation de Chasles.*

*L'intégrale d'une fonction positive est positive, et  $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ .*

*Par linéarité, pour des fonctions complexes,  $\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$ .*

*Démonstration.*

La linéarité et la relation de Chasles se montrent d'abord sur  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$ , puis s'étendent par continuité.

La positivité est légèrement plus délicate : il faut montrer qu'une fonction continue par morceaux positive est limite uniforme de fonctions en escalier positives. Cependant, notre construction d'approximations par des fonctions en escaliers satisfait cette propriété.  $\square$

Le lien avec l'aire est vérifiée pour les fonctions en escalier, et se généralise par continuité à toute fonction continue par morceaux :

**Propriété 2.6.**

*on munit le plan d'un repère orthonormé. Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$  positive. Alors l'aire du domaine  $\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  vaut  $\int_a^b f$ . Plus généralement, pour  $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$  réelles, l'aire du domaine  $\{(x, y) : a \leq x \leq b, \min\{f(x), g(x)\} \leq y \leq \max\{f(x), g(x)\}\}$  vaut  $\int_a^b |f - g|$ .*

On utilise pour démontrer cela les propriétés de l'aire :

- ▷ aire des rectangles dans une base orthonormée ;
- ▷ additivité de l'aire ;
- ▷ monotonie : si  $A \subset B$ , alors  $\mathcal{A}(A) \leq \mathcal{A}(B)$ .

Les deux premières propriétés permettent de montrer la propriété pour les fonctions en escalier, la troisième de passer à la limite et l'obtenir pour les fonctions continues par morceaux.

### 3 Sommes de Riemann

**Définition 3.1** (Somme de Riemann).

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  bornée,  $T = (t_0, t_1, \dots, t_k)$  une subdivision de  $[a, b]$  et  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$  tels que  $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . On appelle **somme de Riemann** de  $f$  relative à  $(T, \theta)$  la quantité

$$S(f, T, \theta) := \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) f(\theta_i) ;$$

c'est l'intégrale d'une fonction en escalier (*dessin*). On définit le **pas** de  $T$  par  $p(T) := \max_{1 \leq i \leq k} (t_i - t_{i-1})$ .

**Propriété 3.2.**

Soient  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ ,  $(\sigma_n)$  une suite de subdivisions telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(\sigma_n) = 0$  et  $(\theta_n)$  une suite de points marqués. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \sigma_n, \theta_n) = \int_a^b f(t) dt.$$

*Démonstration.*

Le montrer pour des fonctions continues à l'aide du théorème de Heine et de la continuité uniforme (ici, le module de continuité est légèrement plus pratique).

Pour des fonctions continues par morceaux, c'est plus délicat. On peut encadrer l'erreur comme pour les fonctions continues sur les intervalles de la subdivision  $T$  dont l'adhérence ne rencontre pas une discontinuité de  $f$ .

Les discontinuités de  $f$  sont en nombre fini, donc on peut borner grossièrement les erreurs issues de ces discontinuités par un multiple de  $\|f\|_\infty \times \max(t_{i+1} - t_i)$ .  $\square$

**Remarque 3.3.**

Les fonctions telles que  $S(f, \sigma_n, \theta_n)$  converge quelque soit la suite de subdivisions de pas tendant vers 0 et la suite de points marqués sont dites **intégrables au sens de Riemann**. La propriété ci-dessus peut se reformuler ainsi : **les fonctions continues par morceaux sont intégrables au sens de Riemann, et l'intégrale définie précédemment et l'intégrale de Riemann coïncident.**

Il existe des fonctions qui sont intégrables au sens de Riemann sans être continues par morceaux, par exemple la fonction indicatrice de l'ensemble de Cantor (dont l'intégrale de Riemann est nulle).

On peut ainsi calculer des sommes de Riemann.

**Exercice 3.4.**

Donnez un équivalent asymptotique de  $\left(\sum_{n=1}^N n^\alpha\right)_{N \geq 1}$  pour  $\alpha \geq 0$ .

### 4 Primitives

**Théorème 1.**

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ . Soit  $F$  définie sur  $[a, b]$  par  $F(t) = \int_a^t f$ . Alors

- ▷  $F$  est continue ;
- ▷ Si  $f$  est positive, alors  $F$  est croissante ;
- ▷ Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et  $t \in [a, b]$ , alors  $F$  est dérivable en  $t$  et  $F'(t) = f(t)$ . On appelle alors  $F$  une **primitive** de  $f$ .

*Démonstration.*

On utilise simplement la borne  $|F(s) - F(t)| \leq |s - t| \|f\|_\infty$ . En particulier, si  $f$  est continue par morceaux, alors  $F$  est lipschitzienne, donc continue. La positivité vient immédiatement.

Supposons  $f$  continue et montrons que  $F$  est dérivable et que  $F' = f$ . Soit  $t \in [a, b]$ . Pour tout  $s \in [a, b] \setminus \{t\}$ ,

$$\frac{F(s) - F(t)}{s - t} = \frac{1}{s - t} \int_t^s f(u) \, du.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $s$ , si  $|s - t| \leq \delta$ , alors  $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$ . Mais alors, si  $|s - t| \leq \delta$ , alors  $|u - t| \leq \delta$  pour tout  $u \in [s, t]$ , et donc

$$\frac{1}{s - t} \int_t^s (f(t) - \varepsilon) \, du \leq \frac{1}{s - t} \int_t^s f(u) \, du \leq \frac{1}{s - t} \int_t^s (f(t) + \varepsilon) \, du.$$

On obtient directement les inégalités  $f(t) - \varepsilon \leq \frac{F(s) - F(t)}{s - t} \leq f(t) + \varepsilon$ . Le paramètre  $\varepsilon$  étant arbitraire,

$$F'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{F(s) - F(t)}{s - t} = f(t). \quad \square$$

On en déduit la formule d'intégration par parties sur un segment ainsi que la formule de changement de variables sur un segment.

**Proposition 4.1.**

Soient  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$  et  $g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ . Soit  $G$  une primitive de  $g$  sur  $[a, b]$ . Alors

$$\int_a^b f(t)g(t) \, dt = [f(t)G(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t) \, dt.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} [f(t)G(t)]_a^b &= \int_a^b (fG)'(t) \, dt \\ &= \int_a^b f'(t)G(t) \, dt + \int_a^b f(t)G'(t) \, dt. \end{aligned} \quad \square$$

**Proposition 4.2.**

Soient  $I$  un intervalle,  $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b], I)$  et  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ . Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, dt.$$

*Démonstration.*

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[\varphi(a), \varphi(b)]$ . Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, dt &= [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= [F \circ \varphi(t)]_a^b \\ &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(t) \, dt \\ &= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt. \end{aligned} \quad \square$$

**Remarque 4.3.**

En pratique, en posant  $u = \varphi(t)$ , on a  $du = \varphi'(t) dt$ , et en faisant attention aux bornes,

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

**Remarque 4.4.**

Contrairement à la dimension supérieure, sur un **segment**, il n'est pas nécessaire que le changement de base soit un difféomorphisme, ni de prendre la valeur absolue du jacobien !

## 5 Applications de l'intégrale sur un segment

### 5.1 Application 1 : Lemme de Riemman–Lebesgue sur un segment

Nous pouvons déjà donner une première version du lemme de Riemman–Lebesgue, qui sera généralisé par la suite.

**Lemme 5.1** (Lemme de Riemann-Lebesgue sur un segment [FGN·Ana2, Exercice 1.25]).

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ ,

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \int_a^b e^{i\xi t} f(t) dt = 0.$$

*Démonstration.*

Soit  $g = \mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}$  la fonction caractéristique d'un intervalle borné  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ . Alors, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\int_a^b e^{i\xi t} g(t) dt = \int_\alpha^\beta e^{i\xi t} dt = \frac{e^{i\xi\beta} - e^{i\xi\alpha}}{i\xi},$$

et donc

$$\left| \int_a^b e^{i\xi t} g(t) dt \right| \leq \frac{2}{|\xi|} \rightarrow_{\xi \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Par linéarité de l'intégrale et de la limite, le résultat reste vrai pour tout  $g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$ .

