Comportement qualitatif des solutions d'équations différentielles.

Table des matières

Le but de ce document est de présenter une analyse élémentaire de solutions d'équations différentielles. Une référence plus complète sur le sujet est le cours de Dominique Hulin.

1 Graphes et trajectoires

1.1 Unicité des solutions

1.1.1 Équations d'ordre 1 générales : graphes

L'une des applications les plus importantes du théorème de Cauchy-Lipschitz est a proposition :

Proposition 1.1.
Soit $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ deux solutions maximales de l'équation différentielle

$$y'(t) = F(t, y(t)).$$

Alors :

- ▷ *Ou bien $I_1 = I_2$ et $y_1 = y_2$;*
- ▷ *Ou bien $y_1(t) \neq y_2(t)$ pour tout $t \in I_1 \cap I_2$.*

Démonstration.
Supposons qu'il existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$. Alors y_1, y_2 sont deux solutions maximales du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_1(t_0) \end{cases}.$$

Or ce problème a une unique solution, donc $y_1 = y_2$. □

Le **graphe** d'une solution y est l'ensemble :

$$\Gamma_y := \{(t, y(t)) : t \in I \}.$$

La proposition précédente peut se reformuler de la façon suivante :

Proposition 1.2.
Soit $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et y_1, y_2 deux solutions maximales de l'équation différentielle

$$y'(t) = F(t, y(t)).$$

Alors ou bien les graphes de y_1 et y_2 sont confondus, ou bien ils sont disjoints.

Remarque 1.3.
Cette proposition, sous sa forme la plus naïve, est fausse pour des équations différentielles d'ordre $k \geq 2$ supérieur : dans ce cas, une solution n'est plus caractérisée par sa valeur en un point. Pour conclure que deux solutions coïncident, il faut aussi supposer que les dérivées jusqu'à l'ordre $k-1 \geq 1$ coïncident.

Cette proposition est particulièrement utile en dimension 1, en conjonction avec le théorème des valeurs intermédiaires :

Proposition 1.4.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et y_1, y_2 deux solutions maximales de l'équation différentielle

$$y'(t) = F(t, y(t)).$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Si $y_1(t_0) < y_2(t_0)$, alors $y_1(t) < y_2(t)$ pour tout t où ces deux solutions sont définies (et de même avec des inégalités larges).

Démonstration.
Soient I_1 l'intervalle de définition de y_1 et I_2 celui de y_2. Comme $y_1(t_0) \neq y_2(t_0)$, on sait que $y_1(t) \neq y_2(t)$ pour tout $t \in I_1 \cap I_2$. Or $I_1 \cap I_2$ est un intervalle, et y_1, y_2 sont continues. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $y_2 - y_1$ est de signe constant sur $I_1 \cap I_2$, donc strictement positive de par son signe en t_0. □

1.1.2 Équations d'ordre 1 autonomes : trajectoires

Une équation différentielle est dite **autonome** si elle est de la forme $y'(t) = F(y(t))$. Dans ce cas, le temps initial importe peu. En effet, soient $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et t_0, $t_1 \in \mathbb{R}$. Soit $y_0 : I \to \mathbb{R}^n$ la solution maximale de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases} .$$

Alors $y_1 : t \mapsto y_0(t + t_0 - t_1)$ est la solution maximale de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t)) \\ y(t_1) & = & y_0 \end{cases} .$$

Autrement dit, en translatant la variable de temps d'une solution, on obtient une autre solution.

Dans ce cas, les **trajectoires**

$$O_y := \{y(t) : \ t \in I\}$$

contiennent beaucoup d'information :

Proposition 1.5.
Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et y_1, y_2 deux solutions maximales de l'équation différentielle

$$y'(t) = F(y(t)).$$

Alors ou bien les trajectoires de y_1 et y_2 sont confondues, ou bien elles sont disjointes.

Démonstration.
Supposons qu'il existe $y_0 \in O_{y_1} \cap O_{y_2}$. Montrons que les deux orbites coïncidents. Il existe t_1, t_2 telles que $y_1(t_1) = y_2(t_2) = y_0$. Mais alors les fonctions y_2 et $y_3 : t \mapsto y_1(t + t_1 - t_2)$ sont toutes deux solutions maximales de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t)) \\ y(t_2) & = & y_0 \end{cases} .$$

Donc $y_2 = y_3$. Or y_1 et y_3 ont la même trajectoire, donc y_1 et y_2 ont la même trajectoire. □

1.2 Représentations graphiques

1.2.1 Équations différentielles d'ordre 1 générales : graphes

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et $y : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle

$$w'(t) = F(t, w(t)).$$

Le graphe γ_y de y est l'image de la courbe paramétrée $\gamma_y : t \mapsto (t, y(t))$. Or γ_y est de classe $\mathcal{C}^1$, et un vecteur tangent en $(t, y(t))$ est donné par

$$\gamma_y'(t) = (1, y'(t)) = (1, F(t, y(t))).$$

Les graphes des solutions de l'équation différentielle $y' = F(t, y(t))$ sont donc tangents en tout point au champ de vecteurs $(t, y) \mapsto (1, F(t, y))$.

Si l'équation différentielle est autonome, elle s'écrit $y'(t) = F(y(t))$ pour une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas, les graphes des solutions de l'équation différentielle $y' = F(y(t))$ sont tangents en tout point au champ de vecteurs $(t, y) \mapsto (1, F(y))$. Ce champ de vecteurs est invariant par translation dans la direction de l'axe des abscisses.

1.2.2 Équations différentielles d'ordre 1 autonomes : trajectoires

Soit $n \geq 1$, soient $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de l'équation différentielle

$$w'(t) = F(w(t)).$$

Le graphe de y est une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si $n \geq 2$, on commence à manquer de place pour dessiner ce graphe. Souvent, on ne tracera que les trajectoires, qui sont des parties de $\mathbb{R}^n$, ainsi que le sens dans lequel ces trajectoires sont parcourues.

Proposition 1.6.
Soit $n \geq 1$, soient $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de l'équation différentielle

$$w'(t) = F(w(t)).$$

Alors :
- ▷ *Ou bien y est constante et $F(y(t)) = \vec{0}$ pour tout t ;*
- ▷ *Ou bien $F(y(t)) \neq \vec{0}$ pour tout t, et la trajectoire de y est partout tangente*[1] *au champ de vecteur $x \mapsto F(x)$.*

Démonstration.
Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $F(y(t)) = \vec{0}$. Alors y et la fonction $t \mapsto y(t_0)$ sont tous deux solutions du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} w'(t) & = & F(w(t)) \\ w(t_0) & = & y(t_0) \end{array} \right. ,$$

donc coïncident[2].

Supposons que $F(y(t)) \neq \vec{0}$ pour tout t. Alors la trajectoire de y est l'image de la courbe paramétrée y, et comme $y'(t) = F(y(t)) \neq \vec{0}$, cette image est tangente[3] en $y(t)$ au vecteur $y'(t) = F(y(t))$, donc au champ de vecteur $x \mapsto F(x)$. □

On remarque que les points d'annulations de F jouent un rôle particulier : ils sont en bijection avec les solutions constantes de l'équation différentielle. On les appelle aussi **points fixes** du champ de vecteur. Ils sont à chercher en premier !

