

## Feuille d'exercices n°3 : Espaces euclidiens et espaces affines

### Espaces euclidiens

#### Exercice I

Dans  $\mathbf{R}^3$ , soit  $p$  le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + 2y - 2z = 0$  et  $u$  le vecteur  $u = (1, 1, 1)$ . Déterminer l'image  $p(u)$  de  $u$ . En déduire la distance  $d(u, \mathcal{P})$ .

#### Exercice II

Soit  $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$  et soit  $f$  l'application linéaire associée à  $M$

dans la base canonique. Montrer que  $f$  est une isométrie et préciser sa nature.

#### Exercice III

Pour  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ , on définit  $\varphi(A, B) = \text{Tr}({}^t AB)$ . Montrer que  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $M_n(\mathbf{R})$ .

#### Exercice IV

(D'après le partiel 2020)

(1) Dans  $\mathbf{R}^2$  muni du produit scalaire usuel, démontrer que pour tout  $u, v \in \mathbf{R}^2$  de norme 1, il existe une unique réflexion  $r$  telle que  $r(u) = v$ . Préciser ses éléments caractéristiques.

(2) Lorsque  $u = (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$  et  $v = (-1, 0)$ , représenter ces éléments caractéristiques sur un schéma, puis donner la matrice associée à la réflexion dans la base canonique.

#### Exercice V

(D'après le partiel 2020). Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soient  $u, v$  deux vecteurs orthogonaux non nuls de  $E$  et de norme 1. On note  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $u$  et  $v$ . Pour tout  $x \in E$ , on pose

$$f(x) = x - \langle u, x \rangle u - \langle v, x \rangle v.$$

(1) Montrer que pour tout  $x$ ,  $f(x) \in F^\perp$ .

(2) Montrer que  $f$  est une projection orthogonale et préciser ses caractéristiques géométriques.

(3) Dans  $\mathbf{R}^3$ , on choisit  $u = (1, 1, 1)$  et  $v = (1, -1, 1)$ . En adaptant le résultat précédent, exprimer à l'aide de  $u$  et  $v$  la projection orthogonale de mêmes caractéristiques que dans la question précédente.

#### Exercice VI

Soit  $y \in \mathbf{R}^n$  tel que  $\|y\| = 1$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}^n$ , on pose

$$f(x) = x - 2\langle x, y \rangle y.$$

(1) Montrer que  $f$  est une isométrie et préciser sa nature.

(2) On choisit  $n = 3$  et  $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de  $f$  s'écrit simplement ? Comment obtenir alors la matrice de  $f$  dans la base canonique ?

#### Exercice VII

Soit  $(u, v)$  une famille orthonormée de vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}^n$ , on pose

$$f(x) = x - \langle x, u + v \rangle u - \langle x, v - u \rangle v.$$

Montrer que  $f$  est une isométrie et préciser sa nature. Donner sa matrice dans une base bien choisie.

#### Exercice VIII (★)

Soit  $p$  un projecteur d'un espace vectoriel euclidien  $E$ . Montrer que  $p$  est orthogonal si et seulement si pour tout  $x \in E$ ,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ .

#### Exercice IX (★)

(1) Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Montrer que pour  $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ ,

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)$$

où  $P^{(k)}$  désigne la dérivée  $k$ -ième de  $P$ , définit un produit scalaire sur  $\mathbf{R}_n[X]$ .

(2) Montrer qu'il existe une unique base  $(P_0, \dots, P_n)$  orthonormale pour le produit scalaire  $\varphi$  telle que chaque  $P_i$  soit de degré  $i$  et de terme de degré maximal positif.

(3) Calculer  $P_i^{(k)}(\alpha)$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ .

## Systèmes d'équations affines

### Exercice X

On note  $F$  l'ensemble des  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  vérifiant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 4y - 6z = -2. \end{cases}$$

- (1) Montrer que  $F$  est un sous-espace affine de  $\mathbf{R}^3$  et préciser sa direction  $\vec{F}$ . Quelle est la nature de  $F$ ? Donner une équation paramétrique de  $F$ .
- (2) Écrire ce système sous forme matricielle, puis à l'aide d'une application linéaire  $f$ . Identifier le sous-espace affine  $F$  à l'aide de  $f$ .
- (3) Interpréter le système d'équations à l'aide d'hyperplans.

### Exercice XI

Soient  $\lambda \in \mathbf{R}$  un paramètre.

- (1) À quelles conditions sur  $\lambda$  les deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = \lambda - 1 \\ x - 3y + \lambda z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} y + z = -\lambda + 2 \\ \lambda x - 2z = 0 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites affines de  $\mathbf{R}^3$ ?

- (2) On suppose les conditions du 1. satisfaites. Trouver pour chaque droite son équation paramétrique.
- (3) Étudier selon la valeur de  $\lambda$  les positions relatives de ces 2 droites. On précisera lorsqu'elles sont parallèles, confondues, sécantes.