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par densité, il existe une fonction  $g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$  telle que  $\|f - g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ . Mais alors, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \int_a^b e^{i\xi t} f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b e^{i\xi t} (f - g_\varepsilon)(t) dt \right| + \left| \int_a^b e^{i\xi t} g_\varepsilon(t) dt \right| \leq (b - a)\varepsilon + \left| \int_a^b e^{i\xi t} g_\varepsilon(t) dt \right|.$$

Or  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \int_a^b e^{i\xi t} f(t) dt = 0$  donc, pour tout  $\xi$  suffisamment grand,

$$\left| \int_a^b e^{i\xi t} f(t) dt \right| \leq 2(b - a)\varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

On peut déjà appliquer cette version du lemme pour calculer  $\zeta(2)$ . Ce qui suit est tiré de [Moi, Exercice A.5 p. 204].

- ▷ Montrez que  $\int_0^\pi t(\pi - t) \cos(2nt) dt = -\frac{\pi}{2n^2}$  pour tout  $n \geq 1$ .
- ▷ Dédisez-en que  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \varphi(t) \sin((2N+1)t) dt$ , où  $\varphi$  est une fonction continue sur  $[0, \pi]$  à préciser.
- ▷ Concluez à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue.



## 5.2 Application 2 : Moyenne et moyenne quadratique

On peut aussi définir diverses normes sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ , ce qui donne des exemples simples de normes non équivalentes.

### 5.2.1 Normes $\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})$ et $\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})$

#### Définition 5.2.

Pour tout  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ , posons

$$\|f\|_{\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})} := \int_a^b |f|(t) \, dt,$$

$$\|f\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})} := \left( \int_a^b |f|^2(t) \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

#### Lemme 5.3.

$\|\cdot\|_{\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})}$  est une semi-norme sur  $\mathcal{CM}([a, b])$  : elle est positive, homogène et satisfait l'inégalité triangulaire.  $\|f\|_{\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})} = 0$  si et seulement si  $f$  est à support fini.

L'exception des fonctions à support fini est un des désagréments des espaces  $\mathcal{CM}([a, b])$ . Ainsi,  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})}$  est une norme sur  $\mathcal{C}([a, b])$ , et des passages au quotient (identifications de fonctions à nombre fini de points ou sous-ensembles négligeables près) permettent aussi d'obtenir une norme.

#### Théorème 2 (Inégalité de Cauchy–Schwarz).

Soient  $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ . Alors

$$\|fg\|_{\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})} = \int_a^b |f(t)g(t)| \, dt \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \cdot \int_a^b |g(t)|^2 \, dt} = \|f\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})} \|g\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})}.$$

#### Corollaire 5.4.

$\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})}$  est une semi-norme sur  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ .

Attention, pour les mêmes raisons,  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})}$  n'est pas une norme sur  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ . Il faut ou bien disposer d'un résultat général (pas seulement valable dans les espaces pré-hilbertiens), ou bien redémontrer l'inégalité de Cauchy–Schwarz à la main. Rappelons deux techniques :

- ▷ la fonction  $t \mapsto \int_a^b (|f|(t) - \lambda|g|(t))^2 \, dt$  est quadratique en  $\lambda$  et positive, donc son discriminant est négatif.
- ▷ on utilise d'abord l'inégalité de Young  $|fg| \leq \frac{|f|^2 + |g|^2}{2}$ , d'où

$$\int_a^b |fg|(t) \, dt \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f|^2(t) \, dt + \frac{1}{2} \int_a^b |g|^2(t) \, dt.$$

Or  $|fg| = |\sqrt{\lambda}f| \cdot |\frac{1}{\sqrt{\lambda}}g|$ . Donc, pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\int_a^b |fg|(t) \, dt \leq \frac{\lambda}{2} \int_a^b |f|^2(t) \, dt + \frac{1}{2\lambda} \int_a^b |g|^2(t) \, dt.$$

On optimise ensuite cette fonction de  $\lambda$ .

**Exemple 5.5.**

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ . Soit  $I \subset [a, b]$  un segment. Alors  $f|_I$  est continue par morceaux sur  $I$ , et

$$\left| \int_I f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \mathbf{1}_I(t) \, dt \leq \|f\|_2 \|\mathbf{1}_I\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})} = \sqrt{|I|} \|f\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})}.$$

**Définition 5.6** (Convergence en moyenne, en moyenne quadratique).

Soient  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions continues par morceaux sur un segment  $[a, b]$  et  $f$  une fonction continue par morceaux. On dit que

- ▷  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge **en moyenne** vers  $f$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})} = 0$  ;
- ▷  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge **en moyenne quadratique** vers  $f$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})} = 0$ .

**5.2.2 Comparaisons de normes**

On sait déjà que

$$\|f\|_{\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})} \leq (b - a) \|f\|_{\infty}.$$

En effet,  $|f| \leq \|f\|_{\infty}$ , et on intègre cette inégalité. La norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})}$  vient se placer entre les deux. En effet, l'exemple précédent implique en particulier que

$$\|f\|_{\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})} \leq \sqrt{b - a} \|f\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})},$$

tandis que la borne  $\|f\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})} \leq \sqrt{b - a} \|f\|_{\infty}$  s'obtient par intégration de l'inégalité grossière  $|f|^2 \leq \|f\|_{\infty}^2$ .

En particulier, si une suite de fonctions continues par morceaux converge uniformément vers une fonction continue par morceaux, alors elle converge en moyenne quadratique ; si elle converge en moyenne quadratique, alors elle converge en moyenne.

**Exercice 5.7.**

Calculez  $\|f\|_{\mathbb{L}^1([a, b], \mathbb{C})}$ ,  $\|f\|_{\mathbb{L}^2([a, b], \mathbb{C})}$  et  $\|f\|_{\infty}$ , où

- ▷  $f = a \mathbf{1}_I$ ,  $a \in \mathbb{C}$  et  $I$  est un intervalle ;
- ▷  $f(x) = x^\alpha \mathbf{1}_{[0, 1]}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  (si  $\alpha < 0$ , l'intégrale et à comprendre comme la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  des intégrales sur  $[\varepsilon, 1]$ ).

**Exercice 5.8.** Trouvez des suites de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  et des fonctions  $f$  telles que :

- ▷  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f$  en moyenne mais pas en moyenne quadratique ;
- ▷  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f$  en moyenne quadratique mais pas uniformément.

**5.3 Application 3 : Approximations numériques d'intégrales**

On peut, en faisant des hypothèses de régularité supplémentaire sur la fonction considérer  $f$ , regarder la vitesse de convergence de sommes de Riemann. Cela peut se faire dans deux directions complémentaires :

- ▷ Étudier, suivant la régularité de  $f$ , les vitesses de convergence schémas d'approximation simples : méthode des trapèzes, méthode des rectangles.
- ▷ Concevoir des schémas d'approximation efficaces, c'est-à-dire qui convergent vite pour des fonctions raisonnablement régulières (de classe  $\mathcal{C}^3$ ,  $\mathcal{C}^4$ ,  $\mathcal{C}^5 \dots$  sur un segment)

### 5.3.1 Méthode des rectangles, méthode des trapèzes

Commençons par étudier la vitesse de convergence de la méthode des rectangles.

**Propriété 5.9.**

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ . Soit  $\omega$  un module de continuité de  $f$ . Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(t) dt + O\left(\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

*Démonstration.*

Soit  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  un segment, et  $t \in [\alpha, \beta]$ . Alors

$$f(\alpha) - \omega(\beta - \alpha) \leq f(t) \leq f(\alpha) + \omega(\beta - \alpha).$$

En intégrant ces inégalités, on obtient

$$(\beta - \alpha)f(\alpha) - (\beta - \alpha)\omega(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \leq (\beta - \alpha)f(\alpha) + (\beta - \alpha)\omega(\beta - \alpha).$$

Soit  $n \geq 1$  et  $0 \leq k < n$ . Appliquons ces inégalités à  $\alpha = a + \frac{k}{n}(b-a)$  et  $\beta = a + \frac{k+1}{n}(b-a)$  :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - \frac{b-a}{n} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right) &\leq \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} f(t) dt \\ &\leq \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) + \frac{b-a}{n} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right). \end{aligned}$$

En sommant sur  $k$ , on a finalement la borne voulue :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right| \leq (b-a)\omega\left(\frac{b-a}{n}\right). \quad (1) \quad \square$$

Autrement dit, plus  $f$  est régulière, plus les sommes de Riemann convergent vite vers l'intégrale. Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors elle est lipschitzienne, et la propriété ci-dessus implique immédiatement que l'erreur est en  $O(1/n)$ . Mais on peut alors faire mieux !

