

Feuille d'exercices n°3 : Espaces euclidiens et espaces affines

Espaces euclidiens

Exercice I

Dans \mathbf{R}^3 , soit p le projecteur orthogonal sur \mathcal{P} d'équation $x + 2y - 2z = 0$ et u le vecteur $u = (1, 1, 1)$. Déterminer l'image $p(u)$ de u . En déduire la distance $d(u, \mathcal{P})$.

Exercice II

Soit $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire associée à M

dans la base canonique. Montrer que f est une isométrie et préciser sa nature.

Exercice III

Pour $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, on définit $\varphi(A, B) = \text{Tr}(^tAB)$. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbf{R})$.

Exercice IV

(D'après le partiel 2020)

(1) Dans \mathbf{R}^2 muni du produit scalaire usuel, démontrer que pour tout $u, v \in \mathbf{R}^2$ de norme 1, il existe une unique réflexion r telle que $r(u) = v$. Préciser ses éléments caractéristiques.

(2) Lorsque $u = (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $v = (-1, 0)$, représenter ces éléments caractéristiques sur un schéma, puis donner la matrice associée à la réflexion dans la base canonique.

Exercice V

(D'après le partiel 2020). Soit E un espace euclidien de dimension n . Soient u, v deux vecteurs orthogonaux non nuls de E et de norme 1. On note F le sous-espace vectoriel engendré par u et v . Pour tout $x \in E$, on pose

$$f(x) = x - \langle u, x \rangle u - \langle v, x \rangle v.$$

(1) Montrer que pour tout x , $f(x) \in F^\perp$.

(2) Montrer que f est une projection orthogonale et préciser ses caractéristiques géométriques.

(3) Dans \mathbf{R}^3 , on choisit $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, -1, 1)$. En adaptant le résultat précédent, exprimer à l'aide de u et v la projection orthogonale de mêmes caractéristiques que dans la question précédente.

Exercice VI

Soit $y \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|y\| = 1$. Pour tout x de \mathbf{R}^n , on pose

$$f(x) = x - 2\langle x, y \rangle y.$$

(1) Montrer que f est une isométrie et préciser sa nature.

(2) On choisit $n = 3$ et $y = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de f s'écrit simplement? Comment obtenir alors la matrice de f dans la base canonique?

Exercice VII

Soit (u, v) une famille orthonormée de vecteurs de \mathbf{R}^n . Pour tout x de \mathbf{R}^n , on pose

$$f(x) = x - \langle x, u + v \rangle u - \langle x, v - u \rangle v.$$

Montrer que f est une isométrie et préciser sa nature. Donner sa matrice dans une base bien choisie.

Exercice VIII (★)

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel euclidien E . Montrer que p est orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice IX (★)

(1) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que pour $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$,

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(\alpha) Q^{(k)}(\alpha)$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de P , définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

(2) Montrer qu'il existe une unique base (P_0, \dots, P_n) orthonormale pour le produit scalaire φ telle que chaque P_i soit de degré i et de terme de degré maximal positif.

(3) Calculer $P_i^{(k)}(\alpha)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Systèmes d'équations affines

Exercice X

On note F l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ vérifiant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 4y - 6z = -2. \end{cases}$$

- (1) Montrer que F est un sous-espace affine de \mathbf{R}^3 et préciser sa direction \vec{F} . Quelle est la nature de F ? Donner une équation paramétrique de F .
- (2) Écrire ce système sous forme matricielle, puis à l'aide d'une application linéaire f . Identifier le sous-espace affine F à l'aide de f .
- (3) Interpréter le système d'équations à l'aide d'hyperplans.

Exercice XI

Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ un paramètre.

- (1) À quelles conditions sur λ les deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = \lambda - 1 \\ x - 3y + \lambda z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} y + z = -\lambda + 2 \\ \lambda x - 2z = 0 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites affines de \mathbf{R}^3 ?

- (2) On suppose les conditions du 1. satisfaites. Trouver pour chaque droite son équation paramétrique.
- (3) Étudier selon la valeur de λ les positions relatives de ces 2 droites. On précisera lorsqu'elles sont parallèles, confondues, sécantes.

Exercice XII

Soient α, β, a, b, c des réels. On considère trois plans P_1, P_2 et P_3 de \mathbf{R}^3 , d'équations respectives : $x + 2y + \beta z = a$, $2x + 4y = b$ et $\alpha x + (\alpha + 1)y = c$. Déterminer, suivant les valeurs de α, β, a, b, c , la dimension du sous-espace affine $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ (si cette intersection est non vide).

