Chapitre 3

Espaces et applications affines.

Ces notes ont été rédigées par Mélanie GUENAIS (2020-2022), et reprises par Damien THOMINE (2022-2026).

Ce texte contient de nombreux passages en gris. Ceux-ci pourront-être passé en première lecture. Ces passages contiennent cependant de nombreuses démonstrations ; s'il n'est pas important (ni souhaitable) de les apprendre, cela peut être un exercice instructif d'essayer de les faire soi-même.

Dans ce chapitre, $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel [1]. Nous ferons attention à distinguer, dans la mesure du possible, les vecteurs (notés avec une flèche) et les éléments d'un espace affine (notés sans flèche).

I Systèmes d'équations affines

Un sous-espace vectoriel est souvent donné sous l'une des deux formes suivantes :

- sous forme paramétrique, c'est-à-dire comme ensemble des combinaisons linéaires de certains vecteurs ;
- sous forme cartésienne, c'est-à-dire comme ensemble des vecteurs satisfaisant certaines équations linéaires.

La première méthode revient à écrire un certain sous-espace $\overrightarrow{V}$ comme image d'un morphisme, et la deuxième méthode comme noyau d'un morphisme. Nous allons étendre ces deux points de vue aux sous-espaces affines.

I.1 Définition d'un sous-espaces affine

Les sous-espaces affines généralisent les sous-espaces vectoriels en leur ajoutant un terme constant. Les espaces correspondants ne sont plus en général des sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{E}$, car ils ne contiennent pas en général le vecteur nul. Nous allons donner une définition générale de sous-espace affine, avant d'aborder spécifiquement leurs représentations paramétriques et cartésiennes.

Définition I.1 (Sous-espace affine)**.**

1. Dans le cadre ce ce chapitre, sur $\mathbb{R}$, mais on pourra remplacer $\mathbb{R}$ par n'importe quel corps : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, et bien d'autres.

*Une partie $V \subset \overrightarrow{E}$ est un **sous-espace affine** de $\overrightarrow{E}$ s'il existe $a \in \overrightarrow{E}$ et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{V}$ de $\overrightarrow{E}$ tels que*

$$V = a + \overrightarrow{V} = \left\{ a + \overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{V} \right\}.$$

Le point a n'est pas unique : n'importe quel point de V convient. Le sous-espace $\overrightarrow{V}$, lui est déterminé par V.

Propriété I.2.
Soit V un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$. Pour tout $a \in V$,

$$\overrightarrow{V} = \{v - a : \ v \in V\}.$$

*En particulier, $\overrightarrow{V}$ est déterminé par V. On appelle ce sous-espace vectoriel la **direction** de V. La **dimension** de V est celle de sa direction $\overrightarrow{V}$.*

PREUVE : Soient $a \in \overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{V} \subset \overrightarrow{E}$ tels que $V = a + \overrightarrow{V}$.

Soit $v \in V$. Alors il existe $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{V}$ tel que $v = a + \overrightarrow{v}$. Mais alors $v - a = \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{V}$, donc $\{v - a : \ v \in V\} \subset \overrightarrow{V}$.

Réciproquement, soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{V}$. Alors $v := a + \overrightarrow{v} \in V$ et $\overrightarrow{v} = v - a$, donc $\overrightarrow{v} \in \{v - a : \ v \in V\}$. Par conséquent, $\overrightarrow{V} \subset \{v - a : \ v \in V\}$. □

I.2 Représentations paramétriques de sous-espaces affines

Pour obtenir une représentation paramétrique d'un sous-espace affine, il suffit d'ajouter un terme constant à une représentation paramétrique de sous-espace vectoriel.

Proposition I.3 (Représentation paramétrique d'un sous-espace affine, version 1)**.**
Une partie $V \subset \overrightarrow{E}$ est un sous-espace affine de dimension k de $\overrightarrow{E}$ s'il existe $a \in \overrightarrow{E}$ et une famille libre de vecteurs $(\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_k)$ tels que :

$$\begin{aligned} V &= a + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_k) \\ &= a + \mathbb{R}\overrightarrow{v}_1 + \dots + \mathbb{R}\overrightarrow{v}_k \\ &= \left\{ a + \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{v}_i, \ (t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k \right\}. \end{aligned}$$

*Une telle représentation est une **représentation paramétrique** de V.*

PREUVE : Il suffit en effet de prendre pour $(\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_k)$ une base de $\overrightarrow{V}$. □

I.3 Représentations cartésiennes de sous-espaces affines

Les représentations cartésiennes se généralisent en autorisant des termes constants non nulles dans les équations cartésiennes. Elles présentent une difficulté supplémentaire : le système d'équations ainsi défini n'a pas nécessairement de solution ; or, un sous-espace affine n'est pas vide [2]. De par la proposition qui suit, c'est la seule difficulté possible.

2. Du moins, avec les conventions de ce cours.

Proposition I.4.
Soient $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{F}$ deux espaces vectoriels, $\overrightarrow{f} \in L(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$ et $b \in \overrightarrow{F}$. Alors :

- ▷ *ou bien $b \notin Im(\overrightarrow{f})$, auquel cas $\overrightarrow{f}^{-1}(\{b\})$ est vide ;*
- ▷ *ou bien $b \in Im(\overrightarrow{f})$, auquel cas $\overrightarrow{f}^{-1}(\{b\})$ est un sous-espace affine de direction* $\mathrm{Ker}(f)$.

En particulier, l'ensemble V des vecteurs $v \in \overrightarrow{E}$ dont les coordonnées X sont solutions d'une équation affine $AX = B$ est vide ou est un sous-espace affine. Dans ce second cas, la direction de V est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $AX = 0$.

Preuve : Les deux possibilités ($b \notin \mathrm{Im}(f)$ ou $b \in \mathrm{Im}(f)$) sont mutuellement disjointes, et la première est bien équivalente à $\overrightarrow{f}^{-1}(\{b\}) = \emptyset$. Supposons donc que $b \in \mathrm{Im}(f)$, et soit $a \in \overrightarrow{f}^{-1}(\{b\})$. Alors, pour tout $v \in \overrightarrow{E}$:

$$\begin{aligned} v \in \overrightarrow{f}^{-1}(\{b\}) &\iff \overrightarrow{f}(v) = b \\ &\iff \overrightarrow{f}(v-a) = 0 \\ &\iff v - a \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f}) \\ &\iff v \in a + \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f}) = \{a + w,\ w \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f})\}. \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{f}^{-1}(\{b\}) = a + \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f})$ est bien un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f})$. □

On peut ainsi étendre la notion de représentation cartésienne aux sous-espaces affines.

Définition I.5 (Représentation cartésienne d'un sous-espace affine, version 1)**.**
*Soit V un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$. Une **représentation cartésienne** de V est une écriture*

$$V = \left\{ v \in \overrightarrow{E} \;:\; \ell_1(v) = y_1, \cdots, \ell_m(v) = y_m \right\},$$

*où $(\ell_1, \cdots, \ell_m)$ est une famille **libre** de formes linéaires sur $\overrightarrow{E}$; ou encore, une écriture de V comme ensemble des vecteurs $v \in \overrightarrow{E}$ dont les coordonnées X sont solutions d'une équation affine $AX = B$, où les lignes de A sont libres.*

La condition que les lignes de A soient libres implique que A est surjective, donc que V est non vide, donc – par la Proposition I.4 – que V est un sous-espace affine. On montre finalement que tout sous-espace affine (admettant donc une représentation paramétrique) admet une représentation cartésienne.

Proposition I.6. *Soit V un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$. Posons $m := \mathrm{codim}(V) = \mathrm{dim}(\overrightarrow{E}) - \mathrm{dim}(V)$. Alors il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}^m$ surjective et $a \in \overrightarrow{E}$ tels que*

$$V = a + \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f}).$$

Preuve : Par définition des sous-espaces affines, $\overrightarrow{V}$ est engendré par une famille libre de $\mathrm{dim}(V) = n - m$ vecteurs $(\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_{n-m})$. On complète cette famille en une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_n)$ de $\overrightarrow{E}$.

Soit $i \in \{k+1, \ldots, n\}$. Notons $\overrightarrow{\ell}_i$ l'unique[3] forme linéaire telle que $\overrightarrow{\ell}_i(\overrightarrow{v}_i) = 1$, et $\overrightarrow{\ell}_i(\overrightarrow{v}_j) = 0$ pour tout $j \neq i$. Alors $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{\ell}_i) = \{\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{E} \;:\; W_i = 0\}$, où W est le vecteur coordonnées de w dans la base $\mathscr{B}$.

Posons $\overrightarrow{f} := (\overrightarrow{\ell}_{k+1}, \ldots, \overrightarrow{\ell}_n)$. Il s'agit d'une application linéaire de $\overrightarrow{E}$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$. De plus, $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f}) = \{\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{E} \;:\; W_{k+1} = \ldots = W_n = 0\} = \overrightarrow{V}$.

Il suffit de choisir n'importe que $a \in V$ pour obtenir l'écriture $V = a + \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f})$. De plus, $\overrightarrow{f}$ est surjective, car son image inclut la base canonique de $\mathbb{R}^m$. $\square$

Conséquence I.7.

Tout sous-espace affine admet une représentation cartésienne.

Remarque I.8.

Les représentations paramétriques et cartésiennes d'un sous-espace vectoriel ou affine ont leurs propres avantages ou inconvénient. Par exemple, une représentation paramétrique permet de trouver rapidement des éléments d'un sous-espace affine, ou de représenter graphiquement ce sous-espace ; une représentation cartésienne d'un sous-espace affine permet de vérifier rapidement si un point donné est dans ce sous-espace ou non.

I.4 Écriture matricielle des sous-espaces affines

On fixe une base $\mathscr{B}$ de $\overrightarrow{E}$. Tout vecteur de $\overrightarrow{E}$ est alors identifiable à ses coordonnées X dans cette base.

Définition I.9.

- ▷ *On appelle système (d'équations) affine associé à $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, l'équation matricielle $AX = B$ avec $X \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.*
- ▷ *L'équation $AX = 0$ s'appelle* ***système homogène*** *associé.*
- ▷ *On dit que V est d'équation $AX = B$ si*

$$V = \left\{ v \in \overrightarrow{E} ;\; AX = B \right\}$$

En particulier, le sous-ensemble de $\overrightarrow{E}$ solution de l'équation $AX = B$ est :

- ▷ ou bien vide,
- ▷ ou bien un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$.

Réciproquement, tout sous-espace affine est solution d'un système d'équations affines $AX = B$.

Donner les **solutions d'un système**, c'est donner une représentation paramétrique de l'ensemble solution V.

Plus généralement, il faudra savoir passer d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, et réciproquement. La méthode la plus sûre consiste à travailler en deux temps :

- ▷ Dans le cas vectoriel, cela est déjà supposé connu. Cela permet d'obtenir une représentation paramétrique ou cartésienne des directions des solutions.

3. Rappelons qu'une application linéaire est déterminée par son action sur une base !

▷ Un point de l'espace permet de déterminer les données restantes de la représentation paramétrique ou catésienne du sous-espace affine.

Détaillons ce deuxième point.

Si l'on dispose d'une représentation paramétrique $V = a + \overrightarrow{V}$, on peut donc trouver une application linéaire $\overrightarrow{f}$ telle que $\overrightarrow{V} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f})$. Il suffit alors de choisir $b = \overrightarrow{f}(a)$ pour obtenir l'écriture $V = \overrightarrow{f}^{-1}(\{b\})$.

