Équations différentielles. Notes de cours.

Table des matières

Le but de ce document est de revenir sur le théorème de Cauchy-Lipschitz [1] affirmant l'existence et l'unicité de solutions à certaines équations différentielles.

1 Équations linéaires, équations affines d'ordre 1

1.1 Théorème de Cauchy : Équations d'ordre 1 affine

Le principal théorème dans le cadre des équations différentielles affines est :

Théorème 1 (Théorème de Cauchy affine)**.**
Soit I un intervalle. Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues, $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y'(t) & = & A(t)Y(t) + B(t) \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur I.

L'Équation (1) est une équation différentielle d'ordre 1 (il n'y a pas de dérivée d'ordre supérieure) affine en dimension finie. Une telle équation est dite :
- ▷ **homogène** si $B = 0$.
- ▷ **à coefficients constants** ou **autonome** si A et B ne dépendent pas du temps t.

L'équation $Y(t_0) = Y_0$ est la **condition initiale** de l'équation.

Remarque 1.1.
L'écriture $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ est une écriture matricielle. Les équations différentielles sont souvent écrites sous formes de système. Par exemple, l'équation matricielle

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1-t \\ -3e^t & 0 \end{pmatrix} X(t)$$

est équivalent au système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2tx(t) + (1-t)y(t) \\ y'(t) & = & -3e^t x(t) \end{array} \right. .$$

Remarque 1.2.
Le cas général du théorème de Cauchy se déduit du cas homogène ! Il suffit de rajouter une coordonnée y_{-1}, telle que $y_{-1}(0) = 1$ et $y'_{-1}(t) = 0$. Le terme $b(t)$ peut alors se réécrire $b(t)y_{-1}(t)$. Cette astuce est analogue à celle permettant de plonger le groupe affine de $\mathbb{R}^n$ dans le groupe linéaire de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque 1.3.
Il est important que I soit un intervalle. Par exemple, si I est l'union de deux intervalles ouverts disjoints I_1 et I_2 et $t_0 \in I_1$, alors les conditions initiales (valeurs en t_0) n'apportent aucune information sur les valeurs des solutions sur I_2. L'équation différentielle admet alors une infinité de solutions. Ce problème est d'autant plus sévère que I a de nombreuses composantes connexes.

1. Ou théorème de Cauchy, ou de Picard, ou de Picard-Lidelöf...

1.2 Structure de l'espace des solutions

Considérons une équation **homogène** sans condition initiale :

$$Y'(t) = A(t)Y(t).$$

Soit $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des solutions de cette équation. Alors $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel. Le théorème de Cauchy affine permet d'être plus précis. Soit $t_0 \in I$. Alors il existe une application

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}),$$

qui à $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ associe l'unique solution de l'équation différentielle Y telle que $Y(t_0) = Y_0$. Cette application Φ est linéaire et injective, et son image est l'ensemble $\mathcal{S}_0$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ est donc de dimension n, et Φ en offre une paramétrisation ; résoudre cette équation, c'est paramétrer $\mathcal{S}$. Remarquons cependant que Φ n'est pas *canonique* : elle dépend de t_0.

Considérons mantenant une équation avec second membre et sans condition initiale :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t).$$

Soient $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de cet équation, et Y_1, $Y_2 \in \mathcal{S}$. Alors $Y_2 - Y_1$ est solution de l'équation homogène associée

$$Y'(t) = A(t)Y(t).$$

Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de ce système homogène. Alors $\mathcal{S} = Y_1 + \mathcal{S}_0$. Autrement dit, l'espace des solutions d'une équation différentielle affine est un espace affine dont la direction est l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

Pour résoudre l'équation avec second membre, on procède en général en deux étapes :

- ▷ Résolution de l'équation homogène (détermination de $\mathcal{S}_0$) ;
- ▷ Recherche d'une solution particulière Y_1.

Il n'y a pas de stratégie générale pour obtenir des expressions explicites des solutions d'équation linéaires affines. Deux cas particuliers sont importants :

- ▷ Les équations différentielles affines en dimension 1 ;
- ▷ Les équations différentielles à coefficients constants en toute dimension.

que nous allons maintenant aborder.

1.3 Dimension 1 : Équations à coefficients constants

Commençons par les équations linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. Soient a, t_0, y_0 trois réels. L'équation :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & ay(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. ,$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a une unique solution :

$$u(t) = y_0 e^{t-t_0} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y'(t) = ay(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel de dimension 1.

Si l'on rajoute un second membre (et un paramètre réel b) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & ay(t) + b \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. ,$$

l'équation différentielle a toujours une unique solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'ensemble des solutions dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$y'(t) = ay(t) + b \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

est une droite affine. En effet, étant donnée une solution particulière u_0 (par exemple $u_0(t) = -b/a$ si $a \neq 0$, et $u_0(t) = bt$ si $a = 0$), l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions qui sont somme de u_0 et d'une solution de l'équation homogène associée.

1.4 Dimension 1 : Équations affines générales

Soit I un intervalle ouvert. Tout ce qui précède reste valable si l'on remplace les réels a et b par des fonctions continues a, $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. L'équation

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & a(t)y(t) \quad \forall t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. ,$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, a une unique solution :

$$u(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} \quad \forall t \in I.$$

Si de plus a est de classe $\mathcal{C}^k$, alors u est automatiquement de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Plus généralement, l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad \forall t \in I$$

est encore une fois un espace vectoriel de dimension 1.

Remarque 1.4.
L'existence et l'unicité d'une telle solution, dans ce cadre, peut se démontrer à la main. L'existence est évidente : il suffit de montrer que la formule exhibée convient.

Montrons l'unicité. Soit y une solution de cette équation. Posons $z : t \mapsto y(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s}$. Alors z est de classe $\mathcal{C}^1$, et, pour tout $t \in I$,

$$z'(t) = y'(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} - a(t)z(t) = a(t)y(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} - a(t)z(t) = a(t)z(t) - a(t)z(t) = 0.$$

Comme I est un intervalle, z est la fonction constante égale à $z(t_0) = y_0$. Ainsi, $y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} = u(t)$ pour tout $t \in I$.