Exercice XIII

On note F l'ensemble des quintuplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5$ vérifiant le système d'équations affine suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

Montrer que F est un sous-espace affine de \mathbf{R}^5 , donner sa dimension, sa direction \vec{F} et une base de celle-ci.

Droites et plans dans \mathbf{R}^3

Exercice XIV

On se place dans \mathbf{R}^3 .

- (1) Déterminer une équation du plan V engendré par les vecteurs $(1, 2, 1)$ et $(0, 1, 1)$ et passant par l'origine.
- (2) Déterminer une équation du plan V' parallèle à V et passant par le point $(0, 0, 1)$. Quelle est son équation paramétrique?
- (3) Soit D la droite passant par $(1, 0, 0)$ et dirigée par le vecteur $(1, 0, 1)$. Déterminer les points d'intersection de V' et de D .

Exercice XV

Déterminer une équation de la droite de \mathbf{R}^3 passant par les points $(1, 1, 1)$ et $(1, 0, 2)$.

Exercice XVI

Dans l'espace \mathbf{R}^3 , on considère le plan P d'équation $x + y + z = 1$.

- (1) Déterminer une équation de plan P' passant par les points $(2, -1, 0)$, $(0, 0, 2)$ et $(-1, 1, 2)$.
- (2) Déterminer la nature de $\vec{P} \cap \vec{P}'$.
- (3) Dédire de la question précédente que $P \cap P'$ est non vide, et préciser sa nature.
- (4) Déterminer les caractéristiques géométriques de $P \cap P'$ (point et base de sa direction).

Autres exemples d'espaces affines

Exercice XVII

Déterminer parmi les sous-ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces affines de \mathbf{R}^3 et préciser alors leurs directions et leurs dimensions.

- (1) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 2y + z = 1\}$
- (2) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 2y + z = 1 \text{ et } x = y = 0\}$
- (3) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$
- (4) $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$
- (5) $V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + 2xy + y^2 = 1\}$

Exercice XVIII

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note E_n l'espace vectoriel des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} qui sont polynomiales de degré inférieur ou égal à n . Soit $F_0 = \{f \in E_n, \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ et $F_1 = \{f \in E_n, \int_0^1 f(t)dt = 1\}$. (1) Montrer que F_0 est un \mathbf{R} -espace vectoriel.

- (2) Montrer que F_1 est un espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est F_0 . Quelle est la dimension de F_1 ?
- (3) On suppose $n = 4$. Montrer que la partie V de F_1 formée des polynômes divisibles par $(x - \frac{1}{2})^2$ est un plan affine de F_1 .

Exercice XIX

Soit a et b deux réels. Montrer que les suites de réels $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \geq 0$ est un sous-espace affine de l'espace vectoriel des suites réelles. Préciser la dimension de ce sous-espace affine.

Exercice XX

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$, on note $F = \{P \in E, P'(0) = 1\}$.

- (1) Montrer que F est un sous-espace affine de E .
- (2) On suppose que $E = \mathbf{R}_5[X]$. Déterminer la nature de F ainsi qu'une base de sa direction.
- (3) On suppose ici que $E = \mathbf{R}[X]$. Montrer que F est un hyperplan affine.

Exercices théoriques

Exercice XXI (★)

Soit E un espace affine.

- (1) Soit F une partie non vide de E . Montrer que F est un sous-espace affine de E si et seulement si toute droite passant par deux points distincts de F est contenue dans F .
- (2) Décrire le sous-espace affine engendré par deux droites affines non coplanaires dans un espace affine.
- (3) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces affines de E . Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Exercice XXII (★)

On considère deux sous-espaces affines V et W d'un espace affine E et on note T le sous-espace affine engendré par $V \cup W$. (1) Pour tout $a \in V$ et tout $b \in W$, montrer qu'on a $\vec{T} = \vec{V} + \vec{W} + \text{Vect}(\vec{ab})$.

- (2) Pour tout $a \in V$ et tout $b \in W$, montrer que V rencontre W si et seulement si le vecteur \vec{ab} est dans $\vec{V} + \vec{W}$.
- (3) En déduire que $\dim T = \dim(\vec{V} + \vec{W}) + 1$ si V ne rencontre pas W , et que $\dim T = \dim(\vec{V} + \vec{W})$ sinon.