Remarque 1.7.
*Les commandes **matplotlib.pyplot.streamplot** (Python) et **streamline_plot** (Sage) sont particulièrement utiles pour visualiser les champs de vecteurs et les trajectoires des solutions d'une l'équation différentielle autonome.*

---

1. Pour être rigoureux : localement en temps.
2. On aurait aussi pu observer que la trajectoire de y et la trajectoire de $t \mapsto y(t_0)$ ne sont pas disjointes, donc coïncident, dont y a pour image le singleton $y(t_0)$, donc est constante.
3. Pour être rigoureux : localement en temps.

Exercice 1.8.
Tracez numériquement les trajectoires associée à l'équation différentielle autonome[4] *dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & y(t) \\ y'(t) & = & (1-x(t)^2)y(t)-x(t) \end{array}\right. .$$

Que pouvez-vous conjecturer sur le comportement des solutions ?

1.2.3 Équations différentielles d'ordre supérieur

Dans le cadre de ce cours, une équation différentielle d'ordre k dans $\mathbb{R}^n$ est de la forme

$$y^{(k)}(t) = F(t, y(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)).$$

Le graphe reste une représentation utile, bien que plus limitée (voir la Remarque 1.3) : les graphes de solutions différentes ne sont plus nécessairement disjoints.

On peut la transformer une telle équation en une équation d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^{nk}$ en introduisant les variables auxiliaires $y_i := y^{(i)}$, puis appliquer les outils introduits pour les équations d'ordre 1.

Le cas d'équations différentielles d'ordre $k = 2$ scalaire ($n = 1$) est particulièrement intéressant, car il se ramène à une équation d'ordre 1 dans le plan, que l'on peut aisément visualiser. Le cas des trajectoires d'équations autonomes mérite d'être développé. Considérons une équation de la forme

$$x''(t) = F(x(t), x'(t)).$$

Introduisons la variable auxiliaire $y := x'$. On se ramène ainsi[5] à l'équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & y(t) \\ y'(t) & = & F(x(t), y(t)). \end{array}\right. .$$

Cette équation est de la forme $X' = G(X)$, où $G(x, y) = (y, F(x, y))$. Les points fixes d'une telle équation sont fortement contraints. En effet, $G = \vec{0}$ si et seulement si $y = 0$ et $F(x, 0) = 0$; trouver les solutions constantes de ce système, c'est résoudre l'équation $F(x, 0) = 0$.

D'autre part, la forme d'une telle équation impose le sens de parcours des trajectoires. En effet, si $y > 0$, alors $x' > 0$: dans le demi-plan supérieur, on se déplace vers la droite. Inversement, si $y < 0$, alors $x' < 0$: dans le demi-plan inférieur, on se déplace vers la gauche.

1.3 Renversement de temps

Soit $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution d'une équation différentielle d'ordre 1 autonome :

$$w'(t) = F(w(t)).$$

Posons $z : t \mapsto y(-t)$ sur $-I$. Alors $z'(t) = -y'(-t) = -F(y(-t)) = -F(z(t))$. Renverser le temps revient à inverser la direction du champ de vecteurs F.

Par la suite, nous étudierons souvent le comportement dans le futur d'une solution ; c'est-à-dire que, si l'on se donne une condition initiale $y(t_0) = y_0$, nous en décrirons le comportement qualitatif pour $t \geq t_0$. Grâce à cette remarque, les résultats obtenus “dans le futur” se transposerons aussi “dans le passé”.

Exercice 1.9.
Soit y une solution d'une équation différentielle non autonome $w'(t) = F(t, w(t))$. Explicitez une équation différentielle satisfaite par la fonction $z : t \mapsto y(-t)$. Traitez les équations d'ordre supérieur.

4. Appelée *oscillateur de van der Pol.*
5. Voir notamment l'Exercice 1.8.

2 (Non-)explosion des solutions

2.1 Explosion en temps fini et lemme de majoration a priori

Une difficulté de la résolution d'équations différentielles non linéaires est que les solutions ne sont pas toujours définies en tout temps. Ainsi, l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t)^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

a pour solution maximale la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, définie sur $(-\infty, 1)$.

Afin d'éviter ce problème, nous allons donner des conditions suffisantes garantissant que les solutions maximales de certaines équations différentielles sont définies en tout temps. L'énoncé principal dans cette direction est le *lemme de majoration a priori*, que nous admettrons. Ce lemme affirme qu'une solution d'une équation différentielle (définie en tout temps) n'a qu'une seule façon de ne pas elle-même être définie en tout temps : elle doit tendre vers l'infini.

Proposition 2.1 (Lemme des bouts, ou lemme de majoration a priori ; admis)**.**
Soient $n \geq 1$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équation différentielle $w'(t) = F(t, w(t))$.

Si $\beta < +\infty$, alors $\lim_{t \to \beta^-} \|y(t)\| = +\infty$ et de même en α.

Corollaire 2.2.
Soient $n \geq 1$ et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit y une solution maximale de l'équation différentielle $w'(t) = F(t, w(t))$. Si y est bornée, alors y est définie sur $\mathbb{R}$.

Dans le cas d'équations différentielles à valeurs réelles, on peut être un peu plus précis.

Proposition 2.3.
Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle $w'(t) = F(t, w(t))$.

Si $\beta < +\infty$, alors $\lim_{t \to \beta^-} y(t) = +\infty$ ou $\lim_{t \to \beta^-} y(t) = -\infty$, et de même en α.

Démonstration.
Plaçons-nous dans le cadre du lemme, et supposons que $\beta < +\infty$. D'après le lemme de majoration a priori,

$$\lim_{t \to \beta^-} |y(t)| = +\infty.$$

Soit $M > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $|y(t)| \geq M$ pour tout $t \in [\beta - \varepsilon, \beta)$. Supposons sans perte de généralité que $y(\beta - \varepsilon) \geq M$, et montrons que $\lim_{t \to \beta^-} y(t) = +\infty$.

La fonction y est continue sur $[\beta - \varepsilon, \beta)$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle est de signe constant, donc strictement positive, sur cet intervalle. Par conséquent, $y(t) \geq M$ pour tout $t \in [\beta - \varepsilon, \beta)$, ce qu'il fallait montrer. $\square$

2.2 Lemme de Grönwall

Le lemme de Grönwall est un lemme d'intérêt indépendant, qui a l'avantage de s'appliquer à des *inégalités différentielles*. Nous l'utiliserons pour donner d'autres critères garantissant que des solutions d'équations différentielles sont définies en tout temps.

2.2.1 Énoncé

Lemme 2.4 (Lemme de Grönwall)**.**
Soit I un intervalle. Soient a, b deux fonctions continues sur I. Soient y, $w : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$y'(t) \leq a(t)y(t) + b(t),$$
$$w'(t) = a(t)w(t) + b(t).$$

Soit $t_0 \in I$. Si $y(t_0) \leq w(t_0)$, alors $y(t) \leq w(t)$ pour tout $t \geq t_0$.

Démonstration.
Soit $z := y - w$. Alors z est $\mathcal{C}^1$ et $z'(t) \leq a(t)z(t)$ pour tout $t \in I$. Supposons que $z(t_0) \leq 0$; on veut montrer que $z(t) \leq 0$ pour tout $t \geq t_0$.