Si l'on dispose d'une représentation cartésienne $V = \overrightarrow{f}^{-1}(\{b\})$, on peut donc trouver une famille génératrice de $\overrightarrow{V} = \mathrm{Ker}(f)$. Il suffit alors de trouver un point $a \in V$, c'est-à-dire ici une solution de l'équation $AX = B$, pour obtenir l'écriture $V = a + \overrightarrow{V}$.

Exercice 1. Quelle est la nature de l'ensemble d'équation $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? Retrouvez l'application linéaire associée à la matrice, identifiez dans quel espace sont les solutions à ce système, puis donnez les solutions de ce système.

Exercice 2. Déterminez les matrices associées à l'intersection de deux sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 2$ et $x - 2y - z = 3$. Donnez une représentation paramétrique de cette intersection.

Exercice 3. Déterminez une représentation cartésienne de $V = \{(3 + t, 2 + t, 1 + 2t),\ t \in \mathbb{R}\}$ et de $W = \{(3s + t - 1, 2s + t, s + 2t + 3),\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Ces derniers exercices sont très fortement conseillés !

II Espaces affines

La notion d'**espace affine** généralise la construction précédente. Elle permet notamment d'englober de nouveaux exemples, comme le plan euclidien étudié en géométrie à partir de l'école primaire.

II.1 Définition

La principale différence entre un sous-espace affine et un sous-espace vectoriel est, qu'en général, on ne peut pas additionner deux élément d'un sous-espaces affine. Si $V \subset \overrightarrow{E}$ est un sous-espace affine, la somme de deux éléments de V n'est en général pas dans V : l'addition n'est pas une loi de composition *interne* de V.

Cependant, on dispose d'un espace vectoriel associé $\overrightarrow{V} = \{v - w : v, w \in V\}$. De plus, on peut ajouter des points de V à des vecteurs de $\overrightarrow{V}$: la somme est alors bien dans V.

Enfin, si l'on choisit un point base $a \in V$, alors $V = a + \overrightarrow{V}$ est en bijection avec $\overrightarrow{V}$. Cela ne permet toujours pas de définir une addition naturelle sur V, car cette bijection dépend du choix de a, qui est arbitraire.

La notion d'espace affine permet d'abstraire ces propriétés.

Définition II.1 (Espace affine)**.**

On dit que E est ***un espace affine de direction*** $\overrightarrow{E}$ *si*

▷ $\overrightarrow{E}$ *est un espace vectoriel ;*

- ▷ *il existe une application "$\rightarrow$" qui permet d'associer à toute paire de points a, b de E un vecteur de $\overrightarrow{E}$ qu'on note $\overrightarrow{ab}$, et qui vérifie pour tout $a \in E$:*

  - ▷ *$b \in E \mapsto \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{E}$ est une bijection,*
  - ▷ *pour tous points a, b, c de E, on a $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$: c'est la* ***relation de Chasles****.*

La ***dimension*** *de E est celle de sa direction $\overrightarrow{E}$.*

Exercice 4. Montrez que $\overrightarrow{aa} = 0$, puis que $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$.

Exercice 5. (*) Montrez que s'il existe $a_0 \in E$ pour lequel l'application $b \in E \mapsto \overrightarrow{a_0 b} \in \overrightarrow{E}$ est bijective, alors pour tout a, l'application $b \in E \mapsto \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{E}$ est encore bijective.

Exemple II.2.

Un exemple fondamental est le plan euclidien, tel qu'étudié (et axiomatisé) au collège. Le choix de a peut se voir comme un choix d'origine dans le plan. Une fois ce choix fait, le plan est muni d'une structure d'espace vectoriel grâce à l'application $b \in E \mapsto \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{E}$.

Remarquons que l'application $b \in E \mapsto \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{E}$ dépend du choix de a ; des choix différents d'origines donnent des bijections différents entre E et $\overrightarrow{E}$. En particulier, si l'on peut munir E d'une structure d'espace vectoriel, celle-ci n'est pas canonique ; elle dépend du choix arbitraire de cette origine.

Exemple II.3.

Soient a, $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ sur $\mathbb{R}$ est un espace affine, dont la direction est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y'(t) + a(t)y(t) = 0$. Cet exemple se généralise avec des équations différentielles d'ordre supérieur.

II.2 Des espaces vectoriels comme espaces affines

Propriété II.4.

Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel. Définissons l'application "$\rightarrow$" par $\overrightarrow{ab} = b - a$ pour tous points a et b. Alors $\overrightarrow{E}$ est aussi un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$. Ses dimensions en tant qu'espace affine et en tant qu'espace vectoriel coïncident.

Preuve : Fixons $a \in \overrightarrow{E}$. L'application $b \in \overrightarrow{E} \mapsto b - a \in \overrightarrow{E}$ est bijective, d'inverse $b \in \overrightarrow{E} \mapsto b + a \in \overrightarrow{E}$.

Soient a, b, $c \in \overrightarrow{E}$. Alors

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = (b - a) + (c - b) = c - a = \overrightarrow{ac},$$

ce qui démontre la relation de Chasles. □

Remarque II.5.

Puisque $\overrightarrow{ab} = b - a$, on peut aussi écrire que $\boxed{b = a + \overrightarrow{ab}}$.

Cette construction se généralise aux sous-espaces affines.

Proposition II.6. *Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel et V un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$.*

Définissons l'application "$\rightarrow$" par $\overrightarrow{ab} = b - a$ pour tous points a, $b \in V$. Alors V est un espace affine de direction $\overrightarrow{V}$.

II.3 Translations

L'espace $\overrightarrow{E}$ peut s'identifier à des déplacements de E qu'on appelle translations. On procède de la façon suivante :

Définition II.7.

À tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{E}$ on associe une application de E dans lui-même appelée ***translation de vecteur*** *$\overrightarrow{v}$, notée $t_{\overrightarrow{v}}$, et définie par :*

$$\forall a \in E, t_{\overrightarrow{v}}(a) = b, \text{ où } b \text{ est l'unique point tel que } \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}.$$

On notera $T(E)$ l'ensemble des translations de E, que l'on munira de la loi (associative) de composition.

Remarque II.8.

Soit $v \in \overrightarrow{E}$ et $a \in E$. L'énoncé "$t_{\overrightarrow{v}}(a) = b$, où b est l'unique point tel que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}$" peut être délicat à utiliser. En pratique, on pourra utiliser l'équivalence :

$$\forall a, b \in E,\ \forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E},\ t_{\overrightarrow{v}}(a) = b \text{ si et seulement si } \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}.$$

Propriété II.9.

1. *Pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, l'application $t_{\overrightarrow{v}}$ est une bijection de E dans E.*
2. *L'application $t : \overrightarrow{v} \mapsto t_{\overrightarrow{v}}$ est une bijection de $\overrightarrow{E}$ dans l'ensemble des translations $T(E)$.*
3. *Pour tous $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{E}$, on a $t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$: les groupes $\overrightarrow{E}$ et $T(E)$ sont isomorphes. En particulier $T(E)$ est commutatif.*

Preuve : On vérifie tout d'abord que $t_{\overrightarrow{v}}$ est bien définie. À $a \in E$ fixé, l'application $b \in E \mapsto \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{E}$ est une bijection, donc il existe bien un unique point b tel que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}$.

Soient $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{E}$. Montrons que $t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$. Soit $a \in E$. Posons $b := t_{\overrightarrow{w}}(a)$ et $c := t_{\overrightarrow{v}}(b) = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}}(a)$.

Alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{bc}$. Mais alors, par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac},$$

ce qui signifie exactement que $t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}(a) = c$. Le point a étant arbitraire, $t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$.

D'une part, en choisissant $\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{v}$, on trouve $t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{-\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{0}}$. Or, à a fixé, $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{0}$, donc $t_{\overrightarrow{0}}(a) = a$; ainsi, $t_{\overrightarrow{0}} = id$. Donc $t_{-\overrightarrow{v}}$ est l'inverse de $t_{\overrightarrow{v}}$. Par conséquent, $T(E)$ contient l'élément neutre $t_{\overrightarrow{0}} = id$, est clôs par inverses (l'inverse de $t_{\overrightarrow{v}}$ est $t_{-\overrightarrow{v}}$ et par compositions ($t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}$) : c'est un groupe.

De plus, la relation $t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$ signifie que l'application $\overrightarrow{v} \mapsto t_{\overrightarrow{v}}$ est un morphisme de groupes de $\overrightarrow{E}$ dans $T(E)$. Ce morphisme est surjectif par construction : toute translation est translation par un vecteur de $\overrightarrow{E}$. Il reste à montrer qu'il est injectif. Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$ tel que $t_{\overrightarrow{v}} = id$. Soit $a \in E$. Alors $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{aa} = \overrightarrow{at_{\overrightarrow{v}}(a)} = \overrightarrow{v}$. Le noyau du morphisme $\overrightarrow{v} \mapsto t_{\overrightarrow{v}}$ est trivial, donc ce morphisme est injectif, et de là un isomorphisme. $\square$

Remarque II.10 (Groupes opérants sur un ensemble)**.**

On déduit de la dernière propriété qu'un espace affine est un espace sur lequel on peut faire agir un espace vectoriel : on dit que $\overrightarrow{E}$ ***opère sur*** *E par translation.*

En général, on parle ***d'une action d'un groupe*** *G sur un ensemble E, s'il existe une famille de bijections de E, $(T_g)_{g\in G}$ vérifiant pour tout g, g' de G, $T_g \circ T_{g'} = T_{g.g'}$. Dans notre cadre, c'est le groupe commutatif $(\overrightarrow{E}, +)$ qui agit sur E par translations.*

Dans le cours, il y a beaucoup d'actions de groupes... cherchez-les !

Notation : Comme dans les espaces vectoriels, on peut alors donner un sens à l'addition d'un point et d'un vecteur :

$$\boxed{b = a + \overrightarrow{v} \quad \text{signifie} \quad \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}, \quad \text{ou encore} \quad t_{\overrightarrow{v}}(a) = b.}$$

De plus :

$$\boxed{\text{Pour tous } a \in E \text{ et } \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}, \text{ il existe un unique point } b \in E \text{ tel que } b = a + \overrightarrow{v}.}$$

Remarque II.11.

Au collège et au lycée, la logique du programme est inversée par rapport à la présentation faite ici. Soit E le plan euclidien. L'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ n'est pas connu a priori. On peut tout d'abord définir géométriquement le groupe des translations du plan euclidien $T(E)$, et montrer qu'il est un groupe commutatif. L'enjeu sera ensuite de munir $T(E)$ d'une multiplication par les réels.

La présentation faite ici, partant de l'espace vectoriel, a l'avantage d'être bien plus générale, et notamment de fonctionner quelque soient la dimension de l'espace E et le corps utilisé.

Exercice 6. Soit $a = (1, 0)$ et $b = (1, 1)$. Quel sens donner à $a + b$? Représenter ces 3 couples sur un dessin et faire apparaitre la relation vectorielle, puis la relation affine.

II.4 Milieu et parallélogramme

Milieu

Définition II.12.

On appelle milieu de deux points a et b d'un espace affine le point m qui vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$;
2. $\overrightarrow{am} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}$;
3. *pour tout point $o \in E$,*
$$\overrightarrow{om} = \frac{1}{2}\overrightarrow{oa} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ob}.$$

Preuve : Remarquons tout d'abord qu'il existe un unique point m tel que $\overrightarrow{am} = 2\overrightarrow{ab}$. Il reste à montrer que les propriétés 1 et 3 sont équivalentes à la propriété 2.