**Propriété 5.10** ([FGN·Ana2, Exercice 1.22]).

Pour tout  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ ,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(t) dt + \frac{b-a}{2n} [f(b) - f(a)] + o(1/n).$$

*Démonstration.*

Soit  $\omega$  un module de continuité de  $f'$ . Soit  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  un segment, et  $t \in [\alpha, \beta]$ . Alors

$$f'(\alpha) - \omega(\beta - \alpha) \leq f'(t) \leq f'(\alpha) + \omega(\beta - \alpha).$$

En intégrant ces inégalités, on obtient

$$f(\alpha) + (t - \alpha)f'(\alpha) - (t - \alpha)\omega(\beta - \alpha) \leq f(t) \leq f(\alpha) + (t - \alpha)f'(\alpha) + (t - \alpha)\omega(\beta - \alpha).$$

En intégrant encore ces inégalités, il vient

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)f(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}f'(\alpha) - \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}\omega(\beta - \alpha) &\leq \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, dt \\ &\leq (\beta - \alpha)f(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}f'(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}\omega(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Soit  $n \geq 1$  et  $0 \leq k < n$ . Appliquons ces inégalités à  $\alpha = a + \frac{k}{n}(b - a)$  et  $\beta = a + \frac{k+1}{n}(b - a)$ , et sommons sur  $k$  :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) + \frac{(b-a)}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - \frac{(b-a)^2}{2n} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ \leq \int_a^b f(t) \, dt \\ \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \\ + \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) + \frac{(b-a)^2}{2n} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right). \end{aligned}$$

De plus, en appliquant la propriété précédente (et en particulier l'Équation (1)) à  $f'$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) + \frac{b-a}{2n} \int_a^b f'(t) \, dt - \frac{(b-a)^2}{n} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ \leq \int_a^b f(t) \, dt \\ \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \\ + \frac{b-a}{2n} \int_a^b f'(t) \, dt + \frac{(b-a)^2}{n} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right), \end{aligned}$$

et en particulier la borne voulue. □

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors  $f'$  est lipschitzienne, et le calcul précédent donne un développement à l'ordre  $O(1/n^2)$  de l'erreur. Mais là encore, on peut faire mieux !

**Propriété 5.11** ([FGN·Ana2, Exercice 1.22]).

Pour tout  $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$ ,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(t) \, dt + \frac{b-a}{2n} [f(b) - f(a)] + \frac{(b-a)^2}{12n^2} [f'(b) - f'(a)] + o(1/n^2).$$

**Exercice 5.12.**

Écrivez un programme informatique qui vous permette d'observer numériquement ces vitesses d'approximation (bonus : affichez le graphique des erreurs en fonction de  $n$  en échelle logarithmique-logarithmique).

**Exercice 5.13.**

Appliquez ces résultats pour obtenir un développement asymptotique de  $\left(\sum_{n=1}^N n^\alpha\right)_{N \geq 1}$  pour  $\alpha \geq 1$ .

**Remarque 5.14.**

La méthode des trapèzes revient à remplacer  $f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$  dans la somme de Riemann par

$$\frac{1}{2} \left[ f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) + f\left(a + \frac{k+1}{n}(b-a)\right) \right].$$

Quand on somme sur  $k$ , cela revient à retrancher  $\frac{f(a)}{2}$  à la somme de Riemann, et à y ajouter  $\frac{f(b)}{2}$ . D'après les développements asymptotiques que nous avons obtenus, pour des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , la méthode des trapèzes permet d'obtenir une convergence en  $o(1/n)$ ; pour des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ , une convergence en  $O(1/n^2)$ . Pour les fonctions régulières, on a donc logarithmiquement doublé la précision : on obtient de fois plus de décimales correctes dans le même temps de calcul !

**5.3.2 Méthode de Simpson**

On peut aussi généraliser les sommes de Riemann pour obtenir des sommes convergeant beaucoup plus vite vers l'intégrable d'une fonction régulière donnée. Ces techniques utilisent plus généralement l'inégalité de Taylor–Lagrange, ou la formule de Taylor avec reste intégral.

**Proposition 5.15** ([Gou, Exercice 5 p. 79]).

Soit  $f \in \mathcal{C}^4([a, b], \mathbb{C})$  et  $n \geq 1$ . Posons  $t_k := a + k \frac{b-a}{n}$  pour tout  $0 \leq k \leq n$ . Alors

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(t_k) + 4f\left(\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right) + f(t_{k+1})}{6} - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \|f^{(4)}\|_\infty \frac{(b-a)^5}{720n^4}.$$

*Démonstration.*

Soit  $[c, d] \subset [a, b]$  un segment. On applique l'inégalité de Taylor–Lagrange (ou la formule de Taylor–Lagrange avec reste intégral) à l'ordre 4 au milieu de  $[c, d]$ . Posons  $m := \frac{c+d}{2}$  et  $r := \frac{d-c}{2}$ . Pour tout  $t \in [m-r, m+r]$ ,

$$f(t) = f(m) + f'(m)(t-m) + f^{(2)}(m) \frac{(t-m)^2}{2} + f^{(3)}(m) \frac{(t-m)^3}{6} + R(t),$$

où  $R(t) = \int_m^t f^{(4)}(u) \frac{(t-u)^3}{6} du$ ; de plus,  $|R(m+t)| \leq \|f^{(4)}\|_\infty \frac{t^4}{24}$ .

Si l'on intègre ce développement de Taylor entre  $m-r$  et  $m+r$ , on obtient

$$\int_{m-r}^{m+r} f(t) dt = 2rf(m) + f^{(2)}(m) \frac{r^3}{3} + \int_{m-r}^{m+r} R(t) dt,$$

d'où

$$\left| \int_{m-r}^{m+r} f(t) dt - 2rf(m) - f^{(2)}(m) \frac{r^3}{3} \right| \leq \int_{m-r}^{m+r} \|f^{(4)}\|_\infty \frac{t^4}{24} dt = \|f^{(4)}\|_\infty \frac{r^5}{60}.$$

On applique maintenant le développement de Taylor formule à  $t = m-r$ ,  $t = m$  et  $t = m+r$ , et on pondère par des coefficients bien choisis<sup>1</sup>. Pour l'instant, notons ces coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$ . Alors

$$\begin{aligned} & \alpha f(m-r) + \beta f(m) + \gamma f(m+r) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)f(m) + (\gamma - \alpha)f'(m)r + (\gamma + \alpha)f^{(2)}(m) \frac{r^2}{2} \\ & \quad + (\gamma - \alpha)f^{(3)}(m) \frac{r^3}{6} + \alpha R(m-r) + \gamma R(m+r). \end{aligned}$$

1. Dans un développement d'agrégation, on pourra utiliser directement les coefficients  $1/6, 2/3, 1/6$ . Ce qui suit permet de voir pourquoi ces coefficients ont été choisis.

