Leçon 209 : Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.

Prérequis : Théorème des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis. Théorème de Rolle.

Dans toute la leçon, I désigne un segment réels non réduit à un point, k et n des entiers naturels. On munit $\mathbb{R}^k$ d'une norme.

Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young est un résultat local au voisinage d'un point a. Elle fournit des résultats asymptotiques (typiquement des développements limités).

Théorème (Formule de Taylor-Young) : Soit $f : I \to \mathbb{R}^k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I. Soit $a \in I$ un point tel que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a. Alors

$$f(a+h) =_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Remarque : Pour $n = 1$, on retrouve la définition de la dérivabilité en un point a.

Remarque : Cette formule reste vraie pour des fonctions à valeurs dans des espaces vectoriels réels normés.

Applications élémentaires :

- ▷ Obtention de développements limités. Par exemple,

$$\sin(x) =_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

- ▷ Calcul de limites. Par exemple,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = 2.$$

- ▷ Équivalence de suites. Par exemple, en posant $u_n = 2^n \sin(2^{-n}\pi)$, on calcule $u_n = \pi + o(2^{-n})$, et ainsi on obtient des approximations de π.

Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

Cette formule se démontre naturellement par récurrence, et permet de retrouver aisément les autres formules de Taylor (inégalité de Taylor-lagrange, formule de Taylor-Lagrange), au moins dans le cas de fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème (Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(b-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

Remarque : Cette formule reste vraie pour des fonctions à valeurs dans des espaces de Banach.

Inégalité de Taylor-Lagrange

L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de majorer globalement l'erreur dans la formule de Taylor-Young. Elle se déduit directement de la version avec reste intégral en majorant le reste.

Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange) : Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$. Alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq \left\| f^{(n)} \right\|_\infty \frac{|b-a|^n}{n!}.$$

La formule reste vraie si $b < a$ et $f : [b,a] \to E$.

Application élémentaire [Gou, Exercice 1 p. 77] : Obtenir des encadrements, par exemple

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Remarque : L'inégalité de Taylor-Lagrange reste vraie pour des fonctions f à valeurs dans des espaces vectoriels réels normés, de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a,b]$ et telles que $f^{(n-1)}$ soit dérivable sur (a,b). La démonstration en est cependant *nettement* plus compliquée.

Formule de Taylor-Lagrange

Il s'agit d'une version du type "théorème des accroissements finis" de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral [1] qui suit.

Théorème (Formule de Taylor-Lagrange) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$. Alors il existe $\xi \in (a,b)$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + f^{(n)}(\xi)\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Remarque : Pour $n = 1$, ce théorème est exactement la formule des accroissements finis. Tout comme ce dernier, la formule de Taylor-Lagrange ne s'applique qu'aux fonctions à valeurs réelles ; la fonction $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ fournit un contre-exemple en dimension 2.

Remarque : La formule de Taylor-Lagrange reste vraie pour des fonctions f de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a,b]$ et telles que $f^{(n-1)}$ soit dérivable sur (a,b). La démonstration en est un peu plus compliquée.

Développements possibles

0.1 Formule de Taylor-Young

Points de rebroussement : Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée d'image Γ. Soit $x \in I$ et $M := f(x)$. Soit $p \geq 1$ le plus petit entier tel que $f^{(p)}(x) \neq 0$ et $q > p$ le plus petit entier tel que $f^{(p)}(x)$ et $f^{(q)}(x)$ sont non liés. Alors $f^{(p)}(x)$ est le vecteur tangent à Γ en M. Par le théorème de Taylor-Lagrange,

$$f(x+h) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}h^p + \frac{f^{(q)}(a)}{q!}h^q + o(h^q) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}h^p \left(1 + \frac{p! f^{(q)}(a)}{q! f^{(p)}(a)}h^q + o(h^{(q-p)})\right).$$

1. À de modestes changements d'hypothèses près, elle n'a pas d'avantage significatif par rapport à la formule de Taylor–Lagrange avec reste intégral.

0.2 Formule de Taylor-Lagrange

Étude asymptotique de la méthode des rectangles : Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Trouvez un développement asymptotique de $(u_n)_{n\geq 1}$ à l'ordre $o(1/n^2)$.

Ce développement admet de nombreuses variantes, visant à déterminer l'erreur dans différentes méthodes d'intégration numérique : méthode des trapèzes, méthodes de Simpson, méthode de Newton [Gou, Exercice 5 p. 81]...

Caractérisation des fonctions polynômes [Moi, Exercice 3 p. 131] : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Supposons que, pour tout $x \in [a,b]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Alors f est une fonction polynôme.

0.3 Inégalité de Taylor-Lagrange

Inégalités de Kolmogorov [Gou, ex. 8 p. 84 ; Moi, Exercice 6 p. 139 ; FGN·Ana1, Exercice 4.43, Ska, Exercice 7.33] : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$. Supposons que f et $f^{(n)}$ soient bornées. Alors, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, la fonction $f^{(k)}$ est bornée. En particulier, en posant $M_k := \sup_{\mathbb{R}} |f^{(k)}|$,

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

0.4 Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

Théorème de Bernstein pour les séries entières [Ska, Exercice 6.9] : Soient I un intervalle ouvert et $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$. Supposons que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors f est développable en série entière sur I : pour tout $a \in I$, il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Théorème de division [FGN·Ana1, Exercice 4.44] : Soient I un intervalle ouvert, $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Supposons qu'il existe $0 \leq p \leq n$ tel que $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p-1)}(a) = 0$. Alors il existe $g \in \mathcal{C}^{n-p}(I,\mathbb{R})$ telle que $f(x) = (x-a)^p g(x)$ pour tout $x \in I$.

Les développements mentionnés pour la formule de Taylor-Lagrange peuvent aussi être menés à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

Références

[FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Algèbre 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Gou] : *Les maths en tête, Analyse.* X. Gourdon.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.

La présentation, en l'absence d'autre mention, est tirée de **[Ska, Chapitre VII.2.6]**.