Défis 3 : Intégration

Tous les programmes sont à rédiger en Python ou Sage, et à écrire sous forme de fonctions, dans un même fichier. Vous êtes encouragés à utiliser un notebook (Jupyter).

N'hésitez pas à vous renseigner pour résoudre des problèmes !

Les exercices marqués d'une étoile sont pour ceux qui veulent aller plus loin.

Il est bien connu que

$$I := \int_0^1 \frac{\arctan\left(\sqrt{2+t^2}\right)}{(1+t^2)\sqrt{2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{5\pi^2}{96}.$$

Si, cependant, on n'arrive pas à retrouver cette intégrale par un calcul exact [1], nous disposons d'outils numériques !

Exercice 1. Implémentez les méthodes suivantes d'estimation numérique de I. Chaque méthode sera implémentée à l'aide d'une fonction d'un paramètre N, qui sera le nombre de subdivisions de l'intervalle $[0, 1]$.

- ▷ Somme de Riemann avec des subdivisions régulières, points à gauche des subdivisions (méthode des rectangles).
- ▷ Somme de Riemann avec des subdivisions régulières, points milieu des subdivisions.
- ▷ Méthode des trapèzes.
- ▷ Méthode de Simpson.
- ▷ * Méthode de Gauss-Legendre à 2 points (dans chaque intervalle de la subdivision)

Comparez expérimentalement la précision de ces méthodes.

Exercice 2. * Tracez sur un même graphique log − log l'erreur en fonction du nombre de subdivisions pour ces différentes méthodes. Commentez.

Exercice 3. ** La fonction que l'on cherche à intégrer a des valeurs comprises entre 0 et $\pi/2$. Tirez une suite de points i.i.d. uniformément dans le rectangle $[0, 1] \times [0, \pi/2]$, sélectionnez ceux sous le graphe de la fonction, et déduisez-en une approximation (aléatoire) de I.
Commentez l'erreur commise.

Exercice 4. * Utilisez la méthode des rectangles à gauche pour évaluer numériquement l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = 2.$$

Commentez l'erreur commise.

1. Qui, il est vrai, demande *un peu* d'ingéniosité. Voir *Ahmed's integral : the maiden solution*, Z. Ahmed, arXiv :1411.5169v2, décembre 2014.