De même, l'équation

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & a(t)y(t) + b(t) \quad \forall t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. ,$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, a une unique solution, et l'ensemble des solutions sans condition initiale fixée est une droite affine. La seule difficulté consiste à trouver une solution particulière. Cela se fait à l'aide de la méthode de la **variation de la constante**. Remarquons que l'ensemble des solutions de l'équation $y'(t) = a(t)y(t)$ est

$$\{Ce^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s},\ C \in \mathbb{R}\}. \tag{2}$$

Cherchons une solution de la forme $u(t) = C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s}$, où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} C'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} + a(t)C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} &= a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} + b(t) \\ C'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} &= b(t) \\ C'(t) &= b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

Pour simplifier, choisissons la solution telle que $C(t_0) = 0$. En intégrant, on trouve

$$\begin{aligned}
C(t) &= \int_{t_0}^{t} b(x) e^{-\int_{t_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x, \\
u(t) &= y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} + \int_{t_0}^{t} b(x) e^{-\int_{t_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} \\
&= y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} + \int_{t_0}^{t} b(x) e^{\int_{x}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Remarque 1.5.
En pratique, il faut retenir la démarche, pas la formule finale !

Exercice 1.6.
Considérons l'équation différentielle :

$$(t+1)y'(t) + ty(t) = (t+1)^2$$

Décrivez l'ensemble de ses solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(-\infty, -1)$ et sur $(1, \infty)$. Déduisez-en l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de cette équation.

Exercice 1.7.
Démontrez l'unicité de la solution $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ de l'équation avec second membre

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y'(t) & = & a(t)y(t) + b(t) & \forall t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0 & \end{array} \right. .$$

1.5 Toute dimension : Équations linéaires à coefficients constants

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Y'(t) & = & AY(t) \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{array} \right.$$

a pour unique solution sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$.
Soit $B \in \mathbb{R}^n$. Si A est inversible, l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Y'(t) & = & AY(t) + B \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{array} \right.$$

a pour unique solution sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(t) = e^{(t-t_0)A}(Y_0 + A^{-1}B) - A^{-1}B$.
Rappelons que l'exponentielle de matrices est définie par la série convergente

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!},$$

et donc $e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$.
Remarquons que $e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P$. Par conséquent, pour calculer l'exponentielle, de matrice, on peut se ramener à une base adaptée, par exemple une base dans laquelle la matrice est sous forme de Jordan.

On peut aussi procéder, ce qui est similaire, en utilisant la décomposition de Dunford. Si $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est diagonale, alors e^{tA} aussi, et $e^{tA} = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$. Si A est nilpotente, alors $t \mapsto e^{tA}$ est polynômiale : $A^n = 0$, donc

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Dans le cas général, on peut écrire $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. Comme D et N commutent,

$$e^{tA} = e^{tN} e^{tD} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k A^k}{k!} \right) e^{tD},$$

et les coefficients de e^{tA} sont donc de la forme polynôme $\times$ exponentielle.

Exercice 1.8.
Dessiner des orbites des solutions de l'équation différentielle $y' = Ay$ pour diverses matrices 2×2.

Exercice 1.9.
Supposons que A est antisymétrique. Soit y une solution de l'équation différentielle $y'(t) = Ay(t)$. Calculez la dérivée de la fonction $t \mapsto \langle y(t), y(t) \rangle$, et déduisez-en que les solutions de l'équation différentielle prennent leur valeurs dans des sphères.

1.6 Toute dimension : Équations linéaires à coefficients variables

Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Alors l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

a bien une unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur I.

1.6.1 Solutions matricielles

Soit $(e_i)_{1 \le i \le n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. En résolvant le système d'équation $Y' = AY$ avec condition initiale e_i, on obtient n solutions Y_i de l'équation différentielle. Par linéarité, la solution de l'équation différentielle $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec condition initiale $(x_1, \dots, x_n)$ est $x_1 Y_i + \ldots + x_n Y_n$.

Soit $U(t)$ la matrice donc la i-ème colonne est $Y_i(t)$. Par construction :

- ▷ $U(t_0) = I$;
- ▷ $U'(t) = A(t)U(t)$;
- ▷ Si les conditions initiales sont Y_0, alors $Y(t) = U(t)Y_0$.

1.6.2 Un problème de commutativité

Attention : Contrairement au cas scalaire, les équations linéaires à coefficients variables n'admettent en général pas de solution simple. La fonction $u(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s} y_0$ n'est en général pas solution de l'équation différentielle $y'(t) = A(t)y(t)$. Le problème est que, pour des matrices génériques, $e^{A+B} \neq e^A e^B$, car la multiplication de matrices n'est pas commutative. Par conséquent, en général,

$$e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)\,\mathrm{d}s} = e^{hA(t)+o(h)+\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s} \neq e^{hA(t)+o(h)} e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s} = (I + hA(t) + o(h)) e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s},$$

et donc la dérivée de $t \mapsto e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s}$ n'est en général pas $A(t)e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s}$.

Si les matrices $(A(t))_{t\in I}$ commutent entre elles, alors on peut procéder comme dans le cas réel ; cependant, hors du cas important des matrices constantes, cette situation est l'exception plutôt que la règle. Nous renvoyons le lecteur à la particulièrement désagréable formule de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= e^{X+Y+\frac{[X,Y]}{2}+\frac{[X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]]}{12}+\cdots} \\ &= e^{X+Y+\frac{XY-YX}{2}+\frac{X^2Y-2XYX+YX^2+Y^2X-2YXY+XY^2}{12}+\cdots}, \end{aligned}$$

où $[X,Y]=XY-YX$ est le commutateur de X et Y. Ce défaut de commutativité et ses conséquences sur les équations différentielles font, au passage, tout le sel de la mécanique quantique.

Exemple 1.10.

Donnons un exemple explicite pour lequel la formule $y(t)=e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s}y_0$ ne convient pas. Considérons l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\begin{cases} u'(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} u(t) \\ u(1) &= (0,1) \end{cases}.$$

On calcule directement $y(t)=t$ et, en utilisant la méthode de variation de la constante, $x(t)=2e^{t-1}-1-t$.

De plus, on calcule (plus douloureusement)

$$\int_1^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} (t-1) & (t-1) \\ 0 & \ln(t) \end{pmatrix}, \quad e^{\int_1^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} e^{t-1} & \frac{(t-1)(e^{t-1}-t)}{t-1-\ln(t)} \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

ce qui donne bien $y(t)=t$, mais donne la solution erronée $x(t)=\frac{(t-1)(e^{t-1}-t)}{t-1-\ln(t)}$.