Soit $g : t \mapsto z(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s}$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $t \in I$,

$$g'(t) = z'(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} - a(t)z(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} = (z'(t) - a(t)z(t))e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} \leq 0.$$

La fonction g est donc décroissante sur I. Or $g(t_0) = z(t_0) = 0$, donc $g(t) \leq 0$ pour tout $t \geq t_0$, donc $z(t) \leq 0$ pour tout $t \geq t_0$. □

Exemple 2.5.
Soit I un intervalle. Soit $a : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$y'(t) \leq a(t)y(t).$$

Soit $t_0 \in I$. Alors, pour tout $t \geq t_0$,

$$y(t) \leq y(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Exemple 2.6.
Soit I un intervalle. Soient $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$y'(t) \leq ay(t) + b.$$

Soit $t_0 \in I$. Alors, pour tout $t \geq t_0$,

$$y(t) \leq \left(y(t_0) + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}. \tag{1}$$

2.2.2 Avec des valeurs absolues

La variante suivante du lemme de Grönwall pourra être utile pour la suite.

Lemme 2.7.
Soit I un intervalle. Soient a, b deux fonctions continues sur I, avec b positive. Soient y, $w : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$|y'(t)| \leq a(t)|y(t)| + b(t),$$
$$w'(t) = a(t)w(t) + b(t).$$

Soit $t_0 \in I$. Si $|y(t_0)| \leq w(t_0)$, alors $|y(t)| \leq w(t)$ pour tout $t \geq t_0$.

Démonstration.
Començons par montrer que $w(t) \geq 0$ pour tout $t \geq t_0$. Soit h la fonction nulle. Alors $h' = 0 \leq b = ah + b$ par positivité de b, et $h(t_0) = 0 \leq |y(t_0)| \leq w(t_0)$. Par le lemme de Grönwall, $0 = h(t) \leq w(t)$ pour tout $t \geq t_0$.

Pour la suite, notre stratégie suit celle du lemme de Grönwall. Posons $z := y - w$ et $g : t \mapsto z(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds}$. Soit $t \geq t_0$. Grâce à la positivité de w et à l'inégalité triangluaire inverse,

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(t) - w'(t) \\ &\leq a(t)|y(t)| + b(t) - a(t)w(t) - b(t) \\ &= a(t)(|y(t)| - w(t)) \\ &= a(t)(|y(t)| - |w(t)|) \\ &\leq a(t)|y(t) - w(t)| \\ &= a(t)|z(t)|, \end{aligned}$$

et donc

$$g'(t) = (z'(t) - a(t)z(t))e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} \leq a(t)(|z(t)| - z(t))e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} = a(t)(|g(t)| - g(t)).$$

On en déduit que, si $t \geq t_0$ et $g(t) \geq 0$, alors $g'(t) \leq 0$.

Supposons qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $g(t_1) > 0$. Soit $t_2 := \sup\{t < t_1 : \ g(t) \leq 0\}$. Alors $t_0 \leq t_2$ (car $g(t_0) \leq 0$), $t_2 < t_1$ (car $g(t_1) > 0$ et g est continue), et $g(t_2) \leq 0$ (car g est continue). Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in (t_2, t_1)$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(t_1) - g(t_2)}{t_1 - t_2}.$$

Le membre de droite est strictement positif (car $g(t_2) \leq 0 < g(t_1)$ et $t_2 < t_1$). Cependant, $g(c) > 0$ car $c \in (t_2, t_1)$, donc $g'(c) \leq 0$. C'est absurde. Par conséquent, $g(t) \leq 0$ pour tout $t \geq t_0$, donc $y(t) \leq w(t)$ pour tout $t \geq t_0$.

Enfin, $-y$ est aussi solution de l'inégalité différentielle $|(-y)'| \leq a|-y| + b$, et $|-y(t_0)| \leq w(t_0)$. En appliquant le résultat précédent à la fonction $-y$, on trouve $-y(t) \leq w(t)$ pour tout $t \geq t_0$, et donc $|y(t)| \leq w(t)$ pour tout $t \geq t_0$. □

2.2.3 Non-explosion de solutions, cas réel

Il s'ensuit une application aux temps d'explosion de solutions d'équations différentielles. Nous commençons par une démonstration dans le cas réel, plus facile.

Corollaire 2.8.
Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que les dérivées partielles de F soient bornées[6]*. Alors toutes les solutions de l'équation différentielle réelle $y'(t) = F(t, y(t))$ sont définies sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration.
Soit $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équation différentielle $w'(t) = F(t, w(t))$. Il suffit d'encadrer y par deux fonction z_-, z_+ continues sur $\mathbb{R}$. Cela empêche y de tendre vers l'infini en temps fini, et y doit donc être définie sur $\mathbb{R}$ par le lemme de majoration a priori.

6. Comme nous le constaterons dans la démonstration, il suffit que la dérivée partielle de F par rapport à la seconde variable soit bornée !

La dérivée partielle de F par rapport à la seconde variable est bornée. Par le théorème des accroissements finis, il existe une constante $M \geq 0$ telle que, pour tous t, $y \in \mathbb{R}$,

$$-|F(t,0)| - M|y|. \leq F(t,0) - M|y| \leq F(t,y) \leq F(t,0) + M|y| \leq |F(t,0)| + M|y|.$$

Par conséquent, pour tout $t \in I$,

$$|y'(t)| = |F(t,y(t))| \leq |F(t,0)| + M|y(t)|.$$

Soit $t_0 \in I$. Soit w la solution maximale de l'équation différentielle

$$w'(t) = |F(t,0)| + Mw(t) \quad \text{et} \quad w(t_0) = |y(t_0)|.$$

Cette équation se résoud par variation de la constante. En particulier, w est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par le Lemme 2.7, pour tout $t \geq t_0$,

$$|y(t)| \leq w(t),$$

et donc y ne peut pas tendre vers l'infini en temps fini. □

2.2.4 Non-explosion de solutions, cas général

En dimension supérieure, il faut travailler non plus avec des valeurs absolues mais avec des normes. L'énoncé est similaire, mais nous adoptons une stratégie de démonstration différente.

Corollaire 2.9.
Soient $n \geq 1$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que les dérivées partielles de F soient bornées. Alors toutes les solutions de l'équation différentielle $y'(t) = F(t,y(t))$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équation différentielle $w'(t) = F(t,w(t))$. Il suffit de montrer que $\beta = +\infty$; l'étude de la borne α est similaire. Procédons par l'absurde, et supposons que $\beta < +\infty$. Fixons $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Nous allons montrer que y est bornée sur $[t_0, \beta)$, la contradiction étant alors apportée par le lemme de majoration a priori.