Le but est que le coefficient devant chaque terme de petit degré soit le même que dans la formule intégrale. Si  $\alpha + \beta + \gamma = 2r$  et  $\alpha = \gamma = \frac{r}{3}$ , cette équation devient

$$\frac{r}{3}f(m-r) + \frac{4r}{3}f(m) + \frac{r}{3}f(m+r) = 2rf(m) + f^{(2)}(m)\frac{r^3}{3} + \frac{r}{3}R(m+r) + \frac{r}{3}R(m-r),$$

où  $|R(m-r)|, |R(m+r)| \leq \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{r^4}{24}$ . En comparant avec l'intégrale, il vient finalement

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{\beta-\alpha}{6}f(\alpha) - \frac{2(\beta-\alpha)}{3}f(m) - \frac{\beta-\alpha}{6}f(\beta) \right| &\leq \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{r^5}{60} + \frac{2r}{3} \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{r^4}{24} \\ &= \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{2r^5}{45} \\ &= \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{(\beta-\alpha)^5}{720}. \end{aligned}$$

Finalement, on applique cela à chaque intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  de longueur  $\frac{b-a}{n}$ , et on somme sur  $k$  :

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(t_k) + 4f(\frac{t_{k+1}+t_k}{2}) + f(t_{k+1})}{6} - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{(b-a)^5}{720n^4}. \quad \square$$

### Remarque 5.16.

La stratégie présentée ci-dessus est simple et robuste. Une analyse plus fine [Gou, Exercice 5 p. 79] permet d'améliorer le terme d'erreur d'un facteur 4 :

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(t_k) + 4f(\frac{t_{k+1}+t_k}{2}) + f(t_{k+1})}{6} - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{(b-a)^5}{2880n^4}.$$

### Exemple 5.17.

Cherchons à intégrer la fonction  $f(x) = e^{2x}$  sur  $[-1, 1]$  :

- ▷ La méthode des rectangles fournit une erreur majorée par  $\|f'\|_{\infty} \frac{(b-a)^2}{2n} = \frac{4e}{n}$ .
- ▷ La méthode des trapèzes fournit une erreur majorée par  $\|f^{(2)}\|_{\infty} \frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{8e}{3n^2}$ .
- ▷ La méthode de Simpson fournit une erreur majorée par  $\|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{(b-a)^5}{2880n^4} = \frac{8e}{45n^4}$ .

Ainsi, pour obtenir une estimation à  $10^{-12}$  près de cette intégrale, il faut environ  $1,1 \times 10^{13}$  termes pour la méthode des rectangles (ce qui n'est pas réaliste),  $2,7 \times 10^6$  termes pour la méthode des trapèzes (ce qui est raisonnablement rapide), et 840 termes pour la méthode de Simpson (ce qui est immédiat).

La méthode de Simpson est la première d'une longue famille de méthode d'approximation numériques d'intégrales, utilisant des développements de Taylor à des ordres plus élevés (et donc plus de points, avec des pondérations plus compliquées), voire des algorithmes adaptatifs (utilisant des pas plus petits là où la fonction varie plus vite)...

## 6 Intégrales impropres

Une fonction  $f$  peut être définie sur un intervalle sans être continue par morceaux sur celui-ci. Ceci peut arriver même si  $f$  est continue ! Deux exemples sont possibles :

- ▷ L'une des bornes de l'intervalle est infinie (et donc l'intervalle ne peut pas être un segment).
- ▷ L'une des bornes de l'intervalle est finie, mais  $f$  n'a pas de limite finie en ce point (et donc ne peut pas être prolongée en une fonction continue par morceaux sur un segment).

Dans ces deux cas, on définira l'intégrale comme une limite spatiale d'intégrales de fonctions continues par morceaux sur des segments.

## 6.1 Définition

Commençons par le cas d'une fonction qui pose problème en une extrémité d'un intervalle.

### Définition 6.1.

Soit  $I = [a, b)$  un intervalle semi-ouvert (potentiellement,  $b = +\infty$ ). Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  telle que, pour tout  $c \in [a, b)$ , la restriction de  $f$  à  $[a, c]$  soit continue par morceaux.

Si la limite

$$\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(t) \, dt$$

existe et est réelle, alors on définit

$$\int_a^b f(t) \, dt := \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(t) \, dt.$$

et on dit que cette intégrale est **convergente**. Sinon, on dit que cette intégrale est **divergente**.

La bonne classe de fonctions à considérer est celle de fonctions n'ayant qu'un nombre fini de discontinuités sur chaque segment. Cela inclut les fonctions n'ayant qu'un nombre fini de discontinuités sur  $[a, b)$ , mais aussi certains exemples ayant un nombre infini de discontinuité.

Par abus de vocabulaire, on dira encore qu'une fonction **continue par morceaux** sur tout segment de d'un intervalle  $I$  est continue par morceaux sur  $I$ .

### Exemple 6.2.

Sur un segment, cette définition de la continuité par morceaux coïncide avec la précédente.

La fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  et valant  $1/(n+1)$  sur chaque intervalle  $[n, n+1)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Exemple 6.3.

On peut ainsi définir (si elle existe)

$$\int_0^1 \sin(1/t) \, dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \sin(1/t) \, dt.$$

L'intégrale n'est pas alors définie pour toutes les fonctions continues par morceaux sur  $[a, b)$ . Cependant, quand elle est définie, elle satisfait les propriétés habituelles :

- ▷ L'intégrale est linéaire : si les intégrales de  $f_1, f_2$  convergent et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors l'intégrale de  $f_1 + \lambda f_2$  converge et  $\int_a^b (f_1 + \lambda f_2)(t) \, dt = \int_a^b f_1(t) \, dt + \lambda \int_a^b f_2(t) \, dt$ .
- ▷ L'intégrale d'une fonction positive est positive.
- ▷ L'intégrale satisfait la relation de Chasles.

Sur un intervalle ouvert  $(a, b)$ , on choisit un point  $x_0$  et définit alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \, dt &= \int_a^{x_0} f(t) \, dt + \int_{x_0}^b f(t) \, dt \\ &= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{x_0} f(t) \, dt + \lim_{d \rightarrow b^-} \int_{x_0}^d f(t) \, dt, \end{aligned}$$

si ces deux limites existent. D'après la relation de Chasles, si cette limite existe pour un point  $x_0 \in (a, b)$ , alors elle existe pour tout point  $x_0 \in (a, b)$ , et sa valeur ne dépend pas de  $x_0$ .

On peut de même définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un nombre fini d'intervalles.

**Attention :** Il faut bien que les deux limites existent séparément. Par exemple, on ne définit pas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T x \, dx = 0.$$

Il y a finalement assez peu de choses à dire sur les intégrales impropres.

**Lemme 6.4.** *L'ensemble des fonctions dont l'intégrale converge sur un intervalle donné est un espace vectoriel.*

*La relation de Chasles est vérifiée.*

On peut concevoir des énoncés d'intégration par parties ou de changement de variables. Par exemple,

**Proposition 6.5.**

*Soient  $f, g \in C^1([a, b), \mathbb{R})$ . Alors :*

- ▷ *Si  $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t)$  existe, alors  $\int_a^b f'(t)g(t) \, dt$  et  $\int_a^b f(t)g'(t) \, dt$  sont de même nature.*
- ▷ *Si de plus ces deux intégrales convergent, alors*

$$\int_a^b f'(t)g(t) \, dt = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t) - \int_a^b f(t)g'(t) \, dt.$$

Cependant, de tels énoncés sont sans intérêt. La morale sera toujours la même : si on veut faire des intégrations par parties ou des changements de variables avec des intégrales impropres, on procède en deux temps :

- ▷ On se restreint à un segment, et on procède à l'intégration par parties ou au changement de variables sur ce segment.
- ▷ On fait tendre les bornes du segment vers les bornes de  $I$ .

## 6.2 Fonctions positives et comparaisons

**Lemme 6.6.**

*Soit  $g$  une fonction **positive** continue par morceaux sur un intervalle  $I$ .*

*Soient  $f$  continue par morceaux sur  $I$ . Si  $f = O(g)$  et l'intégrale de  $g$  converge, alors l'intégrale de  $f$  converge.*

*Par contraposition : si  $f = O(g)$  et l'intégrale de  $f$  diverge, alors l'intégrale de  $g$  diverge.*

*En particulier, si  $f = \Theta(g)$  ou  $f \sim g$ , alors les intégrales de  $f$  et de  $g$  sont de même nature.*

Ce lemme, ainsi qu'une collection de fonctions intégrables ou non, permet de montrer la convergence ou la divergence de nombreuses intégrales. Sont convergentes :

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} t^\alpha \ln(t)^\beta \, dt & \quad \forall \alpha > -1, \forall \beta \in \mathbb{R} ; \\ \int_0^{1/2} t^{-1} |\ln(t)|^\beta \, dt & \quad \forall \beta < -1 ; \\ \int_2^{+\infty} t^\alpha \ln(t)^\beta \, dt & \quad \forall \alpha < -1, \forall \beta \in \mathbb{R} ; \\ \int_2^{+\infty} t^{-1} \ln(t)^\beta \, dt & \quad \forall \beta < -1. \end{aligned}$$



De même, sont divergentes :

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} t^\alpha \ln(t)^\beta dt & \quad \forall \alpha < -1, \forall \beta \in \mathbb{R} ; \\ \int_0^{1/2} t^{-1} |\ln(t)|^\beta dt & \quad \forall \beta \geq -1 ; \\ \int_2^{+\infty} t^\alpha \ln(t)^\beta dt & \quad \forall \alpha > -1, \forall \beta \in \mathbb{R} ; \\ \int_2^{+\infty} t^{-1} \ln(t)^\beta dt & \quad \forall \beta \geq -1. \end{aligned}$$

### Exercice 6.7.

Que dire de

$$\frac{1}{t \ln(t) \ln(\ln(t))} ?$$

Généralisez les critères ci-dessus.

