

Feuille d'exercices n°1 : Matrices, bases et applications linéaires

Applications linéaires

Exercice I

Existe-t-il une application linéaire entre K -espaces vectoriels, avec $K = \mathbf{R}$, telle que

- l'image d'une droite vectorielle soit une demi-droite (ouverte/fermée)?
- l'image d'un plan vectoriel soit un plan vectoriel privé de l'origine?
- l'image d'un plan vectoriel privé de l'origine soit une droite vectorielle?
- (*) que pouvez-vous dire de (b) et (c) pour K un corps quelconque?

Exercice II

Pour les familles de vecteurs $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ suivantes, existe-t-il une application linéaire permettant de passer de \mathcal{F} à \mathcal{F}' ? Si oui est-elle unique?

- Les vecteurs de \mathbf{R}^2 : $e_1 = (1, 0), e_2 = (3, 2), e_3 = (1, -2)$ et les vecteurs de \mathbf{R}^2 : $e'_1 = (0, 1), e'_2 = (0, -2), e'_3 = (-2, 4)$ (dessiner les vecteurs dans ce cas);
- Les vecteurs de \mathbf{C}^3 : $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ et les vecteurs de \mathbf{C}^3 : $e'_1 = (0, 0, 0), e'_2 = (0, 0, 1), e'_3 = (1, 0, 0)$;
- Les vecteurs de \mathbf{R}^3 : $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1), e_4 = (1, 1, 1)$ et les vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$: $e'_1 = X^3, e'_2 = X^2, e'_3 = X, e'_4 = 1$;
- Les vecteurs de $\mathbf{R}_4[X]$: $e_1 = 1 + X^4, e_2 = X^2$ et les vecteurs de \mathbf{R}^2 : $e'_1 = (2, -1), e'_2 = (3, 0)$;
- Les vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$: $e_1 = 2X + 1, e_2 = X^3 + X^2 + X, e_3 = 2X^3 + 2X^2 + 1$ et les vecteurs de $\mathbf{R}_2[X]$: $e'_1 = 1 + X, e'_2 = 2 + 2X, e'_3 = 3 + 3X$;
- Les vecteurs de $\mathbf{C}_4[X]$, $e_1 = (1, 1, 1, 0), e_2 = (0, i, i, i), e_3 = (-1, 1, 1, 2)$ et les matrices de $M_2(\mathbf{C})$ $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice III

Si A est la matrice associée à une application linéaire f dans des bases quelconques, montrer que le rang de f est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de A .

Exercice IV

Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application définie par $f(e_1) = e'_1$ et $f(e_2) = e'_2$. Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image des vecteurs v_i , donner la matrice de f dans la base canonique, puis l'expression de $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Identifier la transformation du plan définie par f .

- pour $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1), e'_1 = (1, 1), e'_2 = (-1, 1)$ et $v_1 = (2, 0), v_2 = (2, 1)$;
- pour $e_1 = (1, 1), e_2 = (0, 1), e'_1 = (4, 1), e'_2 = (3, 1)$ et $v_1 = (1, 0), v_2 = (2, -1)$;
- pour $e_1 = (3, 3), e_2 = (0, -3), e'_1 = (1, 2), e'_2 = (-2, -4)$ et $v_1 = (1, 2), v_2 = (2, 1)$.

Exercice V

On considère les applications linéaires $f_i : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ définies pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par $f_1(x, y) = (y, x), f_2(x, y) = \left(\frac{2x+y}{4}, \frac{2x+y}{2}\right)$ et $f_3(x, y) = \left(\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2}\right)$.

- Représenter l'image de la base canonique pour chacune de ces applications. Préciser leur nature.
- Donner les matrices associées à ces applications. Ces matrices sont-elles équivalentes?

Exercice VI

Quelles sont les classes d'équivalences des matrices de $M_{n,1}(\mathbf{R})$?

Exercice VII

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont équivalentes?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -6 & 4 \\ 3 & 7 & -7 & 4 \\ 4 & 8 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bases et espaces vectoriels

Exercice VIII

Les familles de fonctions suivantes sont-elles libres ?

- (a) $\{\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \exp(kx)\}_{k=\{1,\dots,n\}}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$;
- (b) $\{\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^k\}_{k=\{0,\dots,n\}}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$;

Exercice IX

On considère l'ensemble $M_2(\mathbf{C})$ des matrices 2×2 à coefficients dans \mathbf{C} .

- (1) Rappelez pourquoi $M_2(\mathbf{C})$ est un \mathbf{C} -espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
- (2) Montrer que $M_2(\mathbf{C})$ est un \mathbf{R} -espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
- (3) Réciproquement, est-ce que $M_2(\mathbf{R})$ est un \mathbf{C} -espace vectoriel ?

Exercice X

- (1) Pour $x, y, z \in \mathbf{R}$ calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix}.$$

- (2) En déduire une équation cartésienne du sous-espace vectoriel H de \mathbf{R}^3 engendré par les vecteurs de coordonnées $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 4)$.
- (3) Montrer que H est le noyau d'une forme linéaire $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ et donner sa matrice dans les bases canoniques de \mathbf{R}^3 et \mathbf{R} .

Exercice XI (★)

Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n . Montrer qu'un vecteur u de E appartient au sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs si et seulement si $\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, u) = 0$.

Exercice XII

Soit E un espace vectoriel de dimension n . On désigne par $E^* = L(E, \mathbf{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur E . Remarquer que E^* est un espace vectoriel, préciser sa dimension et donner une base.

Exercice XIII (★)

Montrer qu'un sous-espace vectoriel est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Algèbre

Exercice XIV

Montrer que la relation " A est équivalente à B " est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbf{R})$

Exercice XV

- (1) Montrer qu'une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est une matrice de passage si et seulement si elle est inversible.
- (2) Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est un groupe multiplicatif. Est-il commutatif ?

Exercice XVI (★)

L'ensemble $M_{n,p}(\mathbf{R})$ est-il un groupe multiplicatif ?

Exercice XVII (★)

- (1) Montrer que la famille de quatre matrices de $M_2(\mathbf{C})$ suivante est libre : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$
- (2) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par cette famille forme une algèbre.
- (3) Montrer qu'il forme un corps.

Exercice XVIII

Soit K un corps. Soit $P \in K[X]$. Soit $\lambda \in K$. Montrer que $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $(X - \lambda)$ divise le polynôme P .