Les dérivées partielles de F étant bornées, par le théorème des accroissements finis, la fonction F est lipschitzienne. Il existe donc a, $b > 0$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|F(t,y)\| \leq a + b|t| + b|y|.$$

Soit $a' := \max\{a + b|t_0|, a + b|\beta|\}$. Alors, pour tout $t \in [t_0, \beta)$ et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|F(t,y)\| \leq a' + b\|y\|.$$

Posons[7] $w(t) := \langle y(t), y(t) \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k(t)^2$. Alors w est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0, \beta)$, et

$$\begin{aligned}
w'(t) &= 2\sum_{k=1}^{+\infty} y_k(t) y_k'(t) \\
&\leq 2\|y(t)\| \|y'(t)\| \\
&= 2\|y(t)\| \|F(t,y(t))\| \\
&\leq 2\|y(t)\| (a' + b\|y(t)\|) \\
&= 2a'\|y(t)\| + 2b\|y(t)\|^2 \\
&\leq a' + (a' + 2b)\|y(t)\|^2 \\
&= a' + (a' + 2b)w(t).
\end{aligned}$$

7. L'idée est de se ramener à une inégalité différentielle. Il faut donc introduire une grandeur scalaire qui permette de contrôler la norme de y. Utiliser directement la norme de y amène deux obstacles, surmontables, mais que l'on préfère éviter. D'une part, la norme n'est pas différentiable partout ; d'autre part, là où elle est différentiable, sa différentielle n'est pas si simple que cela. Pour s'épargner cela, on utilise ici la norme au carré.

Par le lemme de Grönwall, et plus précisément l'Exemple 2.6, pour tout $t \in [t_0, \beta)$,

$$w(t) \leq \left(w(t_0) + \frac{a' + 2b}{a'}\right) e^{(a'+2b)(t-t_0)} - \frac{a' + 2b}{a'}.$$

La fonction w est donc majorée sur $[t_0, \beta)$, disons par $M \geq 0$. La fonction y est alors bornée par $\sqrt{M}$ sur $[t_0, \beta)$, ce que l'on voulait montrer. □

Ce corollaire s'applique notamment aux équation linéaires $Y'(t) = A(t)Y(t)$, pourvu que la fonction $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. La même stratégie s'applique à des équation différentielles linéaires définies par une fonction $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ continue. On montre ainsi que les solutions d'équations différentielles linéaires sont définies en tout temps.

3 Équations autonomes réelles

Dans cette partie, on se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On veut comprendre le comportement des solutions de l'équaiton différentielle $y'(t) = F(y(t))$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $F(y(t)) = 0$, alors y est constante. La première étape de l'analyse consiste donc à déterminer le lieu d'annulation de F ; chaque point d'annulation fourni une solution constante.

On va ensuite étudier les solutions non constantes. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une telle solution. Alors $y(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, y est de signe constant. On en déduit :

Proposition 3.1.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et y une solution de l'équation différentielle $w'(t) = F(w(t))$. Alors ou bien y est constante, ou bien y est strictement monotone.

Sans perte de généralité, on se restreindra au cas où $F(y(t)) > 0$ pour tout $t \in I$, c'est-à-dire aux solutions strictement croissantes.

3.1 Limite en l'infini

Fixons $t_0 \in I$. Comme $F(y(t_0)) > 0$ et F est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il y a deux situations possibles :

- ▷ Ou bien il existe $x > y(t_0)$ tel que $F(x) = 0$;
- ▷ Ou bien $F(x) > 0$ pour tout $x \geq y(t_0)$.

Proposition 3.2.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $y : I = (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $w'(t) = F(w(t))$. Soit $t_0 \in I$. Supposons que $F(y(t_0)) > 0$. Alors :

- ▷ *Ou bien il existe $x > y(t_0)$ tel que $F(x) = 0$, auquel cas $\beta = +\infty$ et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \inf\{x > y(t_0) : \ F(x) = 0\}$;*
- ▷ *Ou bien $F(x) > 0$ pour tout $x \geq y(t_0)$, auquel cas $\lim_{t \to \beta^-} y(t) = +\infty$.*

Démonstration.
La fonction y est croissante, donc minorée par $y(t_0)$ sur $[t_0, \beta)$. Supposons que y est majorée. Par le lemme de majoration a priori, y n'explose pas en temps fini sur $[t_0, \beta)$, donc $\beta = +\infty$. De plus, comme y est croissante, y converge vers un réel $\ell > y(t_0)$ en $+\infty$. Mais alors, par continuité de F,

$$\lim_{t \to +\infty} y'(t) = \lim_{t \to +\infty} F(y(t)) = F(\lim_{t \to +\infty} y(t)) = F(\ell).$$

Si $F(\ell) \neq 0$, alors $y(t) \sim_{t \to +\infty} F(\ell)t$ par intégration des équivalents, ce qui contredit le fait que y converge vers ℓ. Par conséquent, $F(\ell) = 0$.

Supposons que $F(x) > 0$ pour tout $x \geq y(t_0)$. Alors $F(\ell) > 0$, ce qui contredit ce qui précède. Par conséquent, l'hypothèse de départ n'est pas satisfaite : y n'est pas majorée. Or y est croissante, donc $\lim_{t \to \beta^-} y(t) = +\infty$.

Supposons qu'il existe $x > y(t_0)$ tel que $F(x) = 0$. Alors $t \mapsto x$ est solution de l'équation différentielle $w' = F(w)$, et $y(t_0) < x$; par la Proposition 1.4, $y(t) < x$ pour tout $t \in I$. La fonction y est donc majorée sur $[t_0, \beta)$. Par la première partie de cette démonstration, $\beta = +\infty$ et y converge en $+\infty$ vers un réel ℓ tel que $F(\ell) = 0$.

D'une part, comme $\ell > y(t_0)$ et $F(\ell) = 0$, on sait que $\ell \geq \inf\{x > y(t_0) : \ F(x) = 0\}$. D'autre part, soit $x > y(t_0)$ tel que $F(x) = 0$. De même que précédemment, $y(t) < x$ pour tout t, donc $\ell \leq x$. Par conséquent, $\ell \leq \inf\{x > y(t_0) : \ F(x) = 0\}$. On a bien montré que $\ell = \inf\{x > y(t_0) : \ F(x) = 0\}$. □

Exemple 3.3.
Justifiez que les solutions de l'équation différentielle $y' = \sin(y)$ *sont définies sur* $\mathbb{R}$. *Quelles sont les solutions constantes ? Quelles sont les limites possibles en* $+\infty$ *des solutions non constantes ? En* $-\infty$ *?*

Exemple 3.4 (Points d'inflexion)**.**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$, *et* y *une solution de l'équation différentielle* $w'(t) = F(w(t))$. *Supposons que* y *est non constante. Montrez qu'un point* t *est un point d'inflexion de* y *si et seulement si* $F'(y(t)) = 0$.

3.2 Vitesse de convergence

Quand y est majorée, la Proposition 3.2 ne dit rien sur la vitesse à laquelle y converge vers sa limite.

Proposition 3.5.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$, *et* $y : I \to \mathbb{R}$ *une solution de l'équation différentielle* $w'(t) = F(w(t))$. *Soit* $t_0 \in I$. *Supposons que* $F(y(t_0)) > 0$.

Supposons qu'il existe $x > y(t_0)$ *tel que* $F(x) = 0$. *Soit* $\ell := \lim_{t \to +\infty} y(t) = \inf\{x > y(t_0) : \ F(x) = 0\}$. *Supposons enfin que* $F'(\ell) \neq 0$. *Alors* $F'(\ell) < 0$. *De plus, pour tout* $\lambda < |F'(\ell)|$,

$$|y(t) - \ell| =_{+\infty} O\left(e^{-\lambda t}\right).$$

L'outil principal est le lemme de Grönwall.