1.7 Wronskien

Si la multiplication matricielle n'est pas commutative, on dispose cependant d'un morphisme de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^*$: le déterminant. Le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ étant commutatif, on peut espérer que le déterminant des matrices $U(t)$ se comporte mieux. Le déterminant se comporte bien vis-à-vis de l'exponentielle : pour toutes matrices X et Y,

$$\det(e^X e^Y) = \det(e^X)\det(e^Y) = e^{\mathrm{Tr}(X)}e^{\mathrm{Tr}(Y)} = e^{\mathrm{Tr}(X)+\mathrm{Tr}(Y)} = e^{\mathrm{Tr}(X+Y)} = \det(e^{X+Y}).$$

Considérons une équation différentielle linéaire à coefficients variables :

$$Y'(t) = A(t)Y(t).$$

La solution est de la forme $Y(t)=U(t)Y(t_0)$, où

$$U'(t) = A(t)U(t).$$

Il reste à comprendre le déterminant d'une dérivée. Remarquons que (cela peut se voir à l'aide des dérivées partielles), pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \det(I+H) &= 1+\mathrm{Tr}(H)+O(\|H\|^2) \\ \det(M+H) &= \det(M)\det(I+M^{-1}H) = \det(M)+\det(M)\mathrm{Tr}(M^{-1}H)+O(\|H\|^2). \end{aligned}$$

Par la formule de dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned}
\det(U(t+h)) &= \det(U(t) + hU'(t) + o(h)) = \det(U(t)) + h\det(U(t))\mathrm{Tr}(U'(t)U(t)^{-1}) + o(h), \\
\det(U)'(t) &= \det(U(t))\mathrm{Tr}(U'(t)U(t)^{-1}) \\
&= \det(U(t))\mathrm{Tr}(A(t)U(t)U(t)^{-1}) \\
&= \mathrm{Tr}(A(t))\det(U(t)).
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\det(U(t)) = e^{\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s}.$$

Cette formule est particulièrement utile en dimension 2. Soient Y_0, Z_0 deux conditions initiales et $Y(t)$, $Z(t)$ les solutions associées. Alors on définit le **wronskien** $W(t) := \det(Y(t), Z(t)) = \det(U(t))\det(Y_0, Z_0)$. On peut donc calculer, sous forme intégrale ou avec un peu de chance explicitement, la fonction $t \mapsto \det(Y(t), Z(t))$.

En particulier, on peut en déduire une relation entre $y_1(t)$, $y_2(t)$, $z_1(t)$ et $z_2(t)$. Supposons que l'on connaît de plus une solution de l'équation différentielle, disons $Y(t)$. La fonction $Z(t)$ satisfait une équation différentielle à 2 variables ; mais on peut exprimer une variable en fontion de $Y(t)$ et du wronskien, et par substitution, en déduire une équation différentielle d'ordre 1 à une variable. On peut ainsi expliciter la deuxième solution $Z(t)$.

2 Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz en dimension quelconque, on peut aussi traiter des équations différentielles d'ordre plus grand que 1. Pour simplifier, nous ne considérerons dans cette partie que des équations scalaires (en dimension 1). Considérons par exemple l'équation différentielle

$$y'' = -y.$$

On introduit une nouvelle variable v, qui est formellement la dérivée de y :

$$y' = v.$$

Alors $v' = y'' = -y$. L'équation différentielle initiale se réécrit donc

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -y \end{pmatrix}.$$

Cette équation a une unique solution étant donnés $y(0)$ et $v(0) = y'(0)$.

En généralisant cette construction, on obtient :

Théorème 2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz affine, ordre supérieur)**.**
Soit I un intervalle. Soit $n \geq 1$. Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ et b des fonctions continues sur I. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution f de classe $\mathcal{C}^n$ de l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{lcl}
y^{(n)} & = & a_0(t)y(t) + a_1(t)y'(t) + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + b(t) \\
y(t_0) & = & y_0 \\
 & \vdots & \\
y^{(n-1)}(t_0) & = & y_{n-1}
\end{array}\right. .$$

L'espaces des solutions d'une équation linéaire (respectivement, affine) scalaire d'ordre n sans condition initiale est un sous-espace vectoriel (respectivement, affine) de dimension n.

De même qu'il n'y a pas de méthode générale de résolution des équations linéaires en dimension supérieure ou égale à 2, il n'y a pas de méthode générale de résolution des équations linéaires d'ordre supérieur ou égal à 2.

2.1 Résolution d'une équation linéaire

Continuons la résolution de l'équation $y'' = -y$. D'après le théorème ci-dessus, étant donnés y_0 et y_1, pour tous $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de l'équation

$$\begin{cases} y'' & = & -y \\ y(0) & = & y_0 \\ y'(0) & = & y_1 \end{cases}.$$

Autrement dit, l'espace des solutions de l'équation différentielle $y'' = -y$ forme un plan ; plus généralement, l'espace des solutions d'une équation différentielle d'ordre n sur $\mathbb{R}$ est de dimension n.

La réduction ci-dessus permet de calculer explicitement les solutions d'équations linéaires d'ordre supérieur. Posons

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Alors U est solution de l'équation différentielle $U' = AU$. Cette équation différentielle étant linéaire, elle a pour solution maximale $U(t) = e^{tA}U(0)$. Or A est antisymétrique, donc e^{tA} est une matrice de rotation. On peut calculer explicitement :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

et donc $y(t) = y(0)\cos(t) + v(0)\sin(t) = y(0)\cos(t) + y'(0)\sin(t)$.

Plus généralement, considérons une équation de degré n à coefficients constants :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = 0.$$

Le système d'ordre 1 associé est

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

La matrice A qui apparaît est la **matrice compagnon** du polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$.

Or P est le polynôme caractéristique de l'équation différentielle linéaire. Ce polynôme est donc égal au polynôme caractéristique de la matrice ! Or, en mettant sous forme de Jordan la matrice A, on sait que les solutions de l'équation différentielle associée sont de la forme polynôme $\times$ exponentielle, ou les coefficients de l'exponentielle sont les valeurs propres de A, donc les racines de son polynôme caractéristique, donc les racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle. On retrouve l'heuristique utilisée pour écrire les solutions d'une telle équation différentielle.

Exercice 2.1.
Utilisez cette méthode pour déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' = 2y' - y$.