### 6.2.1 Application 1 : Vitesses de divergence

Dans le cas d'intégrales positives divergentes, on peut de plus comparer les vitesses de divergence.

#### Proposition 6.8.

Soit  $g$  une fonction **positive** continue par morceaux sur un intervalle  $[a, b)$ .

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b)$ . Si  $f \sim_b g$  et si  $\int_a^b g(t) dt$  diverge, alors

$$\int_a^x f(t) dt \sim_{x \rightarrow b-} \int_a^x g(t) dt.$$

*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $c$  tel que  $(1 - \varepsilon)g \leq f \leq (1 + \varepsilon)g$  sur  $[c, b)$ . Alors, pour tout  $x \in [c, b)$  :

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \int_a^x g(t) dt + \int_a^c (f - g)(t) dt & \leq \int_a^x f(t) dt \\ & \leq (1 + \varepsilon) \int_a^x g(t) dt + \int_a^c f(t) dt. \end{aligned}$$

En divisant par  $\int_a^x g(t) dt$  (qui est non nul si  $x$  est suffisamment proche de  $b$ ), pour tout  $x$  suffisamment grand,

$$1 - 2\varepsilon \leq \frac{\int_a^x f(t) dt}{\int_a^x g(t) dt} \leq 1 + 2\varepsilon,$$

ce qui implique la proposition. □

#### Exemple 6.9.

$\sqrt{1+t^2} \sim_{+\infty} t$ , la fonction  $t \mapsto t$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$  et son intégrale diverge, donc

$$\int_0^x \sqrt{1+t^2} dt \sim_{+\infty} \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}.$$

La démonstration de la proposition suivante est laissée en exercice :

**Proposition 6.10.**

Soit  $g$  une fonction **positive** continue par morceaux sur un intervalle  $[a, b)$ .

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b)$ . Si  $f \sim_b g$  et si  $\int_a^b g(t) dt$  converge, alors

$$\int_x^b f(t) dt \sim_{x \rightarrow b-} \int_x^b g(t) dt.$$

**Exemple 6.11.**

$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim_{+\infty} t^{-2/3}$ , la fonction  $t \mapsto t^{-3/2}$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$  et son intégrale sur  $[1, +\infty)$  converge, donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt \sim_{+\infty} \int_x^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

**6.2.2 Application 2 : Comparaisons séries-intégrales**

On peut aussi comparer séries et intégrales. En général, les intégrales sont plus faciles à calculer que les séries; cela permet donc d'encadrer des séries, ou de montrer que des séries sont de même nature que des intégrales.

**Proposition 6.12.**

Soit  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et décroissante. Alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \geq \int_0^n f(t) dt \geq \sum_{k=1}^n f(k).$$

Il faut savoir adapter cet énoncé (si  $f$  est croissante, si  $f$  est définie sur un intervalle du type  $[3, +\infty)$ ...).

**Exercice 6.13.**

Donnez des encadrements des séries suivantes :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}, \alpha > 0; \quad \sum_{k=1}^n k^\alpha, \alpha \geq 0.$$

**Conséquence 6.14.**

Soit  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux, positive et décroissante. Alors la série de terme général

$$f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt$$

converge vers un réel positif.

*Démonstration.*

Les termes de cette série sont positifs, et la somme des  $n$  premiers termes est bornée par  $f(0) - f(n) \leq f(0)$ .  $\square$

**Exemple 6.15.**

L'application la plus connue de ce dernier énoncé est à la fonction  $f(x) = 1/x$  sur  $[1, +\infty)$ . Il implique directement la convergence de la suite

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

vers un réel positif, la **constante d'Euler-Mascheroni**  $\gamma$ . Remarquons que l'on définit parfois cette constante à partir de la suite  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ , ce qui ne change rien car  $\ln(n+1) - \ln(n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ .

## 6.3 Fonctions intégrables

### Définition 6.16.

Soit  $I$  un intervalle. Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux. On dit que  $f$  est **intégrable** (ou **absolument convergente**) sur  $I$  si l'intégrale de  $|f|$  converge.

### Lemme 6.17.

Si  $f$  est intégrable sur  $I$ , alors son intégrale sur  $I$  converge.

Les propriétés suivantes restent vérifiées : stabilité par combinaisons linéaires, linéarité de l'intégrale, positivité sur les fonctions positives, relation de Chasles...

Le produit de deux fonctions intégrables n'est en général pas intégrable.

*Démonstration.*

Posons  $I = [a, b)$  pour simplifier. La convergence de la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  vient de deux faits :

- ▷ D'une part,  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^b |f|(t) dt = 0$ , car cette quantité est la différence entre  $\int_a^x |f|(t) dt$  et sa limite, qui existe.
- ▷ D'autre part, pour tous  $y, y' > x$ , on a  $|\int_y^{y'} f(t) dt| \leq \int_x^b |f|(t) dt$ .

La famille d'intégrales  $(\int_a^x f(t) dt)_{x \geq a}$  est donc de Cauchy, donc converge quand  $x$  tend vers  $b^-$ .  $\square$

### Exercice 6.18.

Construisez une fonction intégrable sur  $[0, +\infty)$ , mais ne convergeant pas vers 0 en  $+\infty$ . Version plus difficile : construisez une telle fonction continue et non bornée.

### Exercice 6.19.

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty), \mathbb{R})$ . Montrez que si  $f'$  est intégrable, alors  $f$  est bornée.

### 6.3.1 Application 3 : Lemme de Riemann–Lebesgue revisité

Grâce à la notion de fonction intégrable, nous pouvons revisiter le lemme de Riemann–Lebesgue.

**Lemme 6.20** (Lemme de Riemann–Lebesgue).

Pour toute fonction  $f$  continue par morceaux et intégrable sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \int_a^b e^{i\xi t} f(t) dt = 0.$$

*Démonstration.*

Comme dans le cadre d'une fonction continue par morceaux sur un segment, on procède par approximation. Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est intégrable, il existe  $M \geq 0$  tel que

$$\int_{-\infty}^{-M} |f(t)| dt + \int_M^{+\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon.$$

Mais alors, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{-M} e^{i\xi t} f(t) dt \right| + \left| \int_M^{+\infty} e^{i\xi t} f(t) dt \right| + \left| \int_{-M}^M e^{i\xi t} f(t) dt \right| \leq \varepsilon + \left| \int_{-M}^M e^{i\xi t} f(t) dt \right|.$$

Or  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \int_a^b e^{i\xi t} f(t) dt = 0$  donc, pour tout  $\xi$  suffisamment grand,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} f(t) dt \right| \leq 2\varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Remarque 6.21.**

Si  $f$  est intégrable, bornée, de classe  $\mathcal{C}^1$  et que sa dérivée est bornée<sup>2</sup>, le lemme de Riemann–Lebesgue se retrouve directement par une intégration par parties. En effet, pour tout  $\xi \neq 0$  et  $M \geq 0$ ,

$$\int_{-M}^M f(t)e^{i\xi t} dt = \left[ \frac{f(t)e^{i\xi t}}{i\xi} \right]_{-M}^M - \frac{1}{i\xi} \int_{-M}^M f'(t)e^{i\xi t} dt.$$

En prenant des valeurs absolues,

$$\left| \int_{-M}^M f(t)e^{i\xi t} dt \right| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{|\xi|} + \frac{1}{|\xi|} \int_{\mathbb{R}} |f'(t)| dt,$$

et le membre de droite converge bien vers 0. Cette technique est utile à connaître pour appliquer les conclusion du lemme de Riemann–Lebesgue à des fonctions suffisamment gentilles, sans avoir à redémontrer le lemme général.