Démonstration.
La fonction y est strictement croissante, et tend vers ℓ par valeurs inférieures. Il s'ensuit que $F(x) > 0$ pour tout $x < \ell$ suffisamment proche de ℓ. Or $F(\ell) = 0$, donc $F'(\ell) \leq 0$. Enfin, $F'(\ell) \neq 0$, donc $F'(\ell) < 0$.

Soit $\lambda < |F'(\ell)| = -F'(\ell)$. La fonction F' étant continue en ℓ, il existe $\delta > 0$ tel que $F'(x) \leq -\lambda$ dès que $|x - \ell| \leq \delta$.

Soit $t_1 \geq t_0$ tel que $|y(t) - \ell| \leq \delta$ pour tout $t \geq t_1$. Alors, pour tout $t \geq t_1$,

$$y'(t) = F(y(t)) = -\int_{y(t)}^{\ell} F'(x) \, \mathrm{d}x \geq -\int_{y(t)}^{\ell} (-\lambda) \, \mathrm{d}x = -\lambda(y(t) - \ell).$$

Par le lemme de Grönwall, pour tout $t \geq t_1$,

$$\ell \geq y(t) \geq \ell + (y(t_1) - \ell)e^{-\lambda(t - t_1)},$$

et donc

$$|y(t) - \ell| \leq |y(t_1) - \ell| e^{\lambda t_1} e^{-\lambda t}.$$ □

Exercice 3.6.
On se place sous les hypothèses de la Proposition 3.5. On suppose de plus que F est convexe sur un voisinage de ℓ. Montrez alors la conclusion plus forte suivante :

$$|y(t) - \ell| = O_{+\infty}\left(e^{-|F'(\ell)|t}\right).$$

Une variante de la Proposition 3.5, que nous ne démontrerons pas ici, est :

Proposition 3.7.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit ℓ tel que $F(\ell) = 0$ et $F'(\ell) < 0$. Alors il existe un voisinage ouvert J de ℓ ayant la propriété suivante.

Pour tout $\lambda < -F'(\ell)$, il existe C_λ tel que, pour toute solution y de l'équation différentielle $w'(t) = F(w(t))$ dont la condition initiale $y(0)$ est dans J, pour tout $t \geq 0$,

$$|y(t) - \ell| \leq C_\lambda e^{-\lambda t}.$$

Cette forme de stabilité est à mettre en parallèle d'un énoncé similaire pour les suites définies par récurrence autonome.

Proposition 3.8.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit ℓ tel que $F(\ell) = \ell$ et $|F'(\ell)| < 1$. Alors il existe un voisinage ouvert J de ℓ ayant la propriété suivante.

Pour tout $\lambda > |F'(\ell)|$, il existe C_λ tel que, pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la récurrence autonome $u_{n+1} = F(u_n)$ dont la condition initiale u_0 est dans J, pour tout $n \geq 0$,

$$|u_n - \ell| \leq C_\lambda \lambda^n.$$

3.3 Temps d'explosion

La Proposition 3.2 ne permet pas de déterminer si les solutions sont définies en tout temps quand elles ne sont pas majorées. On dispose cependant d'un critère simple permettant de caractériser l'explosion en temps fini des solutions.

Proposition 3.9. *Soient $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $y : I \to \mathbb{R}$ une solution (maximale) de l'équation différentielle $w'(t) = F(w(t))$. Soit $t_0 \in I$.*

Supposons que $F(x) > 0$ pour tout $x \geq y(t_0)$. Alors y est définie sur $[t_0, +\infty)$ si et seulement si

$$\int_{y(t_0)}^{+\infty} \frac{1}{F(s)}\, \mathrm{d}s = +\infty.$$

Démonstration.
Soit (α, β) l'intervalle de définition de y. Comme $F(y(t_0)) > 0$, la fonction y est strictement croissante.

L'équation différentielle $w'(t) = F(w(t))$ est à variables séparables. Posons, pour tout $x \geq y(t_0)$,

$$H(x) := \int_{y(t_0)}^{x} \frac{1}{F(s)}\, \mathrm{d}s,$$

Alors H est de classe $\mathcal{C}^1$ et $H \circ y$ est bien définie sur $[t_0, \beta)$. De plus, pour tout $t \in [t_0, \beta)$,

$$(H \circ y)'(t) = H'(y(t))y'(t) = \frac{F(y(t))}{F(y(t))} = 1.$$

Par conséquent, $H(y(t)) = H(y(t_0))+(t-t_0) = t-t_0$ pour tout $t \in [t_0, \beta)$. De plus, la fonction H est strictement croissante, donc admet une limite en $+\infty$. Enfin, par la Proposition 3.2, $\lim_{t\to\beta^-} y(t) = +\infty$. Par composition des limites,

$$\beta - t_0 = \lim_{t\to\beta^-} H(y(t)) = \lim_{x\to+\infty} H(x) = \int_{y(t_0)}^{+\infty} \frac{1}{F(s)} \, \mathrm{d}s.$$

Ainsi, cette dernière intégrale converge si et seulement si $\beta < +\infty$. □

Soit $\alpha > 0$, et y_α la solution de l'équation différentielle [8]

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t)^\alpha \\ y(0) &= 1 \end{cases}.$$

Par la proposition précédente, si $\alpha > 1$, alors y_α tend vers $+\infty$ en temps fini. À l'inverse, si $\alpha \in (0, 1]$, alors y_α est définie sur $\mathbb{R}_+$ (et en fait sur $\mathbb{R}$ tout entier, ce que l'on peut voir en considérant l'équation différentielle satisfaite par $t \mapsto y(-t)$). Le cas $\alpha = 1$, pour lequel la solution est la fonction exponentielle, est le cas critique, à la frontière entre ces deux régimes.

3.4 Vitesse de divergence

La Proposition 3.9 ne dit rien sur la vitesse à laquelle les solutions divergent. On peut parfois être plus précis. Ce qui suit n'est qu'un exemple qui peut s'adapter à de nombreuses situations.

Proposition 3.10. *Soient $\alpha \in (0, 1)$ et $c > 0$. Soient $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une solution (maximale) de l'équation différentielle $w'(t) = F(w(t))$, et supposons que y n'est pas majorée par un zéro de F.*
Si que $F(x) \sim_{x\to+\infty} cx^\alpha$, alors $y(t) \sim_{t\to+\infty} [c(1-\alpha)t]^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $M \geq 1$ tel que, pour tout $x \geq M$,

$$(1-\varepsilon)cx^\alpha \leq F(x) \leq (1+\varepsilon)cx^\alpha.$$

On sait que y est strictement croissante, définie sur $[t_0, +\infty)$ et que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$. Soit t_1 tel que $y(t) \geq M$ pour tout $t \geq t_1$. Alors, pour tout $t \geq t_1$,

$$(1-\varepsilon)cy(t)^\alpha \leq y'(t) \leq (1+\varepsilon)cy(t)^\alpha.$$

Comme $y(t) \geq M \geq 1$ pour tout $t \geq t_1$, la fonction $z : t \mapsto y(t)^{1-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$z'(t) = (1-\alpha)y'(t)y(t)^{1-\alpha-1} = (1-\alpha)y'(t)y(t)^{-\alpha},$$

et donc

$$(1-\varepsilon)c(1-\alpha) \leq z'(t) \leq (1+\varepsilon)c(1-\alpha).$$

En intégrant ces inégalités, on obtient

$$z(t_1) + (1-\varepsilon)c(1-\alpha)(t-t_1) \leq z(t) \leq z(t_1) + (1+\varepsilon)c(1-\alpha)(t-t_1).$$