Remarque 2.2.
Le plus souvent, les approches usuelles (équations caractéristiques) sont souvent nettement plus efficaces pour calculer explicitement les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre supérieur. Cependant, l'approche matricielle permet de faire le lien entre la présence de termes polynomiaux quand l'équation caractéristique de l'équation différentielle a une racine multiple, et la présence de blocs de Jordan non triviaux dans la matrice A*. De plus, elle permet de justifier rigoureusement l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle, même non linéaire.*

2.2 Retour sur le wronskien

Étant donné qu'un équation différentielle linéaire d'ordre supérieur se réduit à un système linéaire d'ordre 1, la méthode du wronskien fonctionne aussi dans ce cadre. Revenons en particulier sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

Étant données deux solutions $y(t)$ et $z(t)$, leur wronskien est défini comme

$$W(t) = \det((y(t), y'(t)), (z(t), z'(t))) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t).$$

Celui-ci est solution de l'équation différentielle

$$W'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))W(t) = -a(t)W(t) \ ;$$

l'expression de la matrice compagnon simplifiant singulièrement les calculs. Cette équation différentielle peut se retrouver à la main :

$$\begin{aligned} W'(t) &= y'(t)z'(t) + y(t)z''(t) - y''(t)z(t) - y'(t)z'(t) \\ &= y(t)(-a(t)z'(t) - b(t)z(t)) - (-a(t)y'(t) - b(t)y(t))z(t) \\ &= -a(t)(y(t)z'(t) - y'(t)z(t)) \\ &= -a(t)W(t). \end{aligned}$$

Ainsi, si on connaît une solution $y(t)$ de l'équation différentielle, on en déduit une relation entre $z'(t)$ et $z(t)$:

$$z'(t) = \frac{W(t) + y'(t)z(t)}{y(t)},$$

et donc une équation différentielle [2] d'ordre 1 satisfaite par z.

2.3 Conditions initiales, conditions au bord

La solution y d'une équation différentielle d'ordre n satisfaisant les conditions du théorème de Cauchy est caractérisée par les valeurs $y(t_0)$, …, $y^{(n-1)}(t_0)$ en un point. On peut parfois rencontrer des informations différentes ; par exemple, étant donnés $y(t_0)$, …, $y(t_{n-1})$, l'équation différentielle a-t-elle une unique solution ?

Ce problème peut être délicat à résoudre. Par exemple, pour l'équation $y'' = -y$, étant donnés y_0 et y_1 :

2. Dans laquelle il faut faire attention si y s'annule.

- ▷ Il existe une unique solution y telle que $y(0) = y_0$ et $y(\pi/2) = y_1$.
- ▷ Si $y_0 = -y_1$, alors l'équation a une infinité de solutions telles que $y(0) = y_0$ et $y(\pi) = y_1$; si cette condition n'est pas vérifiée, alors il n'y a aucune solution.

Ces énoncés se déduisent du fait que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' = -y$ est l'ensemble $\{A\cos(t) + B\sin(t) \ : \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

3 Équations non linéaires

3.1 Formalisme

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles beaucoup plus générales que les équations affines. Dans un premier temps, explicitons le formalisme associé.

Dans ce cadre, une équation différentielle ordinaire est la donnée d'une condition initiale (la valeur Y_0 au paramètre t_0), et d'une relation entre le paramètre t, la valeur de la fonction y, et la valeur de la dérivée Y'. Pour le théorème de Cauchy-Lipschitz, il faut plus précisément que l'on puisse exprimer Y' à partir de Y et t : il existe une fonction de deux variables réelles F telle que $Y'(t) = F(t, Y(t))$. Une équation différentielle est donc de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y'(t) & = & F(t, Y(t)) \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{array}\right. .$$

Cela inclut la plupart des équations différentielles du premier ordre. Par exemple, l'équation différentielle scalaire

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) - 2y^2(t) & = & t \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. .$$

correspond aux choix $F(t, y) = t + 2y^2$, ainsi que $t_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

Les équations affines rentrent dans ce cadre : l'équation $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ correspond au choix $F(t, y) = a(t)y + b(t)$. De même, pour les équations à variables séparables : si f ne s'annule pas, l'équation $f(y)\mathrm{dy} = \mathrm{g(t)dt}$ correspond au choix $F(t, y) = \frac{g(t)}{f(y)}$.

3.2 Domaine des solutions et intervalle maximal

La question du domaine des solutions qui apparaît notamment pour les équations à variables séparables est plus désagréable qu'il n'y semble. En effet, une équation vient toujours avec un ensemble de définition, c'est-à-dire un ensemble sur lequel cet équation a un sens et dans lequel on cherche ses solutions.

Dans le cadre linéaire, l'équation était bien posée pour des fonctions dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, et la solution appartenait encore à cet ensemble. Cependant, l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & 1 + y(t)^2, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

est bien posée localement pour tout $t \in \mathbb{R}$, mais n'admet pas de solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On aurait envie de dire que la solution de l'équation est la fonction $u(t) = \tan(t - t_0 + \arctan(y_0))$ définie pour $t \in (t_0 - \arctan(y_0) - \frac{\pi}{2}, t_0 - \arctan(y_0) - \frac{\pi}{2})$, mais l'ensemble de définition de la solution n'est pas fixé *a priori* : il dépend des conditions initiales, et n'est déterminé qu'après résolution de l'équation.

Une solution est donc en fait la donnée :

▷ d'un intervalle ouvert I voisinage de t_0 ;

▷ d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle.

On va chercher une solution définie sur un intervalle le plus grand possible. Remarquons que si l'on dispose de deux solutions f, g définie sur deux intervalles I, J et coïncidant sur $I \cap J$, alors on peut construire une solution définie sur $I \cup J$. On peut donc étendre les intervalles de définition.

Théorème 3.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz $\mathcal{C}^1$, version scalaire)**.**
*Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction **de classe** $\mathcal{C}^1$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors **il existe une unique** solution f de classe $\mathcal{C}^1$ maximale de l'équation différentielle*

$$\begin{cases} Y'(t) & = & F(t, Y(t)) \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{cases}.$$

Cette solution est de plus de classe $\mathcal{C}^2$.

L'unique solution maximale (I, f) d'une telle équation différentielle vérifie les deux propriétés suivantes :

▷ l'intervalle I est le plus grand possible : si l'on se donne une solution $g : J \to \mathbb{R}^n$, où J est un intervalle, alors $J \subset I$.

▷ la solution maximale est unique au sens où si $g : J \to \mathbb{R}^n$, où J est un intervalle, alors $g = f_{|J}$: les seules solutions de l'équation sur un intervalle sont les restrictions de la solution maximale à des sous-intervalles.

Remarque 3.2.
Rappelons qu'une fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si ses dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial t}$ et $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Il se peut que la fonction F soit seulement définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Cela n'affecte ni les conclusions du théorème, ni cette remarque.