**6.4 Fonctions non intégrables**

Il existe des fonctions non intégrables dont l'intégrale converge néanmoins. Le cas typique est l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt := \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

**Exercice 6.22.** Montrez que l'intégrale converge, mais que la fonction sinus cardinal  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$  n'est pas intégrable, de deux façons différentes :

- ▷ en découpant l'intégrale en morceaux bien choisis ;
- ▷ en procédant à des intégrations par parties. Pour montrer que le sinus cardinal n'est pas intégrable, on pourra utiliser la minoration  $|\sin(t)| \geq \sin(t)^2$ .

La plupart des exemples sont de la même trempe, ou s'y ramènent après des manipulations élémentaires (par exemple un changement de variables). Citons par exemple :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt, \quad \alpha \in (0, 2) ; \quad \int_0^{+\infty} te^{it^\alpha} dt, \quad \alpha > 0,$$

le dernier exemple étant un exemple d'intégrale convergente d'une fonction ne convergeant pas vers 0.

Il existe un critère relativement général (critère d'Abel) couvrant ces exemples. Si  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et décroît vers 0, si  $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $x \mapsto \left| \int_a^x g(t) dt \right|$  est bornée, alors  $\int_a^b f(t)g(t) dt$  converge. Il n'est pas forcément très important de le retenir.

**6.5 Retour sur la convergence en moyenne quadratique**

On dispose toujours de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui a des conséquences intéressantes.

**Proposition 6.23.**

Soit  $I$  un intervalle. Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$  continues par morceaux sur  $I$ .

Si  $f^2$  et  $g^2$  sont intégrables, alors  $fg$  aussi, et  $\left| \int_I fg \right|^2 \leq \int_I |f|^2 \cdot \int_I |g|^2$ .

---

2. Si  $f$  est intégrable et de dérivée bornée, on peut montrer que  $f$  est nécessairement bornée – et mieux, qu'elle converge vers 0 en  $\pm\infty$ . L'hypothèse que  $f$  est bornée est donc ici redondante.

**Exercice 6.24.**

Montrez que si  $f^2$  et  $(f')^2$  sont intégrables, alors  $f$  est bornée (indice : dérivez la fonction  $f^2$ , puis intégrez-la).

Cependant, si  $I$  est non borné, alors les inégalités entre normes  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^1(I,\mathbb{C})}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(I,\mathbb{C})}$  et  $\|\cdot\|_{\infty}$  ne sont plus valables.

**Exercice 6.25.**

Trouver des suites de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  et des fonctions  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telles que :

- ▷  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f$  uniformément mais pas en moyenne quadratique ;
- ▷  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f$  en moyenne quadratique mais pas en moyenne.

## 7 Convergences monotone, convergence dominée, intégration terme à terme

Voir le programme pour les énoncés et la feuille d'exercices pour des applications. **Les énoncés du programme sont à connaître et à savoir appliquer.**

Le théorème de convergence monotone a deux applications principales :

- ▷ Démontrer le théorème de convergence dominée (dans le cadre de la théorie de la mesure) ;
- ▷ Justifier des interversions somme-intégrales pour des séries à termes positifs.

Quelques applications à des suites de fonctions croissantes existent (voir par exemple une application aux intégrales de Wallis dans la feuille d'exercices), et justifient de retenir ce théorème et de vérifier s'il est applicable. Quand il est applicable, il est plus facile de justifier ses hypothèses que celles du théorème de convergence dominée.

Ces théorèmes ont **beaucoup** d'applications en théorie des probabilités, qui sont gênées par le fait que l'on a besoin d'une autre théorie de l'intégration pour la majorité des exemples (qui ne nécessite notamment pas de convergence simple, et permet de travailler avec des fonctions beaucoup plus générales que continues par morceaux).

Nous allons maintenant détailler les applications aux séries de fonctions.

### 7.1 Interversions somme-intégrales

On peut toujours intervertir l'ordre d'une somme finie : étant donnée une famille de nombres complexes  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ ,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

En effet, cela revient à sommer par lignes/colonnes ou par colonnes/lignes sur un rectangle.

Quand les sommes sont infinies, la situation est plus complexe. Il est possible de construire des exemples pour lesquels l'ordre des sommes a de l'importance. Si des exemples donnant lieu à des formes indéterminées (du type  $\infty - \infty$ ) sont faciles à créer, en voici un plus frappant :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

La stratégie est la suivante : on veut que les sommes des lignes soient 1, 0, 0... et les sommes des colonnes soient 0, 0, 0... Pour cela, on commence par fixer la première ligne, puis la première colonne, puis la seconde ligne, etc. L'exemple ainsi obtenu est tel que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij} = 0.$$

Afin de pouvoir intervertir des sommes, ils faut rajouter des conditions supplémentaires. Le même problème se pose avec des interversions sommes-intégrales<sup>3</sup>

Le théorème de convergence monotone fournit un premier critère.

**Théorème 3** (Théorème de convergence monotone, version séries).

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions **positives** et  $S$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ . Supposons que  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$  pour tout  $x \in I$ .

Alors  $S$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n < +\infty$ , et en ce cas,

$$\int_I S(t)dt = \int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Le théorème de convergence dominée fournit un second critère.

**Théorème 7.1** (Théorème de convergence dominée, version séries).

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions à valeurs complexes et  $S$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ . Supposons que

▷  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$  pour tout  $x \in I$  ;

▷ Les sommes partielles  $\sum_{k=0}^n f_k$  sont majorées par une fonction intégrable : il existe une fonction  $g$  intégrable sur  $I$  telle que  $|\sum_{k=0}^n f_k(x)| \leq g(x)$  pour tous  $x \in I$  et  $n \geq 0$ .

Alors  $S$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I S(t)dt = \int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

On ne mémorisera pas ce critère, qui peut être remplacé par le théorème d'intégration terme à terme, plus facile à utiliser et la grande majorité du temps suffisant. Si nécessaire, il vaut mieux savoir le retrouver à partir du théorème de convergence dominée. Quoiqu'il en soit, il y a en gros deux critères assurant l'interversion d'une somme et d'une intégrale :

▷ la **positivité** des termes<sup>4</sup>, via le théorème de convergence monotone ;

▷ la **domination** des sommes partielles<sup>5</sup>, via le théorème de convergence dominée.

Le premier critère est plus facile à utiliser, et à essayer en premier. S'il ne fonctionne pas, essayez le second.

### Exercice 7.2.

Montrez que

$$\int_{-1}^1 e^t dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!},$$

en utilisant dans un premier temps le théorème de convergence dominée, puis le théorème d'intégration terme à terme.

3. Au sens de la théorie de la mesure, les sommes ne sont que des cas particuliers d'intégrales ; il n'est pas étonnant d'avoir une théorie similaire dans les deux cas.

4. C'est une forme du théorème de Fubini-Tonelli.

5. C'est une forme du théorème de Fubini-Lebesgue.

## 7.2 Perte de masse

Discutons brièvement certains cas importants où le théorème de convergence dominée ne s'applique pas. Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions positives intégrables convergeant simplement vers une fonction continue par morceaux  $f$ . Il y a deux phénomènes pouvant faire que  $\int_I f \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$  :

- ▷ La concentration de la masse en un point (ou un ensemble négligeable) ;
- ▷ La fuite de la masse en l'infini.

Le premier phénomène est illustré par exemple par  $f_n := n\mathbf{1}_{(0,1/n]}$ . Toutes les fonctions  $f_n$  sont d'intégrale 1, mais la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle, d'intégrale nulle.

Le second phénomène est illustré par exemple par  $f_n := \mathbf{1}_{(n,n+1]}$ . Toutes les fonctions  $f_n$  sont d'intégrale 1, mais la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle, d'intégrale nulle.

Il peut être intéressant, lors de l'étude d'une suite de fonctions, de tracer les graphes des fonctions  $f_n$  afin de deviner si l'un de ces phénomènes peut être présent. Remarquons au passage que le théorème de convergence dominée est remarquablement précis, en ce qu'il empêche de façon économe les deux types de "perte de masse".

