Leçon 222 : Fonctions de plusieurs variables. Dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Exemples.

Prérequis

Connaissances préalables :
- ▷ Équivalence des normes en dimension finie.
- ▷ Dérivée d'une fonction réelle d'une variable réelle.
- ▷ Intégrales et primitives.

Dans ce qui suit, on se donne :
- ▷ p, $q \geq 1$ deux entiers.
- ▷ $U \subset \mathbb{R}^p$ et $V \subset \mathbb{R}^q$ deux ouverts non vides.
- ▷ $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ et $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_q)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement.
- ▷ $f : U \to V$.

Exceptionnellement, comme en géométrie affine, nous utiliserons la notation $\vec{v}$ afin de mieux distinguer les *points* et les *vecteurs tangents*. Cette notion n'est pas à connaître, et en particulier les flèches peuvent être ignorées.

Dérivées directionnelles

Définition : Soit $a \in U$ et $\vec{u} \in \mathbb{R}^p$. La **dérivée directionnelle** de f en a dans la direction $\vec{u}$ est la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto f(a + t\vec{u})$, c'est-à-dire la limite, si elle existe,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t}.$$

On note alors cette quantité $D_a f(\vec{v})$.

Attention : D'autres notations pour la dérivée directionnelle, en particulier les notations $D_{\vec{v}} f(a)$ et $d_a f(\vec{v})$, existent. La notation précédente me semble l'une des plus cohérentes avec ce qui suit.

Définition : Soit $1 \leq i \leq p$. La i-ème **dérivée partielle** de f est la dérivée directionnelle de f dans la direction $\vec{e}_i$. On la note

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{e}_i) - f(a)}{t}.$$

Autrement dit, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en un point, on fixe les coordonnées $(x_j)_{j \neq i}$, et on dérive la fonction d'une variable réelle $x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_p)$.

Attention : Là encore, d'autres notations existent, comme par exemple $\partial_{x_i} f$. On prendra garde aussi à ce que, dans une expression du type

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n),$$

le symbole x_i joue deux rôles distincts : direction dans laquelle on dérive au dénominateur, et une des coordonnées en laquelle on évalue la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ au numérateur.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et telle que $f(0, 0) = 0$ admet des dérivées partielles en tout point (les calculer !), mais n'est pas continue.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ et telle que $f(0, y) = 0$ pour tout y admet des dérivées directionnelle en toute direction en $(0, 0)$, mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

On peut trouver des exemples un peu plus sophistiqués de fonctions admettant des dérivées directionnelles en tout point et toute direction sans être continues ; la simple existence de dérivées directionnelle est donc trop faible pour contrôler une fonction.

Différentielle

Définition : Soit $a \in U$. On dit que f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $D_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ telle que

$$f\left(a + \vec{h}\right) = f(a) + D_a f\left(\vec{h}\right) + o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right).$$

Attention : N'essayez pas d'affaiblir cette définition, cela ne marchera pas ! Même si f admet des dérivées directionnelles dans toute direction et si ces dérivées directionnelles dépendent linéairement de la direction, il se peut encore que f ne soit pas différentiable !

Lemme : Si f est différentiable en a, alors l'application $D_a f$ est unique.

Lemme : Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Exemples/Exercices : Montrer que les applications suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle.

- ▷ $x \mapsto \|x\|^2$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
- ▷ $M \mapsto (M^T)M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition : Supposons que f admette des dérivées partielles en un point a. La **matrice jacobienne** de f en a et la matrice

$$\mathrm{Jac}_a f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Lemme : Si f est différentiable en a, alors $\mathrm{Jac}_a f$ est la matrice de $D_a f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. Autrement dit,

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \vec{h}_i.$$

Remarque : Il faut éviter de confondre les lignes et les colonnes ! Pour s'en souvenir :

- ▷ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, alors la différentielle est un vecteur colonne. Il n'y a qu'une seule variable, donc $\mathrm{Jac}_a f$ a bien une colonne par variable.
- ▷ Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, alors la différentielle est un vecteur ligne. Donc $\mathrm{Jac}_a f$ a bien une ligne par dimension de l'espace d'arrivée.