Remarque 3.3.
*Il est important ici de travailler avec des **intervalles** (connexes !). Le résultat est faux si on enlève cette condition. Par exemple, l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$ avec condition initiale $y(0) = 0$ admet une unique solution maximale, définie sur l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$, la fonction tangente. Mais on peut étendre cette solution, et ce avec une infinité de degrés de libertés, par exemple en posant $f(t) = \tan(t - 50,42)$ pour $t \in (50,42 - \pi/2, 50,42 + \pi/2)$. Ce n'est pas une contradiction avec le théorème de Cauchy-Lipschitz car $(50,42 - \pi/2, 50,42 + \pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2)$ n'est pas un intervalle.*

Remarque 3.4.
On se place dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz pour des fonctions à valeurs réelles. Supposons que la solution maximale f est définie sur un intervalle bornée (a, b). Alors f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en a comme en b.

Le raisonnement est grossièrement le suivant : à chaque fois que f rencontre l'intervalle $[-M, M]$ avant le temps a, elle reste un temps borné inférieurement ε dans l'intervalle $[-M-1, M+1]$. Vu que f n'est définie que jusqu'au temps a, elle ne passe qu'au plus a/ε fois dans l'intervalle $[-M, M]$. Ainsi, f quitte tout intervalle compact de $\mathbb{R}$; ses valeurs d'adhérence sont donc dans $\pm\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f ne peut pas avoir à la fois $+\infty$ et $-\infty$ comme valeurs d'adhérences, donc f tend vers une de ces deux valeurs.

Remarque 3.5.
La version linéaire $Y'(t) = a(t)Y(t) + b(t)$ du théorème de Cauchy-Lipschitz présuppose un type d'équation très particulier, mais a des conclusions plus fortes, à plusieurs points de vue :

- ▷ *Le domaine de définition des solutions est connu, et le même que celui des fonction a et b. Il ne dépend pas des conditions initiales. Il n'y a pas de phénomène d'explosion en temps fini ; ces explosions ne peuvent se produire que si l'équation est non linéaire.*
- ▷ *L'espace des solutions (sans condition initiale) a de plus une structure affine, ce qui n'est en général pas le cas si l'équation est non linéaire.*
- ▷ *La régularité demandée est moindre. Il suffit que a et b soient continues, ce qui est plus faible que de demander que la fonction $(t, y) \mapsto a(t)y + b(t)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.*

3.3 Équations d'ordre supérieur

Comme dans les cas linéaires et affines, on peut adapter le théorème de Cauchy–Lipschitz aux équations d'ordre supérieur. Plaçons-nous en dimension 1. S'il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$y^{(n)} = F(t, y, \dots, y^{(n-1)}),$$

alors on peut traduire l'équation différentielle d'ordre n en n équations différentielles d'ordre 1, d'où :

Théorème 3 (Théorème de Cauchy-Lipschitz $\mathcal{C}^1$, ordre supérieur)**.**
Soit $n \geq 1$. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution f de classe $\mathcal{C}^n$ maximale de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y^{(n)} & = & F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(t_0) & = & y_{n-1} \end{array} \right. .$$

Cette solution est de plus de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

On peut de même résoudre des équations différentielles d'ordre m sur $\mathbb{R}^n$.

3.4 Dimension 1 : Équations à variables séparables

Un autre cas important d'équation différentielle scalaire d'ordre 1 est celui des équations **à variables séparables**. Commençons par une présentation plus "physicienne". Écrivons $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}$. Une équation différentielle est à variables séparables si, en manipulant les symboles dy et dt comme des nombres, on peut la mettre sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(y)\mathrm{dy} & = & g(t)\mathrm{dt}, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. ,$$

où f est une fonction continue et ne s'annulant pas, et g une fonction continue.

Soit F une primitive de f, et G une primitive de g. Alors, en intégrant la première des deux égalités sur l'intervalle $[t_0, t]$,

$$F(y(t)) - F(y(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$
$$F(y(t)) = F(y_0) + G(t) - G(t_0).$$

De plus, F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée ne s'annule pas, donc un difféomorphisme. Par conséquent,

$$y(t) = F^{-1}((y_0) + G(t) - G(t_0)),$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

L'avantage de cette méthode est de pouvoir traiter explicitement des exemples d'équations différentielles non linéaires, y compris des modèles intéressants.

Exemple 3.6 (Modèle logistique)**.**
Considérons un modèle d'évolution de population. Les individus se reproduisent à un taux $\lambda > 0$*, mais la croissance de la population est limitée par les ressources. En notant* $P_{\max}$ *la population maximale pouvant être soutenue par ces ressources et* P *la population au temps* t*, le modèle logistique affirme que*

$$P'(t) = \lambda P(t) \left(\frac{P_{\max} - P(t)}{P_{\max}} \right).$$

Supposons que l'on connaît la population P_0 *an temps* $t = 0$*. Posons* $u(t) := P/P_{\max}$*. Alors* u *est solution de l'équation différentielle*

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t)(1 - y(t)) \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} &= \lambda y(1 - y) \\ \frac{1}{y(1-y)}\mathrm{dy} &= \lambda \mathrm{dt}, \end{aligned}$$

et $y(0) = u_0 := P_0/P_{\max}$*. En posant* $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ *et* $g(t) = \lambda t$*, on a bien une équation à variables séparées. En l'intégrant,*

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{x(1-x)} \,\mathrm{d}x &= \int_0^t \lambda s \,\mathrm{d}s \\ \left[\ln \left(\frac{x}{1-x} \right) \right]_{u_0}^{u(t)} &= \lambda t \\ \ln \left(\frac{u(t)}{1-u(t)} \right) &= \ln \left(\frac{u_0}{1-u_0} \right) + \lambda t \\ u(t) &= \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

Cette méthode appelle plusieurs remarques.

3.4.1 Formalisation

La séparation de la fraction $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}$ est très pratique pour mener les calculs, mais plus difficile à justifier mathématiquement. Cela peut se faire en interprétant $f(y)\mathrm{dy}$ et $g(t)\mathrm{dt}$ comme des *formes différentielles*, mais il n'est pas nécessaire de recourir à cet arsenal. En effet, on peut s'arrêter à l'étape

$$f(y(t))y'(t) = g(t),$$

et reconnaître la dérivée d'une fonction composée :

$$(F \circ y)'(t) = G'(t).$$

Il reste à intégrer cette dernière égalité entre t_0 et t.

3.4.2 Espace des solutions

Une différence importante par rapport aux équations différentielles affines est que l'ensemble des solutions d'une telle équation n'est en général plus un sous-espace affine. Il reste “de dimension 1”, au sens ou l'ensemble des solutions est naturellement paramétré par la valeur y_0 en un point t_0 fixé.