Soit a, b, m trois points de E. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bm}$, donc $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$ si et seulement si $\overrightarrow{am} = 2\overrightarrow{ab}$. Les propriétés 1 et 2 sont donc équivalentes.

Supposons la propriété 1 vérifiée. Soit $o \in E$. Alors

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{oa} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ob} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{om} + \overrightarrow{ma}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{om} + \overrightarrow{mb}) = \overrightarrow{om} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{mb}) = \overrightarrow{om}.$$

Réciproquement, en reprenant ce calcul, si $\overrightarrow{om} = \frac{1}{2}\overrightarrow{oa} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ob}$, alors $\frac{1}{2}(\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{mb}) = 0$, et donc $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$. □

Exercice 7. Justifiez le fait que le milieu de (a, b) est aussi le milieu de (b, a)

Remarque II.13.

Cette notion de milieu se généralise à celle de ***barycentre****. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ des points de E, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Montrez dans l'ordre que :

1. *Pour tout point $o \in E$, il existe un point $m \in E$ tel que*

$$\overrightarrow{om} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{oa_i}.$$

2. *Il existe un point $m \in E$ tel que, pour tout point $o \in E$,*

$$\overrightarrow{om} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{oa_i}.$$

3. *Ce point m est unique, et tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ma_i} = 0.$$

Définition II.14.

Soient a, $b \in E$. On appelle ***segment*** *$[a, b]$ l'ensemble*

$$[a, b] = \{a + t\overrightarrow{ab},\ t \in [0, 1]\} = \{\textit{barycentres de } (a, b) \textit{ à poids positifs}\}.$$

Exercice 8. Montrez que les deux définitions du segment $[a, b]$ coïncident.

Identités du parallélogramme

Définition II.15.

On appelle ***parallélogramme*** *un quadruplet de points (a, b, c, d) qui vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$,
2. $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc}$,
3. *le milieu de (a, c) est égal au milieu de (b, d).*

Preuve : Soit a, b, c, d quatre points quelconques. Notons m le milieu de (a, c) et m' celui de (b, d). Alors $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{am} + \overrightarrow{mm'} + \overrightarrow{m'b}$ et $\overrightarrow{dc} = \overrightarrow{dm'} + \overrightarrow{m'm} + \overrightarrow{mc}$, donc $\overrightarrow{ab} - \overrightarrow{dc} = \overrightarrow{mm'} - \overrightarrow{m'm} = 2\overrightarrow{mm'}$.

De même, $\overrightarrow{ad} - \overrightarrow{bc} = 2\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{ab} - \overrightarrow{dc}$. Par conséquent, $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc}$ si et seulement si $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$, si et seulement si $\overrightarrow{mm'} = 0$ (c'est-à-dire si et seulement si $= m'$). □

Exercice 9. Démontrez séparément chaque équivalence, et illustrez chacune des étapes de ces démonstrations.

III Sous-espaces affines

Nous disposons d'une notion générale d'espace affine, et d'une notion de sous-espace affine d'un espace vectoriel. Par la Proposition II.6, les sous-espaces affines d'un espace vectoriel sont des espaces affines.

Nous allons donner maintenant une notion générale de sous-espace affine d'un espace affine.

III.1 Définition

Définition III.1.

Soit $\overrightarrow{F}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Un ensemble non vide F d'un espace affine E est un ***sous-espace affine de direction*** $\overrightarrow{F}$ *s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

1. *il existe $a \in F$ tel que $F = \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F}\} = a + \overrightarrow{F}$;*
2. *$F = a + \overrightarrow{F}$ pour tout $a \in F$.*

Preuve : Il faut montrer que ces deux conditions sont équivalentes. F étant non vide, la seconde condition implique la première. Supposons donc qu'il existe $a \in F$ tel que $F = a + \overrightarrow{F}$, et montrons que la seconde condition est satisfaite.

Soit $b \in F$. Alors $b \in a + \overrightarrow{F}$, donc $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F}$. Alors, pour tout $v \in E$,

$$\begin{aligned} v \in F &\iff \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F} \\ &\iff \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F} \\ &\iff \overrightarrow{bv} \in \overrightarrow{F} \\ &\iff v \in b + \overrightarrow{F} \end{aligned}$$

□

Remarque III.2.

En particulier, $\overrightarrow{F}$ *est déterminé par* F *: un sous-ensemble* $F \subset E$ *est un sous-espace affine de* E *si et seulement s'il existe* $a \in F$ *tel que* $\{\overrightarrow{ab}\,; b \in F\}$ *soit un sous-espace vectoriel de* $\overrightarrow{E}$. *Si c'est le cas, alors ce sous-espace vectoriel ne dépend pas du choix de* a*, et est la direction de* F*.*

Définition III.3.

La dimension d'un sous-espace affine F *est celle de sa direction* $\overrightarrow{F}$. *On la note* $\dim(F) = \dim(\overrightarrow{F})$.

Remarque III.4.

Les sous-espaces affines de dimension 0 *sont les singletons. Il y a un seul sous-espace affine de dimension* n*, qui est* E *tout entier.*

On retrouve les définitions classiques analogues à celles des sous-espaces vectoriels :

- ▷ *Une droite affine est un sous-espace affine de dimension* 1.
- ▷ *Un plan affine est un sous-espace affine de dimension* 2.
- ▷ *Un hyperplan affine est un sous-espace affine de dimension* $\dim(E) - 1$.

III.2 Parallélismes

Le parallélisme est aisé à définir avec ce formalisme. Il faudra faire attention à deux points :

- ▷ Nous avons deux notions de parallélisme. Une forme de parallélisme faible existe entre sous-espaces affines de dimensions distinctes.
- ▷ Un sous-espace sera toujours parallèle à lui-même. En particulier, nous n'écrirons pas de dichotomie du type “parallèles ou confondus”.

Définition III.5.

- ▷ *Deux sous-espaces affines* F *et* G *sont* ***parallèles*** *s'ils ont même direction. On note alors* $F \mathbin{/\!/} G$.
- ▷ *Un sous-espace affine* F *est* ***faiblement parallèle*** *à un sous-espace affine* G *si* $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$.

Propriété III.6.

La relation de parallélisme est une relation d'équivalence.

La relation de faible parallélisme est réflexive et transitive.

Preuve : Montrons le premier point.

- ▷ Un sous-espace affine a la même direction que lui-même, donc est parallèle à lui-même. Le parallélisme est une relation réflexive.
- ▷ Soient F, G deux sous-espaces affines. Si F est parallèle à G, alors $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$, donc G est parallèle à F. Le parallélisme est une relation symétrique.
- ▷ Soient F, G, H trois sous-espaces affines. Si F est parallèle à G et G à H, alors $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$ et $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{H}$, donc $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{H}$, donc F est parallèle à H. Le parallélisme est une relation transitive.

Montrons le second point.

- ▷ Un sous-espace affine a la même direction que lui-même, donc est faiblement parallèle à lui-même. Le parallélisme faible est une relation réflexive.

▷ Soient F, G, H trois sous-espaces affines. Si F est faible parallèle à G et G à H, alors $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ et $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{H}$, donc $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{H}$, donc F est faiblement parallèle à H. Le parallélisme faible est une relation transitive.

□

La relation "F est faiblement parallèle à G" n'est pas une relation d'équivalence. Il faut donc éviter de dire que "F et G sont faiblement parallèles" ; cela n'a aucun sens ! Cette relation n'est pas non plus antisymétrique ; pourquoi ?

Propriété III.7.

Deux sous-espace affines F et G parallèles sont soit disjoints, soit confondus.

Si F est faiblement parallèle à G, soit il est disjoint de G soit il est inclus dans G.

Preuve : Soient F et G deux sous-espaces affines parallèles. Supposons que F et G ne soient pas disjoints. Soit $a \in F \cap G$. Alors $F = a + \overrightarrow{F} = a + \overrightarrow{G} = G$, donc F et G sont confondus.

Soient F et G deux sous-espaces affines tels que F est faiblement parallèle à G. Supposons que F et G ne soient pas disjoints. Soit $a \in F \cap G$. Alors

$$\begin{aligned} F &= \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F}\} \\ &\subset \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{G}\} \\ &= G, \end{aligned}$$

donc $F \subset G$. □

III.3 Intersection

Attention : l'intersection de deux sous-espaces affines peut être vide ! Ce n'est pas le cas pour les sous-espaces vectoriels. Ceci conduit à de nombreux cas particuliers dans les énoncés de théorèmes, cas particuliers qui motivent la *géométrie projective*[4].

Propriété III.8.

Soient F et G deux sous-espace affines de E. L'intersection de F et G est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$.

Preuve : Soient F et G deux sous-espaces affines de E. Supposons leur intersection non vide ; soit $a \in F \cap G$. Rappelons que $F = \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F}\}$ et $G = \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{G}\}$. Par conséquent,

$$F \cap G = \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F} \text{ et } \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{G}\} = \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}\} = a + \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$$

est bien un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$. □

Pour déterminer l'intersection de deux sous-espaces affines, il faudra en pratique résoudre des systèmes d'équations, notamment pour décider si leur intersection est vide ou, si ce n'est pas le cas, trouver un point dans leur intersection. On peut cependant donner un critère général – qui n'est pas à apprendre – pour déterminer si une intersection de sous-espaces affines est vide.

4. Qui ne sera (hélas) pas abordée dans ce cours.

Lemme III.9.

Soient F, G deux sous-espaces affines. Soient $a \in F$ et $b \in G$. Alors $F \cap G$ est non vide (et donc un sous-espace affine) si et seulement si $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$.

Preuve : On remarque que $F = a + \overrightarrow{F}$ et $G = b + \overrightarrow{G}$.

L'intersection $F \cap G$ est non vide si et seulement s'il existe un point c dans cette intersection, c'est-à-dire si et seulement s'il existe c tel que $\overrightarrow{ac} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{bc} \in \overrightarrow{G}$.

Donc, si $F \cap G$ est non vide, alors $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac} - \overrightarrow{bc} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$. Réciproquement, si $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, alors on peut écrire $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}$. Posons alors $c = a + \overrightarrow{u}$. Le point c appartient à F ; de plus, $c = a + (\overrightarrow{ab} - \overrightarrow{v}) = b - \overrightarrow{v}$, donc $c \in G$. L'intersection de F et G est donc non vide. □

Exemple III.10.

- *Si $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$, alors $F \cap G$ est un sous-espace affine de dimension $\dim(F) + \dim(G) - \dim(E)$.*
- *Dans le plan, l'intersection de deux droites affines non parallèles est un sous-espace affine de dimension 0 (Exercice !), donc un point.*
- *Plus généralement, si $\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$, alors $F \cap G$ est un point.*
- *Dans l'espace (de dimension 3), l'intersection de deux plans affines non parallèles est une droite affine (Exercice !).*

On peut également donner un encadrement de la dimension de l'intersection de deux sous-espaces affines lorsqu'elle est non vide : cela permet de retrouver les résultats concernant le nombre de variables libres pour les systèmes linéaires.

Propriété III.11.