### Exercice XII

Soient  $\alpha, \beta, a, b, c$  des réels. On considère trois plans  $P_1, P_2$  et  $P_3$  de  $\mathbf{R}^3$ , d'équations respectives :  $x + 2y + \beta z = a$ ,  $2x + 4y = b$  et  $\alpha x + (\alpha + 1)y = c$ . Déterminer, suivant les valeurs de  $\alpha, \beta, a, b, c$ , la dimension du sous-espace affine  $P_1 \cap P_2 \cap P_3$  (si cette intersection est non vide).

### Exercice XIII

On note  $F$  l'ensemble des quintuplets  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5$  vérifiant le système d'équations affine suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

Montrer que  $F$  est un sous-espace affine de  $\mathbf{R}^5$ , donner sa dimension, sa direction  $\vec{F}$  et une base de celle-ci.

### Droites et plans dans $\mathbf{R}^3$

### Exercice XIV

On se place dans  $\mathbf{R}^3$ .

- (1) Déterminer une équation du plan  $V$  engendré par les vecteurs  $(1, 2, 1)$  et  $(0, 1, 1)$  et passant par l'origine.
- (2) Déterminer une équation du plan  $V'$  parallèle à  $V$  et passant par le point  $(0, 0, 1)$ . Quelle est son équation paramétrique?
- (3) Soit  $D$  la droite passant par  $(1, 0, 0)$  et dirigée par le vecteur  $(1, 0, 1)$ . Déterminer les points d'intersection de  $V'$  et de  $D$ .

### Exercice XV

Déterminer une équation de la droite de  $\mathbf{R}^3$  passant par les points  $(1, 1, 1)$  et  $(1, 0, 2)$ .

### Exercice XVI

Dans l'espace  $\mathbf{R}^3$ , on considère le plan  $P$  d'équation  $x + y + z = 1$ .

- (1) Déterminer une équation de plan  $P'$  passant par les points  $(2, -1, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$  et  $(-1, 1, 2)$ .
- (2) Déterminer la nature de  $\vec{P} \cap \vec{P}'$ .
- (3) Déduire de la question précédente que  $P \cap P'$  est non vide, et préciser sa nature.
- (4) Déterminer les caractéristiques géométriques de  $P \cap P'$  (point et base de sa direction).

## Autres exemples d'espaces affines

### Exercice XVII

Déterminer parmi les sous-ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces affines de  $\mathbf{R}^3$  et préciser alors leurs directions et leurs dimensions.

- (1)  $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 2y + z = 1\}$
- (2)  $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 2y + z = 1 \text{ et } x = y = 0\}$
- (3)  $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$
- (4)  $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$
- (5)  $V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + 2xy + y^2 = 1\}$

### Exercice XVIII

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . On note  $E_n$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  qui sont polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n$ . Soit  $F_0 = \{f \in E_n, \int_0^1 f(t)dt = 0\}$  et  $F_1 = \{f \in E_n, \int_0^1 f(t)dt = 1\}$ . (1) Montrer que  $F_0$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

- (2) Montrer que  $F_1$  est un espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est  $F_0$ . Quelle est la dimension de  $F_1$  ?  
(3) On suppose  $n = 4$ . Montrer que la partie  $V$  de  $F_1$  formée des polynômes divisibles par  $(x - \frac{1}{2})^2$  est un plan affine de  $F_1$ .

### Exercice XIX

Soit  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer que les suites de réels  $(u_n)_{n \geq 0}$  vérifiant  $u_{n+1} = au_n + b$  pour tout  $n \geq 0$  est un sous-espace affine de l'espace vectoriel des suites réelles. Préciser la dimension de ce sous-espace affine.

### Exercice XX

Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}[X]$ , on note  $F = \{P \in E, P'(0) = 1\}$ .

- (1) Montrer que  $F$  est un sous-espace affine de  $E$ .
- (2) On suppose que  $E = \mathbf{R}_5[X]$ . Déterminer la nature de  $F$  ainsi qu'une base de sa direction.
- (3) On suppose ici que  $E = \mathbf{R}[X]$ . Montrer que  $F$  est un hyperplan affine.

## Exercices théoriques

### Exercice XXI (\*)

Soit  $E$  un espace affine.

- (1) Soit  $F$  une partie non vide de  $E$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace affine de  $E$  si et seulement si toute droite passant par deux points distincts de  $F$  est contenue dans  $F$ .
- (2) Décrire le sous-espace affine engendré par deux droites affines non coplanaires dans un espace affine.
- (3) Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux sous-espaces affines de  $E$ . Montrer que  $F_1 \cup F_2$  est un sous-espace affine de  $E$  si et seulement si  $F_1 \subset F_2$  ou  $F_2 \subset F_1$ .

### Exercice XXII (\*)

On considère deux sous-espaces affines  $V$  et  $W$  d'un espace affine  $E$  et on note  $T$  le sous-espace affine engendré par  $V \cup W$ . (1) Pour tout  $a \in V$  et tout  $b \in W$ , montrer qu'on a  $\vec{T} = \vec{V} + \vec{W} + \text{Vect}(\vec{ab})$ .