3.4.3 Domaine des solutions

Une autre différence importante par rapport aux équations différentielles affines est que, même si l'équation est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, les solutions peuvent n'être définies que sur un intervalle plus petit !

Par exemple, l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) & = & 1 + y(t)^2, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}$$

est à variables séparables :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+y^2}\mathrm{dy} &= \mathrm{dt} \\ \arctan(y(t)) - \arctan(y_0) &= t - t_0 \\ y(t) &= \tan\left(t - t_0 + \arctan(y_0)\right). \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation différentielle ne sont définies que sur des intervalles bornés. Le problème posé est que la fonction F utilisée précédemment prend ses valeurs dans $(-\pi/2, \pi/2)$, et donc son inverse n'est défini que sur cet intervalle.

3.5 Unicité des solutions

L'unicité des solutions découlant du théorème de Cauchy-Lipschitz a des conséquences importantes.

3.5.1 Dimension 1 : Signe des solutions

La première est de permettre d'encadrer des solutions d'une même équation différentielle.

Proposition 3.7.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction ***de classe $\mathcal{C}^1$****. Soient u_1, u_2 deux solutions de l'équation différentielle*

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

définie sur un même intervalle I (pas nécessairement maximal). Soit $t_0 \in I$. Si $u_1(t_0) \leq u_2(t_0)$, alors $u_1(t) \leq u_2(t)$ pour tout $t \in I$, et de même en remplaçant l'inégalité $\leq$ par une égalité ou une inégalité stricte.

Démonstration.
S'il existe $t_1 \in I$ tel que $u_1(t_1) = u_2(t_1)$, alors, par unicité des solutions de l'équation différentielle, $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in I$. Sinon, $u_1 - u_2$ est continue et ne s'annule pas ; I étant un intervalle, par le théorème des valeurs intermédiaires, $u_1 - u_2$ est de signe constant, donc du signe de $u_1(t_0) - u_2(t_0)$ sur I. □

Corollaire 3.8.
Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soit u une solution sur I de l'équation différentielle

$$y'(t) = a(t)y(t).$$

Soit $t_0 \in I$. Si $u(t_0) \geq 0$, alors $u \geq 0$ (et de même avec une inégalité stricte).

Ce corollaire se déduit ou bien de la formule explicite définissant u, ou bien de l'argument précédent (nettement plus général !) avec $u_1 = u$ et $u_2 = 0$.

3.5.2 Dimension 1 : Équations autonomes

En dimension 1, une équation différentielle autonome est de la forme

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases},$$

où F est une fonction $\mathcal{C}^1$.

Si F s'annule en un point x, alors la fonction constante égale à x est une solution de l'équation sans condition initiale $y' = F(y)$. Par conséquent, si F s'annule en deux points x_1, x_2 tels que $x_1 < y_0 < x_2$, alors $x_1 < y(t) < x_2$ pour tout t.

Cette observation a des conséquences importantes. Tout d'abord, si la condition initiale y_0 est comprise entre deux points d'annulation de F, alors la solution maximale $y(t)$ reste comprise entre ces deux valeurs. Elle ne peut donc pas tendre vers $\pm\infty$, donc elle ne peut pas exploser. Une telle solution est donc définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Remarque 3.9.
L'observation précédente n'est valable que si l'on arrive à encadre y entre deux points d'annulation de F. L'équation $y' = 1 + y^2$, par exemple, n'a pas de solution maximale définie sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, si y est une solution de l'équation $y' = F(y)$ telle que $F(y_0) \neq 0$, alors $F(y)$ ne peut pas changer de signe. En effet, par le théorème des valeurs intermédiaire, il faudrait pour cela que $F(y)$ s'annule, disons en un temps t_1. Mais alors, y et $t \mapsto y(t_1)$ sont deux solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) & = & F(u(t)) \\ u(t_1) & = & y(t_1) \end{cases},$$

donc $y(t) = y(t_1)$ pour tout t, et en paerticulier $F(y_0) = 0$. C'est absurde. On en déduit :

Proposition 3.10.
Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle. Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = F(y)$$

sont ou bien constantes, ou bien strictement monotones.

On en tire :

Proposition 3.11.
Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit y une solution maximale de l'équation différentielle

$$y' = F(y).$$

Soit $I = (\alpha, \beta)$ l'intervalle de définition de y. Alors $\lim_{\alpha^+} y$ et $\lim_{\beta^-} y$ existent, et sont ou bien $\pm\infty$, ou bien des points d'annulation de F.

Démonstration.
Une telle solution y est monotone. Ses limites en α^+ et en β^- existent donc. Nous traitons le cas de la limite en β^- ; celle de la limite en α^+ se traite de même.

Supposons que y ait une limite finie en β^-. Alors y n'explose pas en β^-, donc $\beta = +\infty$. Par continuité de F,

$$\lim_{+\infty} F(y) = F(\lim_{+\infty} y).$$

Donc $\lim_{+\infty} F(y)$ existe. Mais $y' = F(y)$, donc $\lim_{+\infty} y'$ existe. Or, si y et y' convergent en $+\infty$, alors y' converge vers 0. Donc

$$F(\lim_{+\infty} y) = \lim_{+\infty} F(y) = \lim_{+\infty} y' = 0$$

□

3.5.3 Dimension 2 : Zéros isolés

Considérons une équation différentielle scalaire d'ordre 2 linéaire :

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0, \quad (E)$$

où p, q sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

Proposition 3.12.
Soit y une solution non nulle de l'équation (E). Alors :
- ▷ *Pour tout $t \in I$, on a $(y(t), y'(t)) \neq (0,0)$.*
- ▷ *La fonction $t \mapsto \sqrt{y(t)^2 + y'(t)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
- ▷ *Les zéros de y sont isolés*[3].