Soient F et G deux sous-espace affines de E. Si $F \cap G$ est non vide, alors

$$\dim(E) - \dim(F \cap G) \leq [\dim(E) - \dim(F)] + [\dim(E) - \dim(G)]. \tag{3.1}$$

Autrement dit si $F \cap G$ est non vide, alors

$$\min\{\dim(F), \dim(G)\} \geq \dim(F \cap G) \geq \dim(F) + \dim(G) - \dim(E).$$

Preuve : La seule chose à démontrer est que

$$\dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) \geq \dim(\overrightarrow{F}) + \dim(\overrightarrow{G}) - \dim(\overrightarrow{E})$$

pour des sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$ de $\overrightarrow{E}$. C'est une conséquence de l'égalité

$$\dim(\overrightarrow{F}) + \dim(\overrightarrow{G}) = \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) + \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}),$$

et de l'inégalité $\dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) \leq \dim(\overrightarrow{E})$. □

Remarque III.12.

Rappelons que $\operatorname{codim}(F) = \dim(E) - \dim(F)$ *est le nombre minimal de contraintes linéaires (ou affines) nécessaires pour spécifier* F*. Par exemple, un hyperplan est de dimension* $\dim(E)-1$*, et donc de codimension* 1*, car il y a besoin d'une seule équation cartésienne pour le définir. L'Équation* (3.1) *peut ainsi se réécrire :*

$$\operatorname{codim}(F \cap G) \leq \operatorname{codim}(F) + \operatorname{codim}(G).$$

L'ensemble $F \cap G$ *est l'ensemble des points qui satisfont simultanément les contraintes "être dans* F*" et "être dans* G*". Il est donc facile de trouver* $[\dim(E) - \dim(F)] + [\dim(E) - \dim(G)]$ *contraintes permettant de définir* $F \cap G$ *; il suffit de prendre* $[\dim(E) - \dim(F)]$ *contraintes définissant* F*, et de leur ajouter* $[\dim(E) - \dim(G)]$ *contraintes définissant* G*.*

Cependant, si l'on procède ainsi, on peut avoir des contraintes redondantes [5]*, donc la quantité* $[\dim(E) - \dim(F)] + [\dim(E) - \dim(G)]$ *n'est qu'une borne supérieure sur la codimension de* $F \cap G$*.*

Conséquence III.13.

Soient F *un sous-espace affine de* E *et* H *un hyperplan affine de* E*. Si* $F \cap G$ *est non vide, alors c'est un sous-espace affine de dimension au moins* $\dim(F) - 1$*.*

Preuve : On applique la propriété III.11 à F et H. Comme $\dim(E) - \dim(H) = 1$,

$$\dim(E) - \dim(F \cap H) \leq [\dim(E) - \dim(F)] + 1,$$

et donc $\dim(F \cap H) \geq \dim(F) - 1$. □

Conséquence III.14.

L'intersection de k *hyperplans affines d'un espace affine de dimension* n *est soit vide, soit un sous-espace affine de dimension au moins* $n - k$*.*

Preuve : On fixe E (et donc sa dimension n), et on procède par récurrence sur k.

Le résultat est vrai pour $k = 0$: l'intersection d'aucun hyperplan [6] est l'espace E tout entier, qui est bien de dimension $n = n - 0$.

Soit $0 \leq k < n$, et supposons l'énoncé vrai à l'ordre k. Soient H_1, ..., H_{k+1} des hyperplans de E. Supposons leur intersection $\bigcap_{j=1}^{k+1} H_j$ non vide. Alors

$$\bigcap_{j=1}^{k+1} H_j = \left(\bigcap_{j=1}^{k} H_j \right) \cap H_{k+1}$$

est l'intersection d'un sous-espace affine de dimension au moins $n-k$ (par l'hypothèse de récurrence) avec un hyperplan. Cette intersection étant supposée non vide,

$$\begin{aligned}
\dim \left(\bigcap_{j=1}^{k+1} H_j \right) &\geq \dim \left(\bigcap_{j=1}^{k} H_j \right) + \dim(H_{k+1}) - \dim(E) \\
&\geq n - k + \dim(H_{k+1}) - \dim(E) \\
&= n - k + (n-1) - n \\
&= n - (k+1),
\end{aligned}$$

5. Prendre par exemple $F = G$: les équations linéaires définissant F apparaîtront en double.
6. Comme toujours, si vous n'êtes pas à l'aise avec ces conventions, n'utilisez l'énoncé que pour $k \geq 1$, et commencez la récurrence à $k = 1$.

ce qu'il fallait démontrer. □

.

Exercice 10. Une réunion de sous-espaces affines est-elle un sous-espace affine ? Donnez des exemples.

III.4 Sous-espace affine engendré

La notion de sous-espace affine engendré est une version affine de la notion de sous-espace vectoriel engendré. Elle donne aussi une version affine de la somme de sous-espaces vectoriels ; en effet, $\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{F}\cup\overrightarrow{G}$, et $\mathrm{Aff}(F\cup G)$ peut en être vu comme un analogue affine.

Définition

Définition III.15.

Soit A est un sous-ensemble non vide de E. On appelle ***sous-espace affine engendré par*** A *le plus petit sous-espace affine contenant A. On le note* $\mathrm{Aff}(A)$.

Preuve : On considère l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant A. C'est un sous-espace affine qui contient A, qui est minimal pour l'inclusion. □

Remarque III.16.

Pour exploiter cette définition, ou pourra utiliser les propriétés suivantes :

- ▷ $A \subset \mathrm{Aff}(A)$;
- ▷ $A = \mathrm{Aff}(A)$ *si (et seulement si) A est un sous-espace affine ;*
- ▷ *si F est un sous-espace affine et $A \subset F$, alors* $\mathrm{Aff}(A) \subset F$.

Remarque III.17.

Un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ est, comme on l'a vu, muni d'une structure d'espace affine. On a alors, pour tout sous-ensemble A,

$$\mathrm{Aff}(A) \subset \mathrm{Vect}(A)\ ;$$

en effet, $\mathrm{Vect}(A)$ *est un sous-espace affine et* $A \subset \mathrm{Vect}(A)$*, donc* $\mathrm{Aff}(A) \subset \mathrm{Vect}(A)$. *Cette inclusion est en général stricte. Par exemple, si A est un singleton différent de $\{\overrightarrow{0}\}$, alors* $\mathrm{Aff}(A) = A$ *alors que* $\mathrm{Vect}(A)$ *est une droite vectorielle.*

Sous-espace affine engendré par des sous-espaces affines

Propriété III.18.

Soient $F = a+\overrightarrow{F}$ et $G = b+\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces affines. Alors $\mathrm{Aff}(F\cup G) = a+\mathrm{Vect}(\overrightarrow{F},\overrightarrow{G},\overrightarrow{ab})$.

Preuve : $\mathrm{Aff}(F\cup G)$ contient F, donc a. Donc il suffit de montrer que $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(F\cup G)} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{F},\overrightarrow{G},\overrightarrow{ab})$. Nous allons procéder par double inclusion.

Montrons que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{F},\overrightarrow{G},\overrightarrow{ab}) \subset \overrightarrow{\mathrm{Aff}(F\cup G)}$. D'un part, $F \subset \mathrm{Aff}(F\cup G)$ donc $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{\mathrm{Aff}(F\cup G)}$. De même, $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{\mathrm{Aff}(F\cup G)}$. Enfin, $a \in F \subset \mathrm{Aff}(F\cup G)$ et $b \in G \subset \mathrm{Aff}(F\cup G)$, donc $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{\mathrm{Aff}(F\cup G)}$. Cela montre la première inclusion.

Montrons l'inclusion réciproque $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(F\cup G)} \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{ab})$. Il suffit pour cela de montrer que $\mathrm{Aff}(F\cup G) \subset a + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{ab})$, donc que $a + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{ab})$ est un sous-espace affine qui contient F et G. D'une part, $\overrightarrow{F} \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{ab})$, donc $F \subset a + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{ab})$. D'autre part, étant donné $c \in G$, on a $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} \in \mathbb{R}\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{G} \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{ab})$, donc $G \subset a + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{ab})$, ce qu'il fallait démontrer. □

Il s'en suit directement plusieurs conséquences :

Propriété III.19.

Soient F et G deux sous-espaces affines. Si $F \cap G \neq \emptyset$, alors $\mathrm{Aff}(F\cup G)$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$.

Preuve : Il suffit de prendre $a = b$ dans la propriété précédente. □

Propriété III.20.

Soient F et G deux sous-espaces affines. Alors $\dim(\mathrm{Aff}(F\cup G)) \leq \dim(F) + \dim(G) + 1$. Si de plus F et G s'intersectent, alors $\dim(\mathrm{Aff}(F\cup G)) \leq \dim(F) + \dim(G)$.

Exercice 11. Soit D_1, D_2 deux droites de l'espace. Leurs positions relatives peuvent être les suivantes : confondues, parallèles non confondues, sécantes, ou aucune des trois. Quelle est la dimension de $\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)$ dans chacun de ces quatre cas ?

Sous-espace affine engendré par des points

Définition III.21.

On dit que des points sont :

- ▷ ***alignés*** *si leur sous-espace affine engendré est inclus dans une droite affine ;*
- ▷ ***coplanaires*** *si leur sous-espace affine engendré est inclus dans un plan affine.*

Propriété III.22.

Soit $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ un ensemble de $k+1$ points d'un espace affine E. Alors

$$\mathrm{Aff}(\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}) = a_0 + \overrightarrow{V} \text{ avec } \overrightarrow{V} = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k}\},$$

et en particulier $\dim(\mathrm{Aff}(\{a_0, a_1, \cdots, a_k\})) \leq k$.

Preuve : D'une part, $a + \overrightarrow{V}$ est un sous-espace affine, qui contient a_0 ainsi que $a_0 + \overrightarrow{a_0a_1} = a_1$, ..., $a_0 + \overrightarrow{a_0a_k} = a_k$. Donc $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\} \subset a + \overrightarrow{V}$. Par conséquent, $\mathrm{Aff}(\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}) \subset a_0 + \overrightarrow{V}$.

D'autre part, soit F un sous-espace affine contenant $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$. Alors $a_0 \in F$, donc $F = a_0 + \overrightarrow{F}$. De plus, a_1, ..., $a_k \in F$, donc $\overrightarrow{a_0a_1}$, ..., $\overrightarrow{a_0a_k} \in \overrightarrow{F}$. Donc $\overrightarrow{V} \subset \overrightarrow{F}$. Donc $a_0 + \overrightarrow{V} \subset a_0 + \overrightarrow{F} = F$. Par conséquent, $a_0 + \overrightarrow{V}$ est bien le plus petit sous-espace affine contenant $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$.

Finalement, $\overrightarrow{V}$ est engendré par k vecteurs, donc est de dimension au plus k. □

Conséquence III.23.

- ▷ *Un singleton est un sous-espace affine.*
- ▷ *Le sous-espace affine engendré par* 2 *points distincts est une droite affine.*
- ▷ *Le sous-espace affine engendré par* 3 *points distincts est un plan affine ou une droite affine.*

Définition III.24.

On dit que les points $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ *sont* ***affinement indépendants*** *si la dimension du sous-espace affine engendré par ces points est maximale, et vaut donc* k.

III.5 Repères et coordonnées

Une partie d'un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ est une base si elle engendre $\overrightarrow{E}$ et est libre. La notion de points affinement indépendants permet d'adapter cette construction aux espaces affines.

Définition III.25.

Soient $n+1$ *points* $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ *d'un espace affine* E *de dimension* n*. On dit que ces points forment un* ***repère*** *de* E *s'ils sont affinement indépendants. On appelle alors* a_0 ***l'origine*** *du repère.*

Propriété III.26.

Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ *un repère de* E*. Alors :*

1. $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n})$ *est une base de* $\overrightarrow{E}$.
2. *Tout point* $x \in E$ *admet des* ***coordonnées*** $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ***dans le repère*** $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$*. Ce sont les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{a_0x}$ *dans la base* $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n})$*. Le point* x *est de coordonnées* $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *si et seulement si*

$$x = a_0 + x_1\overrightarrow{a_0a_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{a_0a_n}.$$

Remarque III.27.

La donnée d'un repère de l'espace affine E *est donc équivalente à la donnée d'un point* $a_0 \in E$ *(l'origine du repère) est d'une base de* $\overrightarrow{E}$.

En particulier, un repère d'un espace affine de dimension n *comprend* $n+1$ *points, mais un point a* n *coordonnées !*

Exemple III.28.

L'exemple fondamental est le plan euclidien. Le point de vue du collège est qu'un repère du plan euclidien est la donnée de 3 *points non alignés* (O, I, J)*. Le point de vue du lycée est que la donnée d'un tel repère est équivalente à la donnée de l'origine du repère* O*, et de deux vecteurs non colinéaires* $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ *et* $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Exemple III.29.

Dans $\mathbb{R}^n$*, on dispose d'un repère naturel (canonique) formé des points* $(0, \cdots, 0)$*,* $(1, 0, \cdots, 0)$*,... ,*$(0, \cdots, 1)$*. Dans ce repère, les coordonnées d'un point* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *coïncident avec ce point.*

IV Applications affines

La richesse de l'algèbre linéaire vient non seulement des espaces vectoriels, mais de l'analyse des applications linéaires entre ces espaces. Nous allons définir une notion d'applications affines, analogue affine des applications linéaires.

IV.1 Introduction

Définitions

Définition IV.1.

Soient E et F des espaces affines de directions $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ respectivement. Soit $f : E \to F$. On dit que f est une ***application affine*** *s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ telle que, pour tous a, $b \in E$,*

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{f(a)f(b)},$$

ou, autrement dit, $f(b) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab})$.

L'application $\overrightarrow{f}$ est en fait entièrement déterminée par f, et en particulier est unique.

Propriété IV.2.

Soient E et F des espaces affines de directions $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ respectivement. Soit $f : E \to F$. Il y a équivalence entre :

1. *il existe $a \in E$ tel que l'application*

$$\overrightarrow{f}_a : \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} \mapsto \overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})} \in \overrightarrow{F}$$

   soit linéaire.

2. *pour tout $a \in E$, l'application*

$$\overrightarrow{f}_a : \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} \mapsto \overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})} \in \overrightarrow{F}$$

   est linéaire.

3. *f est une application affine.*

Si de plus une de ces trois conditions est vérifiée, alors $\overrightarrow{f}_a$ ne dépend pas de a. On la note $\overrightarrow{f}$, et on l'appelle ***partie linéaire*** *de f.*

Preuve : La condition 3 implique la condition 2. Comme E est non vide, la condition 2 implique la condition 1 ; montrons la réciproque. Soit $a \in E$, et soit $\overrightarrow{f}_a : \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} \mapsto \overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})} \in \overrightarrow{F}$. Soit $b \in E$.

Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$. Alors $b + \overrightarrow{v} = a + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{v}$, donc

$$\overrightarrow{f(a)f(b+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{f}_a(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}_a(\overrightarrow{ab}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}).$$

Par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{f(b)f(b+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{f(b)f(a)} + \overrightarrow{f(a)f(b+\overrightarrow{v})} = -\overrightarrow{f}_a(\overrightarrow{ab}) + \overrightarrow{f}_a(\overrightarrow{ab}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}_a(\overrightarrow{v}).$$

Donc l'application $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} \mapsto \overrightarrow{f(b)f(b+\overrightarrow{v})} \in \overrightarrow{F}$ est linéaire, et est égale à $\overrightarrow{f}_a$. On a montré la condition 2.

De plus, toutes les applications $\overrightarrow{f}_a$ coïncident. En les notant $\overrightarrow{f}$, on a bien la condition 3. □

Des espaces vectoriels vus comme espaces affines

Propriété IV.3.
Lorsque $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ sont des espaces vectoriels, f est une application affine si et seulement si $\overrightarrow{f} \in L(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$, où

$$\forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E},\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{0}).$$

PREUVE : On applique la définition d'une application affine avec $a = 0$: l'application f est affine si et seulement si l'application $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{f(\overrightarrow{0})f(\overrightarrow{0}+\overrightarrow{v})}$ est linéaire. Or $\overrightarrow{f(\overrightarrow{0})f(\overrightarrow{0}+\overrightarrow{v})} = f(\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{0})$, ce qui conclut. □

Existence et unicité d'applications affines

Nous pouvons construire des applications affines ou bien à partir de sa partie linéaire et de l'image d'un point, ou bien à partir de son action sur un repère.

Propriété IV.4.
Soient $f, g : E \to F$ deux applications affines ayant même partie linéaire. Alors :

- ▷ *ou bien $f = g$;*
- ▷ *ou bien $f(a) \neq g(a)$ pour tout $a \in E$.*

PREUVE : Soient $f, g : E \to F$ deux applications affines de même partie linéaire. Supposons qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = g(a)$, et montrons que $f = g$.

Soit $b \in E$. Alors

$$f(b) = f(a) + \overrightarrow{f(a)f(b)} = g(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) = g(a) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{ab}) = g(a) + \overrightarrow{g(a)g(b)} = g(b).$$

Donc $f(b) = g(b)$ pour tout $b \in E$, donc $f = g$. □

Proposition IV.5.
Soit $\overrightarrow{f} \in L(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$. Pour tous $a \in E$ et $b \in F$, il existe une unique application affine f d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ et telle que $f(a) = b$. Elle est définie pour tout $x \in E$ par :

$$f(x) = b + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}).$$

PREUVE : Par construction, $\overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a(a+\overrightarrow{v})}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, donc f est affine d'application linéaire $\overrightarrow{f}$. De plus, $f(a) = b$.

Si g est une autre application affine vérifiant ces conditions, alors g a même partie linéaire que f et $f(a) = b = g(a)$, donc $f = g$ par la Propriété IV.4. □

Proposition IV.6.
Une application affine est caractérisée par son action sur un repère. Autrement dit, étant donnés deux espaces affines E et F, un repère $(a_0, \cdots, a_n)$ de E et un n-uplet de points $(b_0, \cdots, b_n)$ de F, il existe une unique application affine $f : E \to F$ telle que $f(a_k) = b_k$ pour tous $0 \leq k \leq n$.

Preuve : Montrons tout d'abord l'unicité. Si f est une telle application affine, alors $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0a_k}) = \overrightarrow{f(a_0)f(a_k)} = \overrightarrow{b_0b_k}$ pour tout k. Or une application linéaire est caractérisée par son action sur une base, donc deux applications affines vérifiant cette propriété ont même partie linéaire, ainsi que la même image de a_0. Par la Proposition IV.5, deux telles applications affines coïncident.

De plus, si $\overrightarrow{f}$ est défini comme ci-dessus par son action sur la base $(\overrightarrow{a_0a_k})_{1\leq k\leq n}$ de $\overrightarrow{E}$, et si f et l'unique application affine telle que $f(a) = b_0 + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0a})$, alors on vérifie que $f(a_k) = b_k$ pour tout $\leq k \leq n$. □

Exercice 12. Construisez l'image d'un point connaissant l'image d'un repère dans le plan. Vous pourrez utiliser Geogebra.

Propriété IV.7.

Soit f une application linéaire.

- ▷ *f est bijective (respectivement injective, surjective) si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est bijective (respectivement injective, surjective).*
- ▷ *f est bijective si et seulement si l'image d'un repère de E est un repère de F.*

Exercice 13. Démontrez chacune des 4 propriétés ci-dessus.

Coordonnées et écriture matricielle

Propriété IV.8.

Soient E et F deux espaces affines de dimension finie. Une application f de E dans F est une application affine si et seulement si pour tout $x \in E$, la matrice des coordonnées Y du point $f(x)$ dans un repère de F s'écrit sous la forme $Y = AX + B$ où X représente les coordonnées du point x dans un repère de E.

Preuve : Soient E, F deux espaces affines munis de repère $(a_0, \cdots, a_n)$ et $(b_0, \cdots, b_p)$ respectivement. Soit $f : E \to F$.

Supposons f affine. Soit B le vecteur coordonnée de $f(a_0)$ dans le repère $(b_0, \cdots, b_p)$ et soit A la matrice de $\overrightarrow{f}$ de la base $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n})$ dans la base $(\overrightarrow{b_0b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_0b_p})$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = f(a_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0x}) = b_0 + \overrightarrow{b_0f(a_0)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0x})$$

a bien pour coordonnées $B + AX$.

Réciproquement, si f s'écrit sous la forme $Y = AX+B$, alors f coïncide avec l'application affine envoyant a_0 sur le point de coordonnées B dans le repère $(b_0, \cdots, b_p)$, et dont la partie linéaire est de matrice A dans les bases $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n})$ et $(\overrightarrow{b_0b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_0b_p})$. □

Exemples d'applications affines

Les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto ax + b$, où a, b sont des réels. En effet, si on choisit le repère (O, I) avec $O = 0$ et $I = 1$, alors une application affine s'écrit en coordonnées $Y = aX + b$; mais, dans ce repère, $X = x$ et $Y = f(x)$.

Les **translations** sont des applications affines. En effet, soit t une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ dans un espace affine E. Soit $a \in E$. Alors, pour tout $v \in \overrightarrow{E}$,

$$\overrightarrow{t(a)t(a+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{t(a)a} + \overrightarrow{a(a+\overrightarrow{v})} + \overrightarrow{(a+\overrightarrow{v})t(a+\overrightarrow{v})} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.$$

En particulier, $\overrightarrow{t} = \mathrm{id}$: l'application linéaire associée est l'identité. En coordonnées, une translation s'écrit $Y = X + B$.

Exercice : Montrez la propriété suivante :

Propriété IV.9.

Une application affine est une translation si et seulement si son application linéaire associée est l'identité.

De nombreuses transformations usuelles du plan euclidien sont des applications affines. Par exemple, soit $P = (x_P, y_P)$ un point du plan et R_θ la rotation d'angle θ autour de P. Alors R_θ est une transformation affine, dont l'application linéaire associée est la rotation linéaire $\overrightarrow{r}_\theta$. Dans le repère canonique, étant donné un point Q de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$R_\theta(Q) = R_\theta(P + \overrightarrow{PQ}) = R_\theta(P) + \overrightarrow{r}_\theta(\overrightarrow{PQ}) = P + \overrightarrow{r}_\theta(\overrightarrow{PQ}).$$

On trouve donc :

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix}.$$

Cette écriture permet de repérer facilement les propriétés géométriques de R_θ : cette application fixe le point P, et agit par rotation. Si on veut la mettre sous la forme $Y = AX + B$, il faut réécrire :

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P - \cos(\theta)x_P + \sin(\theta)y_P \\ y_P - \sin(\theta)x_P - \cos(\theta)y_P \end{pmatrix},$$

mais cela est en général à éviter.

De même, les projections orthogonales sur une droite, les symétries axiales et les symétries centrales sont des applications affines. Les applications linéaires associées sont encore des projections orthogonales (linéaires), des réflexions, et $-\mathrm{id}$ dans le cas des symétries centrales.

IV.2 Propriétés géométriques des applications affines

Propriétés liées à la structure d'espace affine

Propriété IV.10.