Enfin, pour aller plus loin, le premier type de perte de masse peut être corrigé en travaillant avec des *mesures* au lieu de fonctions. Dans le premier exemple, la suite de fonction  $f_n$  converge vers un Dirac  $\delta_0$ , qui est d'intégrale 1 ; en généralisant les objets limites, on élimine ce défaut. Le second type de perte de masse continue d'exister même dans ce cadre plus général.

## 8 Intégrales à paramètres

Voir le programme pour les énoncés et la feuille d'exercices pour des applications. **Les énoncés du programme sont à connaître et à savoir appliquer.**

Dans ce cadre, on se donne deux intervalles  $I, J$  et une fonction  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ . On s'intéresse aux propriétés, notamment de régularité (continuité, dérivabilité...) de

$$F : x \mapsto \int_J f(x, t) \, dt.$$

**Remarque sur l'énoncé de dérivation :** En pratique, on demande de montrer qu'une telle intégrale est non seulement dérivable, mais  $\mathcal{C}^1$ , ce que n'affirme pas l'énoncé au programme ! De plus, la représentation intégrale de  $F'$  n'est a priori pas définie dans le cadre des fonctions continues par morceaux. On pourra modifier légèrement cet énoncé :

**Théorème 4** (Théorème de dérivation).

Soient  $X$  et  $I$  deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $X \times I$  et à valeurs complexes. Supposons que :

- ▷ pour tout  $x$  dans  $X$ , la fonction partielle  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ .
- ▷ pour tout  $x$  dans  $X$  et  $t \in I$ , la dérivée partielle  $f'_x(x, t)$  existe.
- ▷ continuité en le paramètre : pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f'_x(x, t)$  est continue.
- ▷ **continuité par morceaux des dérivées partielles** : pour tout  $x \in X$ , la fonction  $t \mapsto f'_x(x, t)$  est continue par morceaux sur les segments de  $I$ .
- ▷ domination de la dérivée : il existe une fonction  $g$  intégrable sur  $I$  telle que  $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq g(t)$  pour tous  $x \in X$  et  $t \in I$ .

Soit

$$F : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto \int_I f(x, t) dt \end{cases} .$$

Alors  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $X$ , et pour tout  $x \in X$ ,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

## 8.1 Convergence uniforme sur les compacts

Quand on travaille avec des fonctions définies sur des ouverts, la notion de convergence uniforme est souvent trop forte. On la remplace par exemple par la notion de **convergence uniforme sur les compacts**.

### Définition 8.1.

Soit  $I$  un intervalle réel,  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $(f_n)_{n \geq 0}$  **converge uniformément sur tout compact** vers  $f$  si, pour tout compact  $K \subset I$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Si  $I$  est compact, cela coïncide avec la notion de convergence uniforme. Si  $I = \mathbb{R}$ , il suffit de vérifier la convergence par exemple sur les intervalles de la forme  $[-N, N]$ . Si  $I = \mathbb{R}_+^*$ , on pourra par exemple vérifier la convergence sur les intervalles de la forme  $[1/N, N]$  (ou  $[1/N^2, N]$ , par exemple, si cela s'avère plus pratique).

La continuité étant une notion locale, si  $(f_n)$  converge uniformément sur un compact  $K$  vers  $f$  et toutes les fonctions  $f_n$  sont continues, alors  $f$  est continue sur l'intérieur de  $K$ . En particulier, si  $I$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ , les fonctions  $f_n$  sont continues et la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact vers  $f$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

### Exemple 8.2.

Prenons  $f_x(t) := xt$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Alors la famille de fonction  $(xt)_{x > 0}$  ne converge pas uniformément vers 0 quand  $x$  tend vers 0, mais elle converge uniformément sur tout compact vers 0, donc la fonction nulle est continue.

Pour un exemple plus intéressant, considérer la convergence de  $(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!})_{n \geq 0}$ , ou de séries entières sur leur disque de convergence.

Revenons à nos moutons. La même problématique se pose pour les intégrales à paramètre : en général, l'intégrale sera défini pour des paramètres dans un intervalle ouvert, et on contrôlera mal l'intégrale prêt des bords de cet ouvert. Par exemple, on n'arrivera pas à trouver de fonction de domination valable pour un intervalle ouvert entier. Dans ce cas, on travaillera sur des compacts ;



on montrera que la fonction définie par une intégrale à paramètre sera continue ou  $\mathcal{C}^1$  sur tout compact. Une méthode fréquente consistera donc à :

- ▷ Se restreindre à un segment  $[A, B]$  ;
- ▷ Utiliser les théorèmes du programme pour montrer la continuité sur  $[A, B]$  ;
- ▷ Conclure par le fait que  $[A, B]$  étant arbitraire (ou pouvant être choisi arbitrairement grand), la fonction considérée est continue partout.

## 8.2 Segments

Dans le cas compact, on peut travailler à la main avec le théorème de convergence dominée. Pour simplifier, on se place dans le cadre de fonctions continues.

### Proposition 8.3.

Soit  $f \in \mathcal{C}((a, b) \times [c, d], \mathbb{C})$ . Alors la fonction  $F$  définie sur  $(a, b)$  par

$$F(x) := \int_c^d f(x, t) \, dt$$

est continue.

*Démonstration.*

Il suffit de montrer la continuité de  $F$  sur un segment  $[A, B] \subset (a, b)$ . Or

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_c^d |f(x, t) - f(y, t)| \, dt \leq (d - c)\omega(|x - y|),$$

où  $\omega$  est un module de continuité de  $f$  sur  $[A, B]$ . La fonction  $F$  est donc continue sur  $[A, B]$ , ce qu'il fallait montrer.  $\square$

L'énoncé de dérivation correspondant se montre de façon similaire :

### Proposition 8.4.

Soit  $f \in \mathcal{C}^1((a, b) \times [c, d], \mathbb{C})$  (c'est-à-dire que  $f$  se prolonge en une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur un voisinage de  $(a, b) \times [c, d]$ ). Alors la fonction  $F$  définie sur  $(a, b)$  par

$$F(x) := \int_c^d f(x, t) \, dt$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## 8.3 Application 1 : Fonction Gamma

Le cas typique d'application est celui de la fonction  $\Gamma$ .

### Définition 8.5.

On pose, lorsque l'intégrale de droite converge,

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \, dt.$$

La fonction  $\Gamma$  est définie pour tout  $s$  tel que  $\operatorname{Re}(s) > 0$  ; il est possible de l'étendre par prolongement analytique à  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ . De plus, une récurrence ou un calcul utilisant les fonctions génératrices permet de montrer que, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\Gamma(1 + n) = n!.$$

La fonction  $\Gamma$  permet donc d'étendre la factorielle aux complexes de partie réelle  $> -1$ .

**Proposition 8.6.**

La fonction  $\Gamma$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $(0, +\infty)$ .

*Démonstration.*

Formellement, pour tout  $s > 0$  et tout  $k \geq 0$ ,

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (2)$$

La fonction  $t \mapsto (\ln(t))^k t^{s-1} e^{-t}$  est bien intégrable pour tout  $s > 0$  et tout  $k \geq 0$ . On va démontrer par récurrence que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et que sa dérivée  $k$ -ième est bien donnée par la formule ci-dessus.

Pour  $k = 0$ , il faut seulement montrer la continuité de  $\Gamma$ . On va travailler sur des compacts de  $(0, +\infty)$ . Soient  $0 < A < B$ . Alors :

- ▷ pour tout  $t > 0$ , la fonction  $s \mapsto t^{s-1} e^{-t}$  est continue sur  $[A, B]$ .
- ▷ pour tout  $s \in [A, B]$ , la fonction  $t \mapsto t^{s-1} e^{-t}$  est continue sur  $(0, +\infty)$ .
- ▷ pour tous  $s \in [A, B]$  et  $t > 0$ ,

$$|t^{s-1} e^{-t}| \leq t^{A-1} e^{-t} \mathbf{1}_{(0,1]}(t) + t^{B-1} e^{-t} \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(t),$$

et la fonction de droite est intégrable sur  $(0, +\infty)$ .

