Leçon 212 : Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples

Dans toute la leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Séries formelles

Définition : On appelle **série formelle** de variable réelle (respectivement, complexe) toute suite de réels (respectivement, de complexe), que l'on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$. La **série entière** associée est la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où x est une variable réelle (respectivement, complexe), définie là où cette série converge simplement.

Convergence

0.1 Disque de convergence

Définition : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pose

$$R := \sup\{r \geq 0,\ (a_n r^n)_{n\geq 0} \text{ est bornée}\}. \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Alors R est appelé le **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et $B(0,R)$ le **disque de convergence** de cette série entière.

Exemple : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière et R son rayon de convergence.
- ▷ Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est bornée alors $R \geq 1$.
- ▷ Si $(a_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0 alors $R \leq 1$.

Exemple : Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n) x^n$ est 1.

Proposition : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
- ▷ Pour tout $r < R$, la série de fonctions converge normalement sur $\overline{B}(0,r)$.
- ▷ La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in B(0,R)$.
- ▷ La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ diverge si $|x| > R$.

Corollaire : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors cette série est continue sur $B(0,R)$.

Le comportement au bord du disque de convergence est beaucoup plus délicat.

0.2 Calcul du rayon de convergence

Proposition : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors les rayons de convergence des la séries $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ sont égaux.

Proposition (Règle de Cauchy) : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite. Si la limite $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} =: \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ existe, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$, avec les conventions $1/0 = +\infty$ et $1/(+\infty) = 0$.

Proposition (Règle de d'Alembert) : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite ne s'annulant pas. Si la limite $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ existe, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$, avec les conventions $1/0 = +\infty$ et $1/(+\infty) = 0$.

Exemple : Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$; le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n$ est 2.

Comportement au bord du disque de convergence

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| R^n < +\infty$, alors la série entière converge normalement sur $\overline{B}(0,R)$. Si $(a_n R^n)$ ne converge pas vers 0, alors la série entière diverge grossièrement en tout point du bord du disque de convergence. Dans les cas intermédiaires, on peut utiliser par exemple le théorème d'Abel.

Théorème : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que la suite $(a_n R^{-n})_{n\geq 0}$ soit positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$ et $z \neq R$.

Théorème (Critère d'Abel radial) : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R < +\infty$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge, alors elle converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$. En particulier, cette série est continue sur le segment $[0, z_0]$.

Exemple : Calcul des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$ n'admet pas de prolongement continu à un ouvert connexe strictement plus grand que $B(0,1)$ **[Sk]**.

Opérations sur les séries entières

Définition : On définit les trois opérations suivantes sur les séries formelles :

- ▷ Somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n := \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) X^n$.
- ▷ Produit de Cauchy : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n\right) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X^n$, où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
- ▷ Dérivée : La série dérivée de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ est $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} X^n$.

Ces définitions sont purement algébriques, et ne préjugent pas de la convergence de ces séries. Elles ne sont pas non plus exhaustives : on peut définir une multiplication par un scalaire, une primitive nulle en 0...

0.3 Somme

Proposition : Soient $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a, R_b.

- ▷ La série $a + b$ a pour rayon de convergence $R_{a+b} \geq \min\{R_a, R_b\}$;
- ▷ $R_{a+b} = \min\{R_a, R_b\}$ si $R_a \neq R_b$;
- ▷ Pour tout $z \in B(0, \min\{R_a, R_b\})$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$.

0.4 Produit

Proposition : Soient $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a, R_b. et c leur produit de Cauchy. Alors :

- ▷ La série c a pour rayon de convergence $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$;
- ▷ Pour tout $z \in B(0, \min\{R_a, R_b\})$, on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.

0.5 Dérivée

Dans ce qui suit, on fixe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $x \in B(0,R)$, on pose $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Proposition : La fonction f est dérivable sur $B(0,R)$, et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ pour tout $x \in B(0,R)$. La série dérivée a le même rayon de convergence.

Conséquence : La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $B(0,R)$, et $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$ pour tout $x \in B(0,R)$.

Conséquence : Les coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positifs sont déterminées par ses valeurs : $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ pour tout $n \geq 0$.

Proposition : La série $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ a le même rayon de convergence, est dérivable sur $B(0,R)$, et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in B(0,R)$.

Applications

De nombreuses applications sont présentes dans [**FGN**] et [**Moi**].
Attention : De nombreuses interactions avec d'autres domaines des mathématiques ; penser à préparer des développements commun à d'autres leçons.

0.6 Probabilités : Fonctions génératrices

Définition : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n := \mathbb{P}(X = n)$. On appelle **fonction génératrice** de X l'application G définie par $G(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

Théorème : X admet une espérance si et seulement si G' a une limite à gauche en 1. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G'(1)$.
X admet une variance si et seulement si $G^{(2)}$ a une limite à gauche en 1. Dans ce cas, $G^{(2)}(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.

Application : Calcul de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli, d'une loi de Poisson [**ESC**] ou [**GK, Chapitre 9**]. Calcul des moments d'une variable aléatoire de loi normale centrée.

0.7 Analyse : Résolution d'équations différentielles

On suppose qu'une solution développable en série entière d'une équation différentielle existe, puis on montre que sont rayon de convergence est strictement positif.

Exemple : Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$. Déterminer une formule explicite de cette solution.

Exemple : Soit $J_0(x) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin(t))\, \mathrm{d}t$. Montrer que J_0 est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$. Déterminer son développement en série entière [**Moi, E-4**].

0.8 Combinatoire : Calcul de suites

Exemple : Calcul des nombres de Catalan [**FGN**].

Exemple : Calcul des nombres de partitions, des nombres d'arbres [**Moi, E-6 et E-7**].

Références

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation – Analyse et probabilités.* Dantzer.
[Esc] : *Probabilités et statistiques.* Escoffier.
[FGN] : *Exercices de mathématiques des oraux de l'Ecole polytechnique et des Ecoles normales supérieures. Algebre-Analyse.* Francinou, Gianella, Nicolas.
[GK] : *De l'intégration aux probabilités.* Garet, Kurtzmann.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Suites et séries de fonctions.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Ska] : *Analyse.* Skandalis.

Pour les développements, voir en particulier [**FGN**] et [**Moi**]. Les textes [**Esc**] et [**GK**] permettent éventuellement de compléter les applications aux probabilités.

Autres développement possibles (liste non exhaustive) :
- ▷ Critère d'analiticité et principe des zéros isolés [Moi, p. 88].
- ▷ Séries de Taylor ayant un rayon de convergence nul [Moi, p. 87].
- ▷ Application aux équations différentielles [Moi, p. 91].
- ▷ Identités combinatoires [Moi, p. 94].