Transformations affines-Définitions

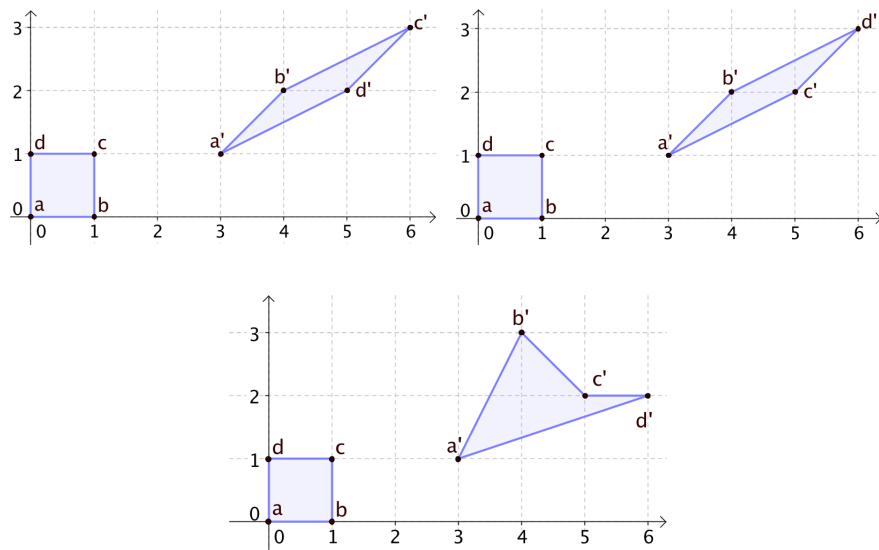
Exercice XXIII

Dans \mathbf{R}^2 , on note $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$, $c = (1, 1)$ et $d = (0, 1)$. Représenter l'image de $abcd$ par les applications affines suivantes :

- (1) l'application g telle que $g(a) = c$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de \vec{g} dans la base canonique ;
- (2) l'application h telle que $h(a) = d$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de \vec{h} dans la base canonique. (3) h et g sont-elles égales ? Donner une application affine envoyant $g(a), g(b), g(c)$ sur $h(a), h(b), h(c)$. Ecrire la matrice de son application linéaire associée. Que constate-t-on ?

Exercice XXIV

Soit f une application affine qui envoie $abcd$ sur $a'b'c'd'$, comme indiqué sur l'une des figures suivantes.



- (1) Justifier que f ne définit une application affine que dans un seul des cas représentés. Montrer qu'elle est alors unique.
- (2) f est-elle bijective ?
- (3) Donner la matrice de l'application linéaire associée dans la base (\vec{ab}, \vec{ad}) puis dans la base (\vec{ab}, \vec{ac}) . En déduire l'expression matricielle de f dans le repère (a, b, c) .

Exercice XXV

Déterminer toutes les applications affines d'un espace affine de dimension 1.

Translations-Homothéties

Exercice XXVI

Démontrer qu'une application affine qui commute avec toutes les translations est elle-même une translation.

Exercice XXVII

On définit quatre points $a = (1, 1)$, $a' = (-2, 2)$, $b = (1, 3)$ et $b' = (-2, 1)$. Montrer qu'il existe une homothétie h transformant a en a' et b en b' . Préciser son centre et son rapport.

Exercice XXVIII

Soit f une transformation affine du plan. Soient a, b et c trois points non alignés. On note a', b' et c' les images respectives de a, b et c par f . On suppose que $(a'b')$ est parallèle à (ab) , $(a'c')$ à (ac) et $(b'c')$ à (bc) . Montrer que f est une homothétie ou une translation.

Exercice XXIX (*)

(Théorème de Desargues.) Soient deux triangles non aplatis abc et $a'b'c'$ sans sommets communs. On suppose que (ab) est parallèle à $(a'b')$, que (bc) est parallèle à $(b'c')$ et que (ac) est parallèle à $(a'c')$. Montrer que les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles.

Exercice XXX

Soit E un espace affine, a et b deux points (non nécessairement distincts) de E et λ, μ deux réels non nuls et différents de 1. On note h l'homothétie de centre a et de rapport λ et h' celle de centre b et de rapport μ .

- (1) On suppose $\lambda\mu = 1$. Déterminer la nature de $h' \circ h$ et $h \circ h'$.
- (2) On suppose $\lambda = 1/3$ et $\mu = 2$. Déterminer $h' \circ h$ et $h \circ h'$.

Exercice XXXI

Montrer que 2 homothéties commutent si et seulement si elles ont le même centre.