Démonstration.
Premier point : Par l'absurde, supposons qu'il existe un tel t. Alors y est la fonction nulle sont toutes deux solutions du problème de Cauchy $y'' + py' + qy = 0$ avec condition initiale $y(t) = 0$, $y'(t) = 0$, donc coïncident. Cela contredit le fait que y n'est pas nulle.
Second point : La fonction $t \mapsto y(t)^2 + y'(t)^2$ ne s'annule pas par le premier point. La fonction $t \mapsto \sqrt{y(t)^2 + y'(t)^2}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Troisième point : Par l'absurde, supposons qu'il existe un segment $[a,b] \subset I$ dans lequel y s'annule une infinité de fois. Par compacité, soit (t_n) une suite de points d'annulation deux à deux distincts de y convergeant vers un réel $t \in [a,b]$. La fonction y étant continue,

$$y(t) = \lim_{n\to+\infty} y(t_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

De plus, la fonction y étant dérivable en t,

$$y'(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{y(t_n) - y(t)}{t_n - t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0-0}{t_n - t} = 0.$$

Donc $y(t) = 0$ et $y'(t) = 0$, ce qui contredit le premier point. □

Cette partie est inspirée du sujet d'analyse du CAPES de 2005.

3.5.4 Séries entières

Une autre application de l'unicité des solutions d'une équation différentielle est l'identification de fonctions avec leur développement en série entière.

Par exemple, on peut définir la fonction exponentielle comme l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ telle que $y(0) = 1$. Pour montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

il suffit de démontrer que la série entière est solution de la même équation différentielle.

Cette méthode peut aussi être utilisée pour obtenir le développement en série entière de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ en 1. Celle-ci est en effet l'unique solution de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

3. C'est-à-dire que si $y(t) = 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y(s) \neq 0$ pour tout $s \in I \cap B(t,\varepsilon) \setminus \{t\}$. De façon équivalente, l'ensemble des zéros de y est discret : pour tout segment $[a,b] \subset I$, la fonction y n'a qu'un nombre fini de zéros dans $[a,b]$.

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{\alpha y(t)}{t} \\ y(1) &= 1 \end{cases}.$$

Mais on peut aussi utiliser cette équation différentielle pour chercher une solution développable en série entière. Plus généralement, si l'on n'arrive pas à trouver une solution explicite d'une équation différentielle donnée, une stratégie parfois payante consiste à supposer qu'il en existe une solution développable en série entière, puis à calculer – ou, au moins, trouver quelque chose à dire – sur les coefficients de cette série entière.

3.6 Une généralisation

Ici, nous avons par simplicité énoncé le théorème pour des fonctions F de classe $\mathcal{C}^1$. Un critère plus général existe, celui de *fonction uniformément localement lipschitzienne*[4]. Une fonction F satisfait cette condition si F est continue et si, pour tous compacts $K_T \subset I$ et $K_R \subset \mathbb{R}^n$, il existe $M \geq 0$ tel que, pour tous $t \in K_T$ et tous X, $Y \in K_R$,

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq M\,\|X - Y\|\,.$$

Cela permet d'inclure des équations du type $y'(t) = t + |y(t)|$. De façon plus utile, :

Exercice 3.13.
Soit I un intervalle ouvert réel et a, $b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Montrez que la fonction

$$F : \begin{cases} I \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,y) & \mapsto & a(t)y + b(t) \end{cases}$$

est uniformément localement lipschitzienne.

En particulier, cette version du théorème de Cauchy-Lipschitz permet bien de démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'équations affines, sans besoin de recourir à un argument *ad hoc* ! L'absence de phénomène d'explosion demande cependant un argument supplémentaire, mais peut se démontrer sans recourir à des formules explicites.

4 Quelques contre-exemples

4.1 Dimension de l'espace des solutions et équation de Bessel

Dans l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz, il faut que l'équation différentielle puisse être mise sous la forme $y' = F(t,y)$. Ce n'est pas toujours le cas ; en particulier, il arrive de rencontrer des équations du premier ordre de la forme

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t),$$

qui ne peuvent pas se mettre sous cette forme si a s'annule. Un exemple classique est donné par l'équation de Bessel

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0. \tag{3}$$

Cette équation admet des solutions sur $\mathbb{R}$, mais l'espace de ces solutions est de dimension 1, et non 2 comme on pourrait s'y attendre pour une équation d'ordre 2. En notant J_0 la **fonction de Bessel** du premier ordre :

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

4. Ou une version semblable de ce vocabulaire : localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable de manière uniforme en la première, semi-lipschitzienne à paramètre...

l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ est $\{CJ_0,\ C \in \mathbb{R}\}$. Comme $J_0(0) = 1$, il suffit de fixer la valeur en 0 pour définir une solution.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathbb{R}_-^*$, cependant, l'ensemble des solutions est de dimension 2, mais la plupart des solutions divergent en 0. Une solution linéairement indépendante de J_0 sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$Y_0(x) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos(\theta))(e + \ln(2x\sin^2(\theta)))\, \mathrm{d}\theta.$$

On peut aussi concevoir ainsi des équations différentielles d'ordre 1 admettant une infinité de solutions, malgré la donnée d'une condition initiale.

Exercice 4.1.
Montrez que, sur $\mathbb{R}$, les fonctions J_0 et J_0' ne s'annulent jamais au même point.

Remarque 4.2.
On peut utiliser le wronskien ! Posons $W(t) := \det((J_0(t), J_0'(t)), (Y_0(t), Y_0'(t)))$. Alors

$$W'(t) = -\frac{1}{t}W(t),$$

et donc $W(t) = \frac{W(1)}{t}$. Par conséquent,

$$J_0(t)Y_0'(t) = \frac{W(1)}{t} + J_0'(t)Y_0(t),$$

ce qui fournit une identité fonctionnelle a priori peu évidente entre Y_0 et J_0.

Exercice 4.3.
À l'aide de la méthode de la variation de la constante, écrire Y_0 sous forme intégrale en ne faisant apparaître que J_0.

4.2 Régularité de l'équation et unicité des solutions

Une autre hypothèse que l'on peut tenter d'affaiblir concerne la régularité de F. Comme nous avons déjà vu, une propriété du type *uniformément localement lipschitzienne* suffit. Des problèmes peuvent apparaître si on travaille avec des fonctions non lipschitziennes, par exemple

$$\begin{cases} y' &= \sqrt{|y|} \\ y(0) &= 0 \end{cases}.$$

Cette équation admet une infinité de solutions maximales, de la forme

$$\begin{cases} y(t) &= 0 & \forall t \leq t_0 \\ y(t) &= \frac{(t-t_0)^2}{4} & \forall t > t_0 \end{cases}.$$

Ce type d'exemple n'est pas complètement artificiel, et peut apparaître très occasionnellement en physique (dynamique d'une bille roulant sur la crête d'un demi-cylindre, vidange d'une cuve remplie d'eau). Signalons enfin une très belle construction géométrique d'un tel contre-exemple, utilisant des cercles osculateurs, mentionnée dans le *Mathematical omnibus*, de Fuchs et Tabachnikov, Proposition 10.3.