L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine de dimension au plus celle du sous-espace affine de départ.

L'image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine est vide, ou est un sous-espace affine.

Preuve : Soient E, F deux espaces affines et $f : E \to F$ une application affine.

Soit $V \subset E$ un sous-espace affine. Soit $a \in V$. Posons $\overrightarrow{W} := \overrightarrow{f}(\overrightarrow{V})$. Alors, pour tout $b \in F$:

$$\begin{aligned} b \in f(V) &\iff \exists v \in V,\ b = f(v) \\ &\iff \exists \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{V},\ b = f(a + \overrightarrow{v}) \\ &\iff \exists \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{V},\ b = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \\ &\iff \exists \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{W},\ b = f(a) + w \\ &\iff b \in f(a) + \overrightarrow{W}. \end{aligned}$$

Donc $f(V)$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{V})$, donc de dimension $\dim(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{V})) \leq \dim(\overrightarrow{V})$.

Soit $W \subset F$ un sous-espace affine. Supposons $f(E) \cap W$ non vide ; soit alors $a \in f^{-1}(W)$. Posons $\overrightarrow{V} := \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{W})$. Alors, pour tout $b \in F$:

$$\begin{aligned} b \in f^{-1}(W) &\iff f(b) \in W \\ &\iff \overrightarrow{f(a)f(b)} \in \overrightarrow{W} \\ &\iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) \in \overrightarrow{W} \\ &\iff \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{V} \\ &\iff b \in a + \overrightarrow{V}. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(W)$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{W})$. □

Remarque IV.11.

En particulier, si $b \in F$ et $f : E \to F$ est affine, alors $f^{-1}(\{b\})$ est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f})$.

Exercice 14. Donner la nature de l'image d'une droite affine, d'un plan affine. Que peut-on dire si f est bijective ?

Remarque IV.12 (Les applications affines préservent les parallélogrammes)**.**

L'image d'un parallélogramme par une application affine est toujours un parallélogramme. On dit aussi que f préserve les parallélogrammes.

La réciproque est vraie si E est un espace vectoriel réel (nous ne le démontrerons pas ici), mais fausse si E est espace vectoriel complexe. Par exemple, l'application $f : z \mapsto \overline{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ préserve les parallélogrammes, mais n'est pas linéaire.

Preuve : Soit (a, b, c, d) un parallélogramme de E et f une application affine définie sur E. Alors $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$. Donc $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{dc}) = \overrightarrow{f(d)f(c)}$. Donc $(f(a), f(b), f(c), f(d))$ est un parallélogramme. □

Remarque IV.13 (Les applications affines préservent le parallélisme)**.**

Soient F, G deux sous-espaces affines d'un espace affine E. Si F et G sont parallèles (respectivement, si F est faiblement parallèle à G) et f est affine, alors $f(F)$ et $f(G)$ sont parallèles (respectivement, $f(F)$ et $f(G)$ sont faiblement parallèles).

Preuve : Si F et G sont parallèles, alors la direction de $f(G)$ est $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{F})$, donc est la même direction que $f(F)$.

Si F est faiblement parallèle à G, alors $f(F)$ a pour direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{F}) \subset \overrightarrow{f}(\overrightarrow{G})$, donc est faiblement parallèle à $f(G)$. □

Remarque IV.14 (Les applications affines préservent les milieux)**.**
Soient E, F deux espaces affines et $f : E \to F$ affine. Soient a, $b \in E$ de milieu m. Alors $f(m)$ est le milieu de $f(a)$ et $f(b)$.

Preuve : Sous ces hypothèses, $\overrightarrow{f(a)f(m)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{am}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{mb}) = \overrightarrow{f(m)f(b)}$. □

Exercice 15. Montrez que les applications affines préservent les barycentres.

Le point de vue algébrique : le groupe affine $GA(E)$.

De la même façon qu'une composition d'applications linéaires est linéaire, une composition d'applications affines est affine.

Proposition IV.15.
Soient E, F, G trois espaces affines. Soient f une application affine de E dans F et g une application affine de F dans G. Alors $g \circ f$ est une application affine de E dans G dont l'application linéaire associée est égale à $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

Preuve : Soient $a \in E$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$. Alors

$$\overrightarrow{g \circ f(a) g \circ f(a + \overrightarrow{v})} = \overrightarrow{g(f(a)) g(f(a) + \overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})})} = \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})}\right) = \overrightarrow{g}\,\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$$

□

En particulier, si E est un espace affine, alors l'ensemble des applications affines de E dans E est stable par composition. Dans ce qui suit, on fixe un espace affine E de direction $\overrightarrow{E}$.

Définition IV.16 (Groupe affine)**.**

- ▷ *Une **transformation affine** est une application affine de E dans lui-même.*
- ▷ *Le **groupe affine de** E est l'ensemble des **transformations bijectives** de E qu'on appelle aussi les **automorphismes de** E. C'est un groupe que l'on notera $GA(E)$.*

Preuve : Il faut tout de même montrer que $GA(E)$ est un groupe. On sait que l'identité est une transformation affine bijective, et qu'une composition de transformations affines bijective est affine et bijective. Il reste à montrer que, si f est transformation affine bijective, alors son inverse f^{-1} est affine.

Soient $a \in E$. On sait que $\overrightarrow{f} \in GL(\overrightarrow{E})$. Il existe donc une transformation affine $g \in GA(E)$ telle que $g(f(a)) = a$ et $\overrightarrow{g} = (\overrightarrow{f})^{-1}$. De plus, $(g \circ f)(a) = a$ et $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{id}}$. Donc $g \circ f$ est l'unique transformation affine envoyant a sur a et de partie linéaire $\overrightarrow{\mathrm{id}}$, donc $g \circ f = \mathrm{id}$. □

Remarque IV.17.

- ▷ *À une transformation affine f de E est associée un endomorphisme $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{E}$.*
- ▷ *Si f est un automorphisme de E, alors f est bijective, donc son endomorphisme associé $\overrightarrow{f}$ est aussi bijectif, donc $\overrightarrow{f} \in GL(\overrightarrow{E})$.*
- ▷ *L'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un morphisme surjectif de $GA(E)$ dans $GL(E)$. Son noyau est le groupe des translations $T(E)$; en particulier, $T(E)$ est distingué dans $GA(E)$.*

Preuve : Le fait que Ψ : $f \mapsto \overrightarrow{F}$ est un morphisme de groupes est une conséquence de la Proposition IV.15. La surjectivité de ce morphisme est une conséquence de la Proposition IV.5. Finalement, soit $a \in E$. Alors

$$
\begin{aligned}
f \in \operatorname{Ker}(\Psi) \iff & \overrightarrow{f} = id \\
& \forall b \in E,\ \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ab} \\
& \forall b \in E,\ \overrightarrow{bf(b)} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{af(b)} = \overrightarrow{f(b)f(a)} + \overrightarrow{af(b)} = \overrightarrow{af(a)} \\
& \exists \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E},\ \forall b \in E,\ f(b) = t_{\overrightarrow{v}}(b).
\end{aligned}
$$

Donc le noyau de $f \mapsto \overrightarrow{F}$ est bien le groupe des translations. □

Remarque IV.18.

Comme $\operatorname{Ker}(\Psi)$ est distingué dans $GA(E)$, le quotient $GA(E)/\operatorname{Ker}(\Psi) = GA(E)/T(E)$ est un groupe. Ce groupe est en fait isomorphe à $GL(\overrightarrow{E})$.

Ensembles fixes, invariants, stables

La notion de point fixe permettra, par la suite, une description plus simple des transformations affines d'un espace affine, ainsi que de décrire des sous-groupes de $GA(E)$.

Définition IV.19.

Soit f une transformation affine de E.

- ▷ *Un **point fixe** x de f est un point qui est égal à son image : $f(x) = x$.*
- ▷ *Un ensemble A de E est dit **fixe** par f s'il est composé de points fixes : pour tout $x \in A$, $f(x) = x$.*
- ▷ *Un ensemble A de E est dit **invariant** par f si son image est égale à lui-même : $f(A) = A$.*
- ▷ *On dit que A est **stable** par f si $f(A) \subset A$.*

Exercice 16. Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. Donnez un exemple de partie invariante mais pas fixe par $t_{\overrightarrow{u}}$, et un exemple de partie stable mais pas invariante par $t_{\overrightarrow{u}}$.

Théorème 1.

Soit f une transformation affine d'un espace affine E.

1. *f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.*
2. *Si 1 est valeur propre de f, l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}})$.*

Preuve : Soit a un point de E. On cherche à décrire les points fixes de f. Alors, pour tout $b \in E$,

$$\begin{aligned} f(b) = b &\iff \overrightarrow{af(b)} = \overrightarrow{ab} \\ &\iff \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{ab} \\ &\iff \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ab} \\ &\iff (\overrightarrow{\mathrm{id}} - \overrightarrow{f})(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{af(a)}. \end{aligned}$$

Supposons que f admette au moins un point fixe. Choisissons pour a ce point fixe, de telle sorte que $f(a) = a$. Alors l'ensemble des points fixes de f est

$$\begin{aligned} \{b \in E \ : \ f(b) = b\} &= \{b \in E \ : \ (\overrightarrow{\mathrm{id}} - \overrightarrow{f})(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{0}\} \\ &= \{b \in E \ : \overrightarrow{ab} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}})\} \\ &= a + \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}}). \end{aligned}$$

En particulier, si f a un point fixe, alors l'ensemble des points fixes est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}})$. Cela démontre :

- ▷ Le second point du théorème.
- ▷ Le fait que si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$, alors f a au plus un point fixe.
- ▷ Le fait que si f a exactement un point fixe, alors 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Il reste à montrer que, si 1 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$, alors f admet au moins un point fixe. Choisissons à nouveau un point a arbitraire. Alors un point b est fixe si et seulement si $(\overrightarrow{\mathrm{id}} - \overrightarrow{f})(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{af(a)}$. Mais $\overrightarrow{\mathrm{id}} - \overrightarrow{f}$ est inversible, donc le point $b = a + (\overrightarrow{\mathrm{id}} - \overrightarrow{f})^{-1}\overrightarrow{af(a)}$ convient. □

Exemple IV.20.

Soit f une transformation affine telle que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{id}}$. Alors

- ▷ *ou bien f n'a aucun point fixe ;*
- ▷ *ou bien l'ensemble des points fixes est un sous-espace affine de direction* $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}}) = \overrightarrow{E}$, *donc E tout entier.*

Cette dichotomie s'interprète géométriquement. Une transformation affine telle que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{id}}$ est une translation par un vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Mais alors :

- ▷ *ou bien $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, et $f = t_{\overrightarrow{u}}$ n'a aucun point fixe ;*
- ▷ *ou bien $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, et $f = t_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{id}$ fixe E tout entier.*

Exemple IV.21.

On se place dans le plan euclidien. Soient $\theta \in (0, 2\pi)$ et f une application affine telle que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{r}_\theta$. Alors $\overrightarrow{r}_\theta$ a pour valeurs propres $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, et en particulier 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{r}_\theta$. Par conséquent, $\overrightarrow{r}_\theta$ a un unique point fixe : c'est le centre de la rotation. Autrement dit, une transformation affine dont la partie linéaire est une rotation qui n'est pas l'identité est une rotation autour d'un point.

V Classes de transformations affines

V.1 Quelques sous-groupes de $GA(E)$

Le groupe $GA(E)$ admet de nombreux sous-groupes intéressants.