Définition : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en a. Dans ce cas, $D_a f$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$, dont la matrice dans la base canonique est un vecteur ligne. Le **gradient** de f en a est le vecteur $\vec{\nabla} f \in \mathbb{R}^p$ tel que, pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^p$,

$$\langle \vec{\nabla} f, \vec{h} \rangle = D_a f(\vec{h})$$

Ses coordonnées dans une base orthonormée sont les transposées de celles de $D_a f$:

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p} \end{pmatrix}.$$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition : On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ si f est différentiable en tout point, et si la fonction

$$\left\{ \begin{array}{lcl} U & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \\ a & \mapsto & D_a f \end{array} \right.$$

est continue.

Théorème : Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues.

Remarque : Il s'agit du principal résultat de cette leçon, dont la démonstration est un développement incoutournable. Grâce à ce théorème, on peut montrer facilement que des fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple : La fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times (-\pi, \pi) & \to & \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \\ (r, \theta) & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, et sa matrice jacobienne est

$$\mathrm{Jac}_{(r,\theta)}\, f = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\det(\mathrm{Jac}_{(r,\theta)}\, f) = r$ ne s'annule pas.

Propriétés de la différentielle

Propriété (somme) : Soient f, $g : U \to \mathbb{R}^q$. Soit $a \in U$. Si f et g sont différentiables en a, alors $f + g$ aussi, et

$$D_a(f+g) = D_a f + D_a g.$$

En particulier, une somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Propriété (composition) : Soient p, q, r trois entiers strictement positifs. Soient U, V, W trois ouverts non vides de $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^r$ respectivement. Soient $f : U \to V$ et $g : V \to W$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a, et

$$D_a(g \circ f) = (D_{f(a)}g)(D_a f).$$

En particulier, la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque : Il est ici important de ne pas inverser les lignes et les colonnes de la matrice jacobienne !

Exemple : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin. Supposons f et γ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b (D_{\gamma(t)} f)(\vec{\gamma}'(t))\, \mathrm{d}t = \int_a^b \langle \vec{\nabla}_{\gamma(t)} f, \vec{\gamma}'(t) \rangle\, \mathrm{d}t.$$

Propriété (produit) : Soient f, $g : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. Si f et g sont différentiables en a, alors fg aussi, et

$$D_a(fg) = f(a) \cdot D_a g + g(a) \cdot D_a f.$$

En particulier, un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple : La fonction $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par ce qui précède. Elle est donc différentiable en I. En calculant sa matrice jacobienne, on montre que $D_I \det = \mathrm{Tr}$.

Exemple : La fonction $x \mapsto \|x\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et non différentiable en 0.

Autour du théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis est faux si la dimension de l'espace d'arrivée q est supérieure ou égale à 2 ; considérer par exemple une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui paramètre une spirale, ou une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui paramètre la lettre γ. Il existe des variantes plus techniques, que nous n'aborderons pas ; nous ne mentionnerons que l'*inégalité* des accroissements finis. De plus, la géométrie du domaine est importante.

Théorème : Supposons U convexe. Supposons de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tous a, $b \in U$,

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \max_{c \in [a,b]} \|D_c f\| \cdot \|b - a\| .$$

Ici, les normes sont toutes les normes euclidiennes standards [1].

Corollaire : Si U est convexe, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \mapsto D_a f$ est bornée, alors f est lipschitzienne, de semi-norme lipschitzienne au plus $\sup_{a \in U} \|D_a f\|$.

Corollaire : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est localement lipschitzienne.

Références

Dans les références, ce contenu est parfois traité trop vite sur le chemin de théorèmes plus difficiles (inversion locale, fonctions implicites...). Je conseille par exemple le livre de **Skandalis**, ou **[AC] : *Topologie et analyse*. Auliac, Caby**, même si d'autres références peuvent convenir.

Un des obstacles à cette leçon est le manque d'uniformité des notations dans les références. Choisissez une référence, et utilisez les notations de cette référence.

1. La norme appliquée à la matrice $D_c f$ peut être remplacée par la norme subordonnée aux normes euclidiennes standards de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.