Il existe donc t_2 tel que, pour tout $t \geq t_2$,

$$(1-2\varepsilon)c(1-\alpha)t \leq z(t) \leq (1+2\varepsilon)c(1-\alpha)t.$$

8. Exercice : Cette équation peut se résoudre explicitement !

Or ε est arbitraire. On a donc montré que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{z(t)}{c(1-\alpha)t} = 1.$$

En élevant cette égalité à la puissance $\frac{1}{1-\alpha}$, et en se souvenant que $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$, on obtient enfin

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{[c(1-\alpha)t]^{\frac{1}{1-\alpha}}} = 1,$$

ce qu'il fallait montrer. □

3.5 Exemple récapitulatif

Voyons ce qu'impliquent ces énoncé dans un cas simple. Soit y une solution maximale de l'équaiton différentielle logistique

$$w'(t) = w(t)(1 - w(t)).$$

Cette équation est de la forme précédente avec $F(x) = x(1-x)$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$. On peut la résoudre explicitement par séparation des variables. Si $y_0 \in (0,1)$, l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} w'(t) &= w(t)(1-w(t)) \\ w(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

est la fonction qui à $t \in \mathbb{R}$ associe

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1-y_0)e^{-(t-t_0)}}.$$

Les solutions constantes sont les fonctions $t \mapsto 0$ et $t \mapsto 1$.

Exercice 3.11.
Explicitez les solutions dont la condition initiale y_0 est ou bien strictement négative, ou bien strictement supérieure à 1.

Comme l'on dispose d'une formule explicite simple, on peut ensuite décrire le comportement des solutions par une analyse de fonction. Il est cependant instructif de voir ce que les outils d'analyse qualitative nous disent, sans avoir besoin de résoudre cette équation.
Les zéros de F sont les points 0 et 1. La fonction F est strictement positive sur $(0,1)$, nulle en 0 et 1, et strictement négative ailleurs.

3.5.1 Solutions bornées

Soit y une solution de l'équation différentielle telle que $y(t_0) \in (0,1)$. Alors $F(y(t_0)) > 0$, donc y est strictement croissante. De plus, comme $y(t_0)$ est compris entre deux points d'annulation de F, on sait que y est bornée, donc, par le lemme de majoration a priori, définie en tout temps. Enfin, par la Proposition 3.2,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \inf\{x > y_0 : \ F(x) = 0\} = 1,$$
$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = \sup\{x < y_0 : \ F(x) = 0\} = 0.$$

Une telle fonction a un unique point d'inflexion : l'unique temps t en lequel $y(t) = 1/2$ (car $1/2$ est l'unique point d'annulation de F').

On sait que $F'(1) = -1 < 0$. Par la Proposition 3.5, pour tout $\lambda < 1$,

$$|1 - y(t)| =_{+\infty} O\left(e^{-\lambda t}\right).$$

De même, pour tout $\lambda < 1$,

$$|y(t)| =_{-\infty} O\left(e^{\lambda t}\right).$$

3.5.2 Solutions non bornées

Soit y une solution de l'équation différentielle telle que $y(t_0) > 1$. Alors $F(y(t_0)) < 0$, donc y est strictement décroissante. De plus, y est minorée par 1. Elle est donc définie sur un intervalle de la forme $(\alpha, +\infty]$. Par la Proposition 3.2,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \sup\{x < y_0 : \ F(x) = 0\} = 1,$$
$$\lim_{t\to\alpha^+} y(t) = +\infty.$$

Une telle fonction n'a pas de point d'inflexion : elle est strictement convexe.
On sait que $F'(1) = -1 < 0$. Par la Proposition 3.5, pour tout $\lambda < 1$,

$$|1 - y(t)| =_{+\infty} O\left(e^{-\lambda t}\right).$$

Par l'Exercice 3.6, cela peut s'améliorer en

$$|1 - y(t)| =_{+\infty} O\left(e^{-t}\right).$$

Enfin, F est strictement négative sur $[y_0, +\infty)$, et

$$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{F(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{s(1-s)}\,\mathrm{d}s > -\infty.$$

Par conséquent, la solution y explose en temps (négatif) fini, c'est-à-dire que $\alpha > -\infty$.

Exercice 3.12.
Adaptez ce qui précède au cas où $y_0 < 0$.

4 Équations autonomes en dimension supérieure

Dans ce qui suit, on se donne une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. L'objectif est d'analyser qualitativement les solutions de l'équation différentielle $y'(t) = F(y(t))$.

4.1 Stabilité des points fixes

La première étape de l'analyse consiste à localiser les points d'annulation de F, c'est-à-dire les solutions constantes.

Étant donné un point d'annulation ℓ, on peut s'intéresser à sa nature. Celle-ci est en général assez facile à caractériser en dimension 1 ; la dimension supérieure est plus délicate. L'idée générale est que, près de ℓ, en écrivant $y(t) = \ell + z(t)$,

$$z'(t) = y'(t) = F(y(t)) = F(\ell + z(t)) = D_\ell F(z(t)) + o(\|z(t)\|).$$

En première approximation, z est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$z(t) \simeq e^{tD_\ell F} z(0).$$

La question – délicate – de la linéarisation des équaitons différentielles consiste à rendre rigoureuse cette approximation.

Nous allons démontrer dans ce qui suit un résultat qualitatif. On sait que, si A est une matrice telle que $\max\{\Re(z) : \ z \in \mathrm{Sp}(A)\} < 0$, alors $e^{tA}\vec{v}$ converge à vitesse exponentielle vers 0 pour tout vecteur $\vec{v}$. Cela se démontre, par exemple, *via* une rédution de Jordan de A. Nous allons montrer un énoncé similaire pour les solutions d'une équation différentielle, qui généralise la Proposition 3.7 à la dimension supérieure.

Proposition 4.1.
Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit ℓ tel que $F(\ell) = 0$. Posons

$$\lambda_{\max} := \max\{\Re(z) : \ z \in Sp(D_\ell F)\} < 0.$$

Supposons $D_\ell F$ diagonalisable[9]*. Alors il existe un voisinage ouvert J de ℓ ayant la propriété suivante.*

Pour tout $\lambda < -\lambda_{\max}$, il existe C_λ tel que, pour toute solution y de l'équation différentielle $w'(t) = F(w(t))$ dont la condition initiale $y(0)$ est dans J, pour tout $t \geq 0$,

$$|y(t) - \ell| \leq C_\lambda e^{-\lambda t}.$$

Démonstration.
Comme dans la démonstration de la Proposition 3.7, nous allons utiliser le lemme de Grönwall. Quitte à changer l'origine du repère (ou quitte à remplacer F par $x \mapsto F(\ell + x)$ et y par $y - \ell$), on peut supposer que $\ell = 0$. Sans perte de généralité, nous supposerons de plus que $\lambda \leq -\lambda_{\max}/2$.

La jacobienne $D_0 F$ étant diagonalisable, on se donne une base $(\vec{e}_i)$ de vecteurs propres, (L_i) les formes linéaires associées, et (λ_i) les valeurs propres associées. Posons $\omega(x) := F(x) - D_0 F(x)$.