Propriété V.1. *Soit E un espace affine et $a \in E$. Alors le sous-ensemble des applications affines dont a est un point fixe est un sous-groupe de $GA(E)$ isomorphe à $GL(\overrightarrow{E})$.*

Preuve : Notons cet ensemble $\mathrm{Stab}(a) = \{f \in GA(E);\ f(a) = a\}$. Alors cet ensemble contient l'identité, est stable par compositions et inverses. C'est donc un sous-groupe de $GA(E)$.

Étant donné $\overrightarrow{g} \in GL(\overrightarrow{E})$, il existe une unique application affine $f \in GA(E)$ telle que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ et $f(a) = a$. Le morphisme $f \mapsto \overrightarrow{f}$ de $\mathrm{Stab}(a)$ dans $GL(\overrightarrow{E})$ est donc bijectif ; c'est un isomorphisme. $\square$

Ceci dit, une méthode classique consiste à choisir un sous-groupe H de $GL(\overrightarrow{E})$, et à considérer les applications affines $f \in GA(E)$ telles que $\overrightarrow{f} \in H$. Rappelons au passage le lemme suivant :

Lemme V.2. *Soient G, H deux groupes, $\psi : G \to H$ un morphisme de groupe et K un sous-groupe de H. Alors $\psi^{-1}(K)$ est un sous-groupe de G. De plus, si K est distingué dans H, alors $\psi^{-1}(K)$ et distingué dans G.*

On utilisera ce lemme avec $G = GA(E)$, $H = GL(\overrightarrow{E})$ et $\psi : f \mapsto \overrightarrow{f}$. Ainsi :

- ▷ $\{\overrightarrow{\mathrm{id}}\}$ est un sous-groupe distingué de $GL(\overrightarrow{E})$. Donc l'ensemble $\{f \in GA(E);\ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{id}}\}$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$. C'est le groupe des **translations** $T(E)$.
- ▷ $\{\lambda\overrightarrow{\mathrm{id}};\ \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe distingué de $GL(\overrightarrow{E})$ (groupe des homothéties). Donc l'ensemble $\{f \in GA(E);\ \overrightarrow{f} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{id}}, \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$. C'est le groupe des **homothéties-translations** $HT(E)$.
- ▷ $\{f :\ \det(f) = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $GL(\overrightarrow{E})$ (groupe spécial linéaire, ou groupe des applications linéaires préservant l'orientation et l'aire). Donc l'ensemble $\{f \in GA(E);\ \det(\overrightarrow{f}) = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$. C'est le groupe des applications affines préservant l'orientation et l'aire.
- ▷ Si l'on munit $\overrightarrow{E}$ d'un produit scalaire, alors $O(\overrightarrow{E})$ est un sous-groupe de $GL(\overrightarrow{E})$ (groupe orthogonal, ou groupe des isométries). L'ensemble $\{f \in GA(E);\ \overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})\}$ est un sous-groupe de $GA(E)$.

Remarquons que, avec cette construction, le sous-groupe de $GA(E)$ obtenu contiendra toujours $\{f \in GA(E);\ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{id}}\}$, c'est-à-dire les translations. En particulier, les translations préservent les aires, les distances...

V.2 Groupe $HT(E)$ des homothéties-translations d'un espace affine E

Revenons maintenant sur les homothéties et translations. Rappelons que, dans un contexte affine, une homothétie a un centre :

Définition V.3.

Soit $f : E \to E$ une application affine. On dit que f est une ***homothétie affine*** *s'il existe $\lambda \neq 0$ et un point $A \in E$ tels que $f(A) = A$ et $\overrightarrow{f} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{id}}$. Autrement, dit, pour tout $x \in E$,*

$$f(x) = A + \lambda \overrightarrow{Ax}.$$

Soit $\lambda \neq 0$ et f une application affine telle que $\overrightarrow{f} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{id}}$. Si $\lambda \neq 1$, alors 1 n'est pas valeur propre de $\lambda \overrightarrow{\mathrm{id}}$, donc f a un unique point fixe A, donc f est une homothétie. Ce raisonnement ne fonctionne pas pour $\lambda = 1$; en effet, si $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{id}}$ et f a un point fixe, alors $f = \mathrm{id}$. Cependant, il existe des applications affines f telles que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{id}}$ et qui n'ont pas de point fixe : les translations non triviales !

Une conséquence de ceci est que l'ensemble des homothétie n'est pas un sous-groupe de $GA(E)$. Ce problème peut être résolu en lui adjoignant les translations :

Définition V.4.

L'ensemble des ***homothéties-translations*** *de E, noté $HT(E)$, est l'ensemble des transformations qui sont des homothéties affines ou des translations.*

Une application affine $f : E \to E$ est une homothétie-translation si et seulement s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{f} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{id}}$. En particulier, $HT(E)$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$.

Avec cette définition, l'identité est à la fois une homothétie affine et une translation ; c'est la seule transformation à vérifier ces deux propriétés.

Propriété V.5.

1. *Les homothétie-translations sont bijectives.*
2. *Les homothéties-translations préservent les directions : si f est une homothétie-translation, alors pour tout sous-espace affine $F \subset E$, on a $\overrightarrow{f(F)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}$.*
3. *Une homothétie-translation est définie de manière unique par deux points distincts et leurs images.*
4. *$HT(E)$ est un groupe pour la loi de composition. En particulier, la composée de deux homothéties affines est une homothétie ou une translation.*

Remarquons qu'il est naturel d'ajouter les translations aux homothéties. En effet, la composée de deux homothéties affines peut être une translation ; plus précisément, si f et une homothétie affine de rapport λ et g une homothétie affine de rapport $1/\lambda$, alors $g \circ f$ est une translation. Réciproquement, toute translation est composée de deux homothéties affines.

Preuve : Une homothétie affine est bijective car sa partie linéaire est bijective.

Une homothétie affine préserve les directions car sa partie linéaire est une homothétie, et les homothéties préservent les directions.

Une transformation affine est caractérisée par sa partie linéaire et l'image d'un point. De plus, la partie linéaire d'une homothétie affine est de la forme $\lambda \overrightarrow{\mathrm{id}}$, donc est caractérisée par l'image d'un vecteur, donc d'un deuxième point.

Soit $\Psi : f \mapsto \overrightarrow{f}$ le morphisme qui a un automorphisme affine associe sa partie linéaire. Alors $HT(E)$ est par définition $\Psi^{-1}(\{\lambda \overrightarrow{\mathrm{id}},\ \lambda \in \mathbb{R}^*\})$. Or $\{\lambda \overrightarrow{\mathrm{id}},\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$ est un sous-groupe (distingué) de $GL(\overrightarrow{E})$, donc $HT(E)$ est un sous-groupe (distingué) de $GA(E)$. □

Exercice 17. Le groupe des homothéties-translations, contrairement au groupe des homothéties vectorielles ou au groupe des translations, n'est en général pas commutatif : pouvez-vous en donner des exemples ?

Exercice 18. Soient a, b deux points distincts du plan. Donner une condition sur a', b' pour qu'il existe une homothétie h telle que $h(a) = a'$ et $h(b) = b'$. Construire un centre de h dans ce cas.

Exercice 19. (*) Montrer qu'une transformation affine du plan qui préserve trois directions deux à deux distinctes est une homothétie ou une translation.

Propriété V.6.
$HT(E)$ est l'ensemble des applications affines de E qui préservent les directions des droites affines.

Preuve : On sait déjà que les homothéties-translations préservent les directions des sous-espaces affines, donc en particulier des droites affines.

Soit f une transformation affine qui préserve les directions des droites affines. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $\overrightarrow{E}$. Alors la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans $\mathscr{B}$ est diagonale ; soient $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses coefficients diagonaux. Les λ_i sont tous non nuls car f est bijective, donc $\overrightarrow{f}$ aussi. Pour tous $i \neq j$, le vecteur $f(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$ est colinéaire à $(e_i + e_j)$, donc à $\lambda_i(e_i + e_j)$. Par conséquent, $(\lambda_i - \lambda_j)e_j$ est aussi colinéaire à $e_i + e_j$, donc $\lambda_i = \lambda_j$. Ceci étant valable pour tous $i \neq j$, la matrice de $\overrightarrow{f}$ est proportionnelle à la matrice identité, donc f est une homothétie-translation. $\square$

Exercice 20. Expliquez la distinction entre "préserver les directions" et "préserver le parallélisme".

V.3 Espaces affines euclidiens et isométries

Si l'on peut munir un espace vectoriel d'une norme, on peut munir un espace affine d'une distance, en faisant un espace métrique.

Proposition V.7.
Soit E un espace affine et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\overrightarrow{E}$. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) := \|\overrightarrow{xy}\|$ est une distance sur E.

Preuve : La fonction d est positive, symétrique car la norme est symétrique, définie car la norme est définie, et satisfait l'inégalité triangulaire car la norme la satisfait. $\square$

Proposition V.8.
Soit E un espace affine et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\overrightarrow{E}$. Soit $f : E \to E$ une application affine.
Alors f est une isométrie de E si et seulement si $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$.

Preuve : Soient $a, b \in E$. Alors

$$d(f(a), f(b)) = \left\| \overrightarrow{f(a)f(b)} \right\| = \left\| \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{ab} \right\|$$

Donc $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ pour tous $a, b \in E$ si et seulement si $\left\| \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{u} \right\| = \|\overrightarrow{u}\|$ pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, donc si et seulement si $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$. $\square$

Par exemple, en dimension 2, les isométries sont de l'un des trois types suivants :

- ▹ les translations (transformations affines dont la partie linéaire est $\overrightarrow{\mathrm{id}}$) ;
- ▹ les transformations affines dont la partie linéaire est une rotation d'angle non nul. Les valeurs propres d'une rotation d'angle non nul sont différentes de 1, donc une telle transformation a un unique point fixe. Il s'agit donc des rotations autour d'un point.
- ▹ les transformations affines f dont la partie linéaire est une symétrie axiale vectorielle. Cependant, cet ensemble est plus gros que l'ensemble des symétries axiales ! En effet, 1 est valeur propre de multiplicité 1 d'une symétrie axiale du plan. On a donc une dichotomie :
  - ▹ Ou f a un point fixe, auquel cas l'ensemble des points fixes est de dimension 1, donc une droite. Alors f est une *symétrie axiale* (affine), dont l'axe est cette droite.
  - ▹ Ou f n'a pas de point fixe, auquel cas f est une *symétrie glissée.* Nous allons revenir sur ces transformations dans la suite de ce chapitre.

Remarque V.9.

Dans $GL_2(\mathbb{R})$, la composition d'une rotation $\overrightarrow{r}_\theta$ d'angle θ avec une rotation $\overrightarrow{r}_{-\theta}$ d'angle $-\theta$ est l'identité. Par conséquent, en géométrie affine du plan, la composition d'une rotation affine R_1 d'angle θ centrée en P avec une rotation affine R_2 d'angle $-\theta$ centrée en Q est une application affine dont la partie linéaire est l'identité, c'est-à-dire une translation. On peut montrer, plus précisément, qu'il s'agit de la translation de vecteur $\overrightarrow{PR_2(P)}$ (exercice !). En particulier, en prenant $\theta = \pi$, on montre que la composée de deux symétries centrales est translation ; ce point peut aussi se voir comme composition de deux homothéties affines de rapport -1.

De la même façon, la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation.

Dans l'espace, la classification des isométries affines devient plus compliquée, mais fait intervenir par exemple des "rotations glissées".