Exercice 4.4.
Soit $y_0 > 0$. Résolvez l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= \sqrt{y} \\ y(0) &= y_0 \end{cases}.$$

5 Complément : Autour de l'équation de Bessel

On s'intéresse aux solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\left\{\begin{array}{lcl} ty''(t)+y'(t)+ty(t) & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. \quad (E),$$

appelée **équation de Bessel**.

5.1 Intégrales à paramètres

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$J(x) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Montrons que J est solution de l'équation de Bessel.

Il faut pour cela montrer que J est de classe $\mathcal{C}^2$, et déterminer ses dérivées. Nous utilisons un théorème de dérivation sous l'intégrale.

Posons, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, \pi/2]$,

$$F(x,t) := \frac{2}{\pi}\cos(x\sin(t)).$$

Pour tout $x \in R$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,\pi/2]$. Pour tout $t \in [0,\pi/2]$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -\frac{2}{\pi}\sin(t)\sin(x\sin(t)).$$

En particulier, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,\pi/2]$,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2}{\pi},$$

et la fonction $t \mapsto 2/\pi$ est intégrable sur $[0,\pi/2]$. Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, la fonction J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$J'(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

En procédant de même avec J', on montre que J est de classe $\mathcal{C}^2$, et

$$J''(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 5.1.
Une récurrence permet de démontrer que J est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que ses dérivées sont données, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \geq 0$, par

$$J^{(2k)}(x) = (-1)^k\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t,$$
$$J^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1}(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 5.2.
On aurait pu utiliser un théorème plus général affirmant que, étant donnés $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, un intervalle I, un segment $[a, b]$ et une fonction $F : I \times [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, la fonction

$$x \mapsto \int_a^b F(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et l'on peut échanger dérivation et intégration. Ici, $I = \mathbb{R}$ et $[a, b] = [0, \pi/2]$. En bref, le fait que le paramètre d'intégration soit à valeur dans un segment (et non, disons, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+^*$) simplifie grandement les choses. En effet, sous ces hypothèses, les dérivées de F sont bornées (sur tout compact de I), et les fonction bornées sont intégrables sur $[a, b]$; l'hypothèse de domination est automatiquement satisfaite.

Il reste à montrer que J est bien solution de l'équation de Bessel. On doit calculer une combinaison linéaire de J, J' et J''. La difficulté vient de J', dont l'intégrant fait apparaître l'expression $\sin(x\sin(t))$ et non $\cos(x\sin(t))$. Cela se résoud à l'aide d'une intégration par parties. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} J'(x) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\sin(t)\sin(x\sin(t))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(t))x\cos(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -x\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} xJ''(x) + J'(x) + xJ(x) &= -x\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t - x\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &\quad + x\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= x\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t) - \sin^2(t))\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Enfin, $J(0) = 1$, donc J est bien une solution de l'équation de Bessel sur $\mathbb{R}$.

5.2 Développement en séries entières

Une autre stratégie consiste à rechercher une solution développable en séries entières de l'équation de Bessel.

Soit y une fonction développable en série entière sur un voisinage de 0. Soit $R > 0$ son rayon de convergence. Il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tout $x \in (-R, R)$,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par conséquent, pour tout $x \in (-R, R)$,

$$xy(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n, \quad xy''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n,$$

et :

$$\begin{aligned} xy''(x) + y'(x) + xy(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1}\right] x^n. \end{aligned}$$

Par conséquent, une fonction développable en série entière en 0, de rayon de convergence R, est solution de l'équation de Bessel sur $(-R, R)$ si et seulement si

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_0 = 1,$$

la condition $a_0 = 1$ traduisant la condition initiale de l'équation de Bessel. Ainsi, y est solution de l'équation de Bessel si et seulement si, pour tout $n \geq 0$,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 0.$$

Nous pouvons à présent montrer l'existence d'une solution développable en série entière de l'équation de Bessel. Considérons la série entière (formelle)

$$Y(X) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} X^{2n}.$$

Son rayon de convergence, obtenu par exemple par le critère de d'Alembert, vaut $+\infty$. La fonction

$$Y(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n}$$

est donc bien définie sur $\mathbb{R}$, et est une solution de l'équation de Bessel sur $\mathbb{R}$.

Enfin, remarquons qu'un telle solution de l'équation de Bessel est nécessairement unique, les coefficients de son développement en série entière en 0 étant entièrement déterminés par l'équation.

5.3 Intégrales de Wallis

Les fonctions J et Y coïncident-elles ?

Comme il existe une unique solution de l'équation de Bessel développable en série entière en 0, une stratégie possible est de montrer que J est développable en série entière en 0. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin(t))\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!}\, \mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $f_n(t) := \frac{(-1)^n x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!}$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$. Les fonctionx f_n sont continues et intégrables sur $[0, \pi/2]$, et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \cos(x \sin(t))$. Enfin,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)|\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!}\, \mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\pi}{2} \cosh(x) < +\infty.$$

On peut donc intervertir somme et intégrale : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) \, \mathrm{d}t.$$

La fonction J est donc bien développable en série entière en 0, avec rayon de convergence infini. Par la partie précédente, $J = Y$.

On en déduit au passage des expressions explicites des intégrales de Wallis d'indice pair. En effet, par identification des coefficients, ce qui est possible car les séries entières en jeu ont un rayon de convergence non nul, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) \, \mathrm{d}t &= \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) \, \mathrm{d}t &= \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Remarque 5.3.
Une autre stratégie aurait consisté à développer directement J en série entière, puis à injecter son expression dans l'équation de Bessel. On aurait alors retrouvé la relation de récurrence usuelle entre intégrales de Wallis, puis l'expression de ces intégrales. Nous avons choisi de procéder comme ci-dessus afin de donner un exemple de résolution d'équation différentielle à l'aide de développements en séries entières.

Remarque 5.4.
L'équation de Bessel n'est pas sous une forme qui permette d'appliquer le théorème de Cauchy ; une telle forme serait

$$y''(t) = -\frac{y'(t)}{t} - y(t),$$

qui n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$. En particulier nous n'avons pas pu utiliser le théorème de Cauchy pour identifier J et Y.

L'espace des solutions de l'équation $ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est de dimension 2, par le théorème de Cauchy. Cependant, la plupart de ces solutions ont une singularité en 0, et ne sont donc pas prolongeables par continuité. C'est pour cela que l'espace des solutions de l'équation $ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est de dimension seulement 1 (engendré par J), bien que cette équation différentielle soit d'ordre 2.