Par le théorème de convergence dominée, la fonction  $\Gamma$  est continue sur  $[A, B]$ . L'intervalle  $[A, B]$  étant arbitraire, la fonction  $\Gamma$  est continue sur  $(0, +\infty)$ .

Montrons maintenant l'hérédité. Soit  $k \geq 0$ . Supposons que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et que  $\Gamma^{(k)}$  est donnée par l'Équation (2). Fixons encore une fois  $0 < A < B$ . Alors :

- ▷ pour tout  $s \in [A, B]$ , la fonction  $t \mapsto (\ln(t))^k t^{s-1} e^{-t}$  est intégrable sur  $(0, +\infty)$ .
- ▷ pour tous  $s \in [A, B]$  et  $t > 0$ , la dérivée partielle  $\frac{\partial (\ln(t))^k t^{s-1} e^{-t}}{\partial s}(s, t) = (\ln(t))^{k+1} t^{s-1} e^{-t}$  existe.
- ▷ pour tout  $t > 0$ , la fonction  $s \mapsto (\ln(t))^{k+1} t^{s-1} e^{-t}$  est continue.
- ▷ pour tout  $s \in [A, B]$ , la fonction  $t \mapsto (\ln(t))^{k+1} t^{s-1} e^{-t}$  est continue par morceaux sur  $(0, +\infty)$ .
- ▷ pour tous  $s \in [A, B]$  et  $t > 0$ ,

$$|\ln(t)^{k+1} t^{s-1} e^{-t}| \leq |\ln(t)|^{k+1} t^{A-1} e^{-t} \mathbf{1}_{(0,1]}(t) + |\ln(t)|^{k+1} t^{B-1} e^{-t} \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(t),$$

et la fonction de droite est intégrable sur  $(0, +\infty)$ .

Donc  $\Gamma^{(k)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[A, B]$ , et sa dérivée est donnée par l'Équation (2). L'intervalle  $[A, B]$  étant arbitraire, l'hérédité est démontrée.  $\square$

**Remarque 8.7.** On peut montrer (ce n'est pas évident !) que  $\Gamma'(1) = -\gamma$  est la constante d'Euler-Mascheroni.

**Application 2 : Transformée de Laplace****Définition 8.8.**

Soit  $f : [0, +\infty)$  continue par morceaux. On pose, lorsque l'intégrale de droite converge,

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt.$$

La fonction  $\mathcal{L}$  est la **transformée de Laplace** de  $f$ .

**Proposition 8.9.**

Si  $f$  est bornée, alors  $\mathcal{L}(f)$  est définie et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $(0, +\infty)$ .

Plus généralement, s'il existe  $\Lambda > 0$  et  $C > 0$  telles que  $f(t) \leq Ce^{\Lambda t}$  pour tout  $t$ , alors  $\mathcal{L}(f)$  est définie sur  $(\Lambda, +\infty)$  et  $\mathcal{C}^\infty$  sur cet intervalle.

**Exercice 8.10.**

Calculez  $\mathcal{L}(\sin)$ ,  $\mathcal{L}(\cos)$  et  $\mathcal{L}(e_\alpha)$ , où  $e_\alpha(t) = t^\alpha$  et  $\alpha > -1$ .

**Exercice 8.11.**

Quel lien y a-t-il entre  $\mathcal{L}(f)$  et  $\mathcal{L}(f')$ , où  $f : [0, +\infty)$  est  $\mathcal{C}^1$  de dérivée bornée ?

**8.3.1 Comportement en l'infini****Exercice 8.12.**

Montrez que, si  $f$  est continue et bornée, alors

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) =_{+\infty} \frac{f(0)}{\lambda} + o(1/\lambda)$$

**Exercice 8.13.**

Montrez que, si  $f$  est intégrable, alors

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \mathcal{L}(f)(0).$$

**8.3.2 Comportement en l'origine****Exercice 8.14.**

Montrez que, si  $f$  a une limite finie en l'infini, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \mathcal{L}(f)(\lambda).$$

**Exercice 8.15.**

Montrez que, si  $f$  est bornée et  $L := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds$  existe, alors

$$L = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \mathcal{L}(f)(\lambda).$$

**Exercice 8.16.**

Soit  $\alpha > -1$  et  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrez que, si  $f(t) \sim_{+\infty} t^\alpha$ , alors

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) \sim_0 \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\lambda^{1+\alpha}}.$$

**8.4 Application 3 : Transformée de Fourier****Définition 8.17.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable. On pose, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi t} f(t) dt.$$

La fonction  $\hat{f}$  est la **transformée de Fourier** de  $f$ .

**Attention :** il y a différentes normalisations de la transformée de Fourier (intégrale de  $e^{-i\xi t}f(t)$ , voire de  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\xi t}f(t)$ ). Vérifiez toujours les conventions utilisées !

De plus,  $\hat{f}$  peut être défini pour des fonctions non intégrables, ou pour des paramètres complexes.

**Intuition :** En général, la transformée de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini. Si  $f$  est très régulière, alors  $\hat{f}$  décroît très vite à l'infini ; réciproquement, si  $f$  décroît très vite à l'infini, alors  $\hat{f}$  est très régulière.

**Lemme 8.18.**

Soit  $f$  une fonction intégrable. Alors  $\hat{f}$  est continue, tend vers 0 en  $\pm\infty$ , et

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})}.$$

Le premier item est une conséquence directe de la continuité des intégrales à paramètre, le second une extension du lemme de Riemann-Lebesgue aux fonctions intégrables, et le troisième une inégalité simple.

**Exercice 8.19.** Soit  $k \geq 0$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $f, f', \dots, f^{(k)}$  soient intégrables.

1. Montrez que  $f, f', \dots, f^{(k-1)}$  convergent vers 0 en l'infini.
2. Montrez par intégration par parties que, pour tout  $\xi \neq 0$ ,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^k \xi^k} \widehat{(f^{(k)})}(\xi).$$

3. Concluez en montrant que  $\hat{f}(\xi) = o(\xi^{-k})$  en  $\pm\infty$ .

**Exercice 8.20.**

Soit  $k \geq 0$ . Soit  $f$  une fonction telle que  $x \mapsto (1 + |x|^k)f(x)$  soit intégrable. Montrez que  $\hat{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , et que

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi t} (-2\pi i t)^k f(t) dt.$$

## 8.5 Application 4 : Produit de convolution

**Définition 8.21.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  bornée (les deux fonctions sont continues par morceaux sur les segments). On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f \star g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

On définit de même  $f \star g$  quand  $f$  est bornée et  $g$  intégrable, ou encore quand  $f^2$  et  $g^2$  sont tous deux intégrables.

**Remarque 8.22.**

On a respectivement, dans ces trois cas,

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_{\infty} &\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})} \|g\|_{\infty}, \\ \|f \star g\|_{\infty} &\leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})}, \\ \|f \star g\|_{\infty} &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})}. \end{aligned}$$

**Remarque 8.23.**

On peut définir  $f \star g$  dans un cadre plus général, mais il faut alors une théorie plus générale de l'intégration. Par exemple, si  $f$  et  $g$  sont intégrables, alors formellement  $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$  (cette inégalité est satisfaite si  $f$  et  $g$  sont continues par morceaux sur des segments), mais la fonction  $f \star g$  peut ne pas être définie partout (prendre par exemple  $f(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ ).

**Remarque 8.24.**

Par un changement de variables, dans tous ces cas,  $f \star g = g \star f$ .

Les théorèmes de dérivation sous l'intégrale permettent de montrer qu'en général, la régularité de  $f \star g$  est la "somme des régularités" de  $f$  et de  $g$ . Nous donnons (sans démonstration) deux énoncés possibles.

**Proposition 8.25.**

Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Supposons que  $f$  est intégrable et  $g, g', \dots, g^{(k)}$  sont continues bornées. Alors  $f \star g$  est bien définie, de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$ , et

$$(f \star g)^{(k)} = f \star g^{(k)}.$$

**Proposition 8.26.**

Soit  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  et  $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  à support compact. Alors  $f \star g$  est bien définie, de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$ , et

$$(f \star g)^{(k)} = f \star g^{(k)}.$$

## 9 Références

[FGN·Ana2] : *Oraux X-ENS. Analyse 2*. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.

[Gou] : *Les maths en tête, Analyse*. X. Gourdon.