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$h(x) := \sum_{i=1}^{n} [L_i(x)]^2.$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|x\| := \sqrt{h(x)}$.
Soit y une solution de l'équation différentielle $w'(t) = F(w(t))$. Alors

$$(h \circ y)'(t) = D_{y(t)} h(y'(t)) = 2 \sum_{i=1}^{n} L_i(y(t)) L_i(y'(t))$$

Mais, pour tout i,

$$L_i(y'(t)) = L_i(F(y(t))) = L_i(D_0 F(y(t))) + L_i(\omega(y(t))) = \lambda_i L_i(y(t)) + L_i(\omega(y(t))).$$

On en déduit que

$$(h \circ y)'(t) = 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(y(t))^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} L_i(y(t)) L_i(\omega(y(t))).$$

9. La proposition reste vraie sans cette hypothèse, mais celle-ci simplifiera la démonstration.

Enfin, en prenant les parties réelles,

$$\begin{aligned}(h\circ y)'(t) &= 2\sum_{i=1}^{n}\Re(\lambda_i)L_i(y(t))^2 + 2\sum_{i=1}^{n}L_i(y(t))L_i(\omega(y(t)))\\ &\leq 2\lambda_{\max}h\circ y(t) + 2\sum_{i=1}^{n}L_i(y(t))L_i(\omega(y(t))).\end{aligned}$$

La fonction h est une forme quadratique définie positive. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $h(x) \geq \alpha\left\|x\right\|^2$ pour tout x. Soit $\lambda \in (0, -\lambda_{\max})$. Il existe $\varepsilon_\lambda > 0$ tel que [10], pour tout $x \in B(0, \varepsilon_\lambda)$,

$$\left\|\omega(x)\right\| \leq \frac{\lambda}{n}\left\|x\right\|.$$

Si $y(t) \in B(0, \varepsilon_\lambda)$, alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n}L_i(y(t))L_i(\omega(y(t)))\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left\|L_i\right\|^2\left\|y(t)\right\|\left\|\omega(y(t))\right\| \leq \frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|y(t)\right\|^2 = \lambda h(y(t)).$$

Ainsi,

$$(h\circ y)'(t) \leq 2(\lambda_{\max}+\lambda)h\circ y(t).$$

La fonction h décroît le long des trajectoires, donc la boule $B(0,\varepsilon_\lambda) = \{x : \ h(x) \leq \varepsilon_\lambda^2\}$ est stable. Par le lemme de Grönwall, si $y(0) \in B(0, \varepsilon_\lambda)$,

$$\begin{aligned}h(y(t)) &\leq e^{2(\lambda_{\max}+\lambda)t}h(y(0))\\ \left\|y(t)\right\| &\leq e^{(\lambda_{\max}+\lambda)t}\left\|y(0)\right\|.\end{aligned}$$

On pose $J := B(0, \varepsilon_{-\lambda_{\max}/2})$. Soit $t_1 \geq 0$ tel que

$$\varepsilon_{-\frac{\lambda_{\max}}{2}}e^{\frac{\lambda_{\max}}{2}t_1} \leq \varepsilon_\lambda.$$

Posons $B_\lambda := \varepsilon_\lambda e^{\lambda t_1}$. Si $y(0) \in J$, alors $y(t_1) \in B(0, \varepsilon_\lambda)$, et donc

$$\left\|y(t\right\| \leq e^{-\lambda(t-t_1)}\left\|y(t_1)\right\| \leq B_\lambda e^{-\lambda t}$$

pour tout $t \geq t_1$. Si $t \in [0, t_1]$, alors

$$\left\|y(t\right\| \leq \varepsilon_{-\frac{\lambda_{\max}}{2}}e^{\frac{\lambda_{\max}}{2}t} \leq \varepsilon_\lambda e^{\frac{\lambda_{\max}}{2}(t-t_1)} \leq \varepsilon_\lambda e^{-\lambda(t-t_1)} = B_\lambda e^{-\lambda t}.$$

La borne souhaitée est donc valable pour tout $t \geq 0$.

Finalement, par équivalence des normes, il existe une constante M telle que $|x| \leq M\left\|x\right\|$ pour tout x, d'où

$$|y(t)| \leq MB_\lambda e^{-\lambda t}$$

dès que $y(0) \in J$. On a démontré le théorème, avec $C_\lambda = MB_\lambda$. □

10. Attention : dans ce qui suit, la boule est prise dans la nouvelle norme euclidienne. Ceci ne change pas le fait que cette boule est un voisinage de 0.

4.2 Invariants

Des outils puissants dans l'analyse des trajectoires d'équations différentielles autonomes sont les **invariant**.

Définition 4.2. *Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \to R$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que $\mathcal{I}$ est un* ***invariant*** *de l'équation différentielle si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$D_x\mathcal{I} \cdot F(x) = 0,$$

i.e. si les champs de vecteurs $\nabla_x\mathcal{I}$ et $F(x)$ sont orthogonaux en tout point.

Proposition 4.3.
Soit $\mathcal{I}$ un invariant de l'équation différentielle $w'(t) = F(w(t))$ et y une solution de cette équation différentielle. Alors $\mathcal{I} \circ y$ est constante : pour tout t, la trajectoire de y est incluse dans l'ensemble de niveau $\mathcal{I}(y(t))$ de $\mathcal{I}$.

Démonstration. La fonction $\mathcal{I} \circ y$ est $\mathcal{C}^1$ et, pour tout t,

$$(\mathcal{I} \circ y)'(t) = D_{y(t)}\mathcal{I} \cdot y'(t) = D_{y(t)}\mathcal{I} \cdot F(y(t)) = 0.$$

Or la fonction y est définie sur un intervalle, donc $\mathcal{I} \circ y$ aussi, donc $\mathcal{I} \circ y$ est constante. $\square$

Une source très importante d'invariants est donnée par l'énergie en physique... Mais aussi, pour des systèmes isolés, par la quantité de mouvement ou le moment cinétique [11].

4.2.1 Pendule harmonique

Considérons un pendule harmonique en une dimension, dont le mouvement obéit à l'équation différentielle

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

On se ramène à une équation différentielle d'ordre 1 en deux dimensions. Posons $v := x'$ la vitesse du pendule. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{k}{m}x \end{pmatrix}.$$

Le champ de vecteur correspondant est $F(x, v) = (v, -\frac{k}{m}x)$. L'unique point d'annulation de ce champ de vecteurs est $(0, 0)$.