- (2) Pour tout  $a \in V$  et tout  $b \in W$ , montrer que  $V$  rencontre  $W$  si et seulement si le vecteur  $\vec{ab}$  est dans  $\vec{V} + \vec{W}$ .
- (3) En déduire que  $\dim T = \dim(\vec{V} + \vec{W}) + 1$  si  $V$  ne rencontre pas  $W$ , et que  $\dim T = \dim(\vec{V} + \vec{W})$  sinon.

## Transformations affines-Définitions

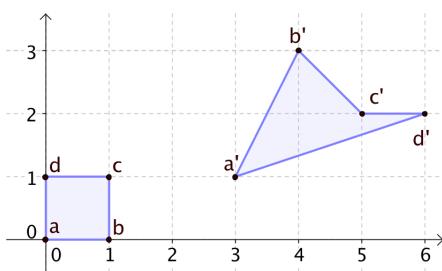
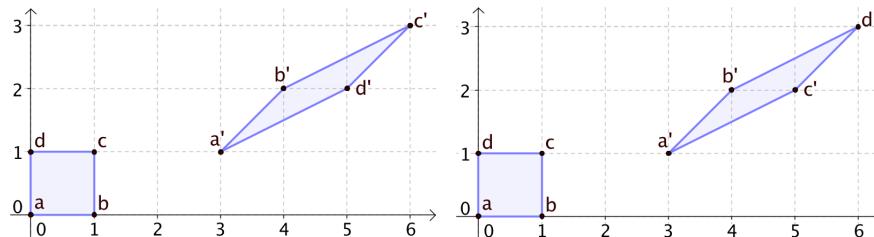
### Exercice XXIII

Dans  $\mathbf{R}^2$ , on note  $a = (0, 0)$ ,  $b = (1, 0)$ ,  $c = (1, 1)$  et  $d = (0, 1)$ . Représenter l'image de  $abcd$  par les applications affines suivantes :

- (1) l'application  $g$  telle que  $g(a) = c$  et  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice de  $\vec{g}$  dans la base canonique ;
- (2) l'application  $h$  telle que  $h(a) = d$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice de  $\vec{h}$  dans la base canonique. (3)  $h$  et  $g$  sont-elles égales ? Donner une application affine envoyant  $g(a), g(b), g(c)$  sur  $h(a), h(b), h(c)$ . Ecrire la matrice de son application linéaire associée. Que constate-t-on ?

### Exercice XXIV

Soit  $f$  une application affine qui envoie  $abcd$  sur  $a'b'c'd'$ , comme indiqué sur l'une des figures suivantes.



- (1) Justifier que  $f$  ne définit une application affine que dans un seul des cas représentés. Montrer qu'elle est alors unique.
- (2)  $f$  est-elle bijective ?
- (3) Donner la matrice de l'application linéaire associée dans la base  $(\vec{ab}, \vec{ad})$  puis dans la base  $(\vec{ab}, \vec{ac})$ . En déduire l'expression matricielle de  $f$  dans le repère  $(a, b, c)$ .

### Exercice XXV

Déterminer toutes les applications affines d'un espace affine de dimension 1.

### Translations-Homothéties

#### Exercice XXVI

Démontrer qu'une application affine qui commute avec toutes les translations est elle-même une translation.

#### Exercice XXVII

On définit quatre points  $a = (1, 1)$ ,  $a' = (-2, 2)$ ,  $b = (1, 3)$  et  $b' = (-2, 1)$ . Montrer qu'il existe une homothétie  $h$  transformant  $a$  en  $a'$  et  $b$  en  $b'$ . Préciser son centre et son rapport.

#### Exercice XXVIII

Soit  $f$  une transformation affine du plan. Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois points non alignés. On note  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  les images respectives de  $a$ ,  $b$  et  $c$  par  $f$ . On suppose que  $(a'b')$  est parallèle à  $(ab)$ ,  $(a'c')$  à  $(ac)$  et  $(b'c')$  à  $(bc)$ . Montrer que  $f$  est une homothétie ou une translation.

#### Exercice XXIX (★)

(*Theorème de Desargues.*) Soient deux triangles non aplatis  $abc$  et  $a'b'c'$  sans sommets communs. On suppose que  $(ab)$  est parallèle à  $(a'b')$ , que  $(bc)$  est parallèle à  $(b'c')$  et que  $(ac)$  est parallèle à  $(a'c')$ . Montrer que les droites  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  sont concourantes ou parallèles.

#### Exercice XXX

Soit  $E$  un espace affine,  $a$  et  $b$  deux points (non nécessairement distincts) de  $E$  et  $\lambda, \mu$  deux réels non nuls et différents de 1. On note  $h$  l'homothétie de centre  $a$  et de rapport  $\lambda$  et  $h'$  celle de centre  $b$  et de rapport  $\mu$ .

- (1) On suppose  $\lambda\mu = 1$ . Déterminer la nature de  $h' \circ h$  et  $h \circ h'$ .
- (2) On suppose  $\lambda = 1/3$  et  $\mu = 2$ . Déterminer  $h' \circ h$  et  $h \circ h'$ .

#### Exercice XXXI

Montrer que 2 homothéties commutent si et seulement si elles ont le même centre.