L'énergie totale du système est

$$\mathcal{I}(x, v) := \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

On calcule aisément

$$\nabla_{(x,v)}\mathcal{I} = \begin{pmatrix} kx \\ mv \end{pmatrix},$$

qui est bien orthogonal à $F(x, v)$. La fonction $\mathcal{I}$ est un invariant du système. Les trajectoires sont donc incluses dans les ensembles de niveau de $\mathcal{I}$, qui sont des ellipses. Les ellipses étant bornées, les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

Sauf pour l'orbite triviale $(x, v) = (0, 0)$, les orbites sont parcourues à vitesse strictement positive ; comme elles sont compactes, elles sont parcourues à vitesse bornée inférieurement. Or les ellipses

11. Sans parler d'invariants plus exotiques, tels que le vecteur de Laplace-Runge-Lenz dans le système de gravitation à deux corps, qui explique le fait que les orbites des planètes sont périodiques.

sont de longueur finie. Elles sont donc parcourues en temps fini. Ainsi, pour toute solution (x, v), il existe T tel que

$$x(T) = x(0), \quad v(T) = v(0).$$

Mais alors, $t \mapsto (x(T+t), v(T+t))$ est une autre solution de l'équation différentielle satisfaisant aux mêmes conditions initiales. Elle coïncide donc avec (x, v) , autrement dit, pour tout t,

$$x(t+T) = x(t), \quad v(t+T) = v(t).$$

Le mouvement est donc périodique de période T. À ce niveau d'analyse, cette période pourrait dépendre de la condition initiale ; ce n'est pas le cas pour le pendule harmonique, comme on peut l'observer par une résolution explicite du système.

4.2.2 Pendule gravitationnel

Passons au pendule gravitationnel, dont le mouvement obéit à l'équation différentielle

$$x''(t) = -\frac{g}{l} \sin(x(t)).$$

On se ramène à une équation différentielle d'ordre 1 en deux dimensions. Posons $v := x'$ la vitesse *angulaire* [12] du pendule. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{g}{l}\sin(x(t)) \end{pmatrix}.$$

Le champ de vecteur correspondant est $F(x, v) = (v, -\frac{g}{l}\sin(x(t)))$. En 0, on sait que $\sin(x) \sim x$; ce champ de vecteurs est donc proche de celui d'un pendule harmonique (avec $k/m = g/l$). Il n'est pas a priori évident [13] que cela implique que les solutions des deux systèmes sont proches.

Ce champ de vecteurs s'annule pour $(2k\pi, 0)$ et en $((2k+1)\pi, 0)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Ces deux familles de points fixes sont de natures différentes : la première correspond à une configuration (stable) où le pendule reste à sa position la plus basse, la seconde à une configuration (instable) où le pendule reste à sa position la plus élevée.

L'énergie totale du système est

$$\mathcal{I}(x, v) := -mgl\cos(x) + \frac{1}{2}ml^2v^2.$$

On calcule aisément

$$\nabla_{(x,v)}\mathcal{I} = \begin{pmatrix} mgl\sin(x) \\ mv \end{pmatrix},$$

qui est bien orthogonal à $F(x, v)$. La fonction $\mathcal{I}$ est un invariant du système. Les trajectoires sont donc incluses dans les ensembles de niveau de $\mathcal{I}$. Les solutions sont de plusieurs type, suivant l'énergie du système :

- ▷ Si $\mathcal{I} = -mgl$: Solution constante stable $(x, v) = (2k\pi, 0)$.
- ▷ Si $mgl > \mathcal{I} > -mgl$: Les ensembles de niveau sont des unions disjointes de courbes fermées. Par le même argument que pour le pendule harmonique, les trajectoires sont périodiques (le pendule fait un va-et-vient). Cette fois-ci, la période dépend de la trajectoire, et donc de l'écartement initial du pendule. Cependant, dans le régime des petites oscillations ((x, v) proche de $(0, 0)$), cette période est proche de celle donnée par l'équation linéarisée.

12. La vitesse réelle étant alors ℓv, ce qui explique l'expression de l'énergie cinétique dans ce qui suit.
13. Mais pas faux ; cela demande une analyse plus fine et du soin dans l'énonciation des propriétés mathématiques des solutions.

- ▷ Si $\mathcal{I} > mgl$: l'angle est strictement monotone, et la vitesse est périodique. Le pendule fait des tours entiers.
- ▷ Si $\mathcal{I} = mgl$: le pendule peut être en équilibre instable. Il peut aussi s'approcher en $\pm\infty$ d'un tel équilibre instable ; autrement dit, le pendule met un temps infini à parcourir un seul tour.

4.2.3 Équations de Lotka-Volterra

L'équation de Lotka-Volterra modélise l'évolution coinjointe des populations de deux espèces, une proie et un prédateur. Étant donnés 4 paramètres α, β, γ, $\delta > 0$, ce système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & \alpha x(t) - \beta x(t) y(t) \\ y'(t) & = & -\gamma y(t) + \delta x(t) y(t). \end{array} \right. ,$$

où x est la population de proies et y celle de prédateurs. Les fonctionx x et y modélisant des populations, nous sommes particulièrement intéressés par les solutions positives de ces équations.

Ce système possède exactement deux solutions constantes : $(0,0)$ et $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$. Il possède aussi des solutions non constantes intéressantes :

- ▷ $x(t) = 0$ et $y(t) = e^{-\gamma t} y(0)$: en l'absence de proies, la population de prédateurs diminue exponentiellement vite.
- ▷ $x(t) = e^{\alpha t} x(0)$ et $y(t) = 0$: en l'absence de prédateurs, la population de proies augmente exponentiellement vite.

En particulier, la courbe $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}_+$ est l'union d'exactement trois trajectoires : la trajectoire constante $(0,0)$, et les deux trajectoires particulières ci-dessus. Or, dans un système autonome vérifiant les conditions de Cauchy, les trajectoires sont disjointes. Si $x(0) > 0$ ou $y(0) > 0$, alors la trajectoire du système n'est pas l'une des trois précédentes, donc ne peut pas croiser l'une des trois précédentes, donc ne peut pas traverser l'ensemble $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}_+$. Autrement dit, une trajectoire qui est dans le quadrant supérieur droit en un temps reste dans le quadrant supérieur droit en tout temps : les populations ne s'éteignent pas, ni ne deviennent négatives.

Posons, pour tous x, $y > 0$,

$$\mathcal{I}(x,y) := \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y).$$

Alors

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (x(\alpha - \beta y), y(-\gamma + \delta x)), \\ \nabla_{(x,y)} \mathcal{I} &= (\delta - \gamma/x, \beta - \alpha/y), \end{aligned}$$

et l'on vérifie que F et $\nabla \mathcal{I}$ sont bien orthogonaux. La fonction $\mathcal{I}$ est bien un invariant des trajectoires.

Passons en coordonnées polaire, en écrivant $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x,y) &\geq (\delta \wedge \beta)(x+y) - (\alpha \vee \gamma) \ln(xy) \\ &= (\delta \wedge \beta) r (\cos(\theta) + \sin(\theta)) - (\alpha \vee \gamma) \ln(r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) \\ &\geq (\delta \wedge \beta) r - 2(\alpha \vee \gamma) \ln(r), \end{aligned}$$

et le membre de droite tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Par conséquent, $\lim_{(x,y)\to\infty} \mathcal{I}(x,y) = +\infty$. En particulier, les ensembles de niveau de $\mathcal{I}$ sont bornés. Or les trajectoires sont incluses dans les ensembles de niveau, donc sont elles aussi bornées. Par le lemme de majoration a priori, les solutions strictement positives de l'équation de Lotka-Volterra sont définies en tout temps.

Une analyse plus poussée des ensebmles de niveau de la fonction $\mathcal{I}$ montre que ces ensemble de niveau, sauf l'ensemble de niveau $\mathcal{I}(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ sont des courbes fermées. Par les arguments développés précédemment, cela implique que les solutions strictement positives de l'équation de Lotka-Volterra sont périodiques.