V.4 Symétries affines et symétries glissées

Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriel supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$. Rappelons que la symétrie linéaire $\overrightarrow{s}$ par rapport à $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est l'unique application linéaire telle que, pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$,

- ▹ $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{F}$;
- ▹ $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{s}(\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{G}$.

Définition V.10.

La symétrie s par rapport à F et parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est l'application de E dans E telle que, pour tout $x \in E$,

1. *le milieu de $[x, s(x)]$ est un point de F,*
2. *$\overrightarrow{xs(x)} \in \overrightarrow{G}$.*

*On appelle **symétrie glissée** une transformation affine dont la partie linéaire est une symétrie.*

Preuve : Soit $\overrightarrow{s}$ la symétrie linéaire sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. Soit $a \in F$. Soit s l'application affine de partie linéaire $\overrightarrow{s}$ et telle que $s(a) = a$. Alors :

- ▹ Soit $x \in E$. Alors $x + 1/2 \cdot \overrightarrow{xs(x)} = a + 1/2 \cdot \overrightarrow{ax} + 1/2 \cdot \overrightarrow{s}(\overrightarrow{ax}) \in a + \overrightarrow{F} = F$, donc le milieu de $(x, s(x))$ appartient à F.

- ▷ Soit $x \in E$. Alors $\overrightarrow{xs(x)} = \overrightarrow{xd} + \overrightarrow{as(x)} = \overrightarrow{xd} + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{ax})$ est dans l'image de $\overrightarrow{\mathrm{id}} - \overrightarrow{s}$, donc dans $\overrightarrow{G}$.

Une telle application existe donc ; montrons qu'elle est unique. Soit t une telle application. Soit $x \in E$. Alors $t(x)$ appartient à l'intersection des sous-espaces affines $x + \overrightarrow{F}$ et $x + \overrightarrow{G}$. Or, les sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ étant supplémentaires, cette intersection existe et est un singleton. Ceci démontre l'unicité de t. En particulier, si t est une telle application, alors t est l'application construite au début de cette démonstration, donc est affine. □

Exemple V.11.

Supposons que E soit le plan euclidien et F une droite affine. Alors, pour tout $x \in E$, notons $s(x)$ le point tel que F soit la médiatrice du segment $[x, s(x)]$. Alors le milieu de $[x, s(x)]$ appartient à F, et la droite $(x, s(x))$ est perpendiculaire à F, c'est-à-dire que le vecteur $\overrightarrow{xs(x)}$ appartient à $\overrightarrow{F}^{\perp}$. Ainsi, s est la symétrie d'axe F parallèlement à $F^{\perp}$, aussi appelée symétrie orthogonale (affine) par rapport à F, ou, dans le cadre d'une droite du plan, symétrie axiale (affine) par rapport à F.

Les projections glissées sont des projections suivies d'une translation dans la direction de l'image :

Proposition V.12.

Soit s une symétrie glissée. Soient $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$ tels que $\overrightarrow{s}$ soit la symétrie vectorielle d'axe $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. Alors il existe ;

- ▷ *un unique sous-espace affine F de direction $\overrightarrow{F}$;*
- ▷ *un unique vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{F}$;*

tels que $s = s_F \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_F$, où s_F est la symétrie d'axe F parallèlement à $\overrightarrow{G}$ et $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{F}$.

De plus, s est une symétrie si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

Preuve : On va utiliser une décomposition propre. Posons $k := \dim(\overrightarrow{F})$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de $\overrightarrow{E}$ dont les k premiers vecteurs forment une base de $\overrightarrow{F}$ et les $n-k$ derniers une base de $\overrightarrow{G}$. Soit $O \in E$.

Travaillons dans le repère $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E. Soit x un point. Notons X_F ses k premières coordonnées et X_G ses $n-k$ dernières coordonnées. Alors la transformation f s'écrit

$$(Y_F, Y_G) = (X_F + B_F, -X_G + B_G).$$

Soit s_F la transformation affine qui envoie $X = (X_F, X_G)$ sur $(X_F, -X_G + B_G)$. C'est la symétrie d'axe le sous-espace affine $F : \{(X_F, X_G) : \ X_G = B_G/2\}$ de direction $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(B_F, 0)$. La translation de vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{F}$ envoie $X = (X_F, X_G)$ sur $(X_F + B_F, X_G)$. Par conséquent, $f = s_F \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_F$.

L'unicité de F vient du fait que F est l'ensemble des points fixes de s, et l'unicité du vecteur $\vec{u}$ vient du fait que $\vec{u} = \overrightarrow{xs(x)}$ pour tout $x \in F$, où F est le sous-espace construit ci-dessus. □

Propriété V.13.

1. *Les symétries sont des symétries glissées.*

2. *Les symétries glissées sont bijectives.*
3. *L'ensemble des points fixes de la symétrie par rapport à F parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est égal à F.*
4. *Une application affine s est une symétrie si et seulement si s est une symétrie glissée qui admet un point fixe.*
5. *Si une application affine $s : E \to E$ vérifie $s \circ s = s$, alors c'est une symétrie.*

Preuve : Le premier point suit directement de la démonstration précédente, et le deuxième point vient du fait que la partie linéaire d'une symétrie glissée est une symétrie, donc est bijective. Passons au troisième point. Soit $a \in F$. Alors s est l'application affine telle que $s(a) = a$ et $\overrightarrow{s}$ est la symétrie par rapport à $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. Mais alors, pour tout $b \in E$,

$$p(b) = b \iff \overrightarrow{s}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ab} \iff \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F} \iff b \in F,$$

donc F est l'ensemble des points fixes de s.

Si s est une symétrie affine, alors elle a au moins un point fixe par ce qui précède, et sa partie linéaire est une symétrie vectorielle. Réciproquement, par construction, si s a un point fixe et si sa partie linéaire est une symétrie vectorielle, alors s est une symétrie affine.

Soit s une application affine telle que $s \circ s = \mathrm{id}$. Alors $\overrightarrow{s} \circ \overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}$, donc $\overrightarrow{s}$ est une symétrie vectorielle. De plus, soit $a \in E$ et m le milieu de a et $s(a)$. Alors, comme s est affine, s préserve les milieux, donc $s(m)$ est le milieu de $s(a)$ et de $s(s(a)) = a$, donc $s(m) = m$ est un point fixe de s. Donc, par le point précédent, s est une symétrie affine. □

En particulier, il y a des symétries glissées qui ne sont pas des symétries, comme par exemple les translations.

Exercice 21. Construisez d'autres exemples de symétries glissées qui ne sont pas des symétries.

V.5 Projections affines et projections glissées

Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriel supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$. Rappelons que la projection linéaire $\overrightarrow{p}$ sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est l'unique application linéaire telle que, pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$,

- ▷ $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{F}$;
- ▷ $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{p}(\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{G}$.

Définition V.14.
*Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriel supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$. Soit F un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F}$. On appelle **projection sur F parallèlement à $\overrightarrow{G}$** l'application qui à tout point x dans E associe le point $p(x)$ tel que*

- ▷ *$p(x) \in F$;*
- ▷ *$\overrightarrow{xp(x)} \in \overrightarrow{G}$.*

De plus, cette application est une transformation affine.

*On appelle **projection glissée** une transformation affine dont la partie linéaire est une projection.*

Preuve : Soit $\overrightarrow{p}$ la projection linéaire sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. Soit $a \in F$. Soit p l'application affine de partie linéaire $\overrightarrow{p}$ et telle que $p(a) = a$. Alors :

- ▷ Soit $x \in E$. Alors $p(x) = p(a) + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{ax}) \in a + \overrightarrow{F} = F$, donc $p(x) \in F$.
- ▷ Soit $x \in E$. Alors $\overrightarrow{xp(x)} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{ap(x)} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{ax})$ est dans l'image de $\overrightarrow{\mathrm{id}} - \overrightarrow{p}$, donc dans $\overrightarrow{G}$.

Une telle application existe donc ; montrons qu'elle est unique. Soit q une telle application. Soit $x \in E$. Alors $q(x)$ appartient à l'intersection des sous-espaces affines F et $x + \overrightarrow{G}$. Or, les sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ étant supplémentaires, cette intersection existe et est un singleton. Ceci démontre l'unicité de q. En particulier, si q est une telle application, alors q est l'application construite au début de cette démonstration, donc est affine. □

Exemple V.15.

Supposons que E soit muni d'une structure euclidienne, c'est-à-dire que l'on peut mesure dans E les distances à l'aide d'un produit scalaire sur $\overrightarrow{E}$. Soit F un sous-espace affine de E. Alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique point $p(x) \in F$ qui soit le plus proche de x :

$$d(x, p(x)) = \left\| \overrightarrow{xp(x)} \right\| = \inf_{y \in F} d(x, y).$$

Alors p est la projection sur F parallèlement à $\overrightarrow{F}^{\perp}$, aussi appelée projection orthogonale sur F.

Les projections glissées sont des projections suivies d'une translation dans la direction de l'image :

Proposition V.16.

Soit p une projection glissée. Soient $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$ tels que $\overrightarrow{p}$ soit la projection vectorielle sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. Alors il existe ;

- ▷ *un unique sous-espace affine F de direction $\overrightarrow{F}$;*
- ▷ *un unique vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{F}$;*

tels que $p = p_F \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ p_F$, où p_F est la projection sur F parallèlement à $\overrightarrow{G}$ et $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$.

De plus, p est une projection si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

Exercice 22. Adaptez la démonstration utilisée dans le cas des symétries glissées.

Propriété V.17.

1. *Les projections sont des projections glissées.*
2. *L'ensemble des points fixes de la projection sur F parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est égal à F.*
3. *Une application affine p est une projection si et seulement si elle admet un point fixe et $\overrightarrow{p}$ est une projection vectorielle.*
4. *Une application affine $p : E \to E$ vérifie $p \circ p = p$ si et seulement si c'est une projection.*

Preuve : Le premier point suit directement de la démonstration précédente. Passons au deuxième point. Soit $a \in F$. Alors p est l'application affine telle que $p(a) = a$ et $\overrightarrow{p}$ est la projection sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. Mais alors, pour tout $b \in E$,

$$p(b) = b \iff \overrightarrow{p}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ab} \iff \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F} \iff b \in F,$$

donc F est l'ensemble des points fixes de p.

Si p est une projection affine, alors elle a au moins un point fixe par ce qui précède, et sa partie linéaire est une projection vectorielle. Réciproquement, par construction, si p a un point fixe et si sa partie linéaire est une projection vectorielle, alors p est une projection.

Soit p une application affine telle que $p \circ p = p$. Alors $\overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}$, donc $\overrightarrow{p}$ est une projection vectorielle. De plus, soit $a \in E$. Alors $p(p(a)) = p(a)$, donc $p(a)$ est un point fixe de p. Donc, par le point précédent, p est une projection. □

En particulier, il y a des projections glissées qui ne sont pas des projections, comme par exemple les translations. Si p est une projection glissée qui n'est pas une projection, alors $\overrightarrow{p}^2 = \overrightarrow{p}$ mais $p^2 \neq p$.

V.6 Un sous-groupe cristallographique

Composition d'applications affines

Une application affines est caractérisée par sa partie linéaire et l'image d'un point. Pour décrire une composée d'applications affines, on eut procéder en deux temps :

- ▷ On décrit sa partie linéaire, composée des parties linéaires ;
- ▷ On calcule l'image d'un point.

Exercice 23. Utilisez cette méthode pour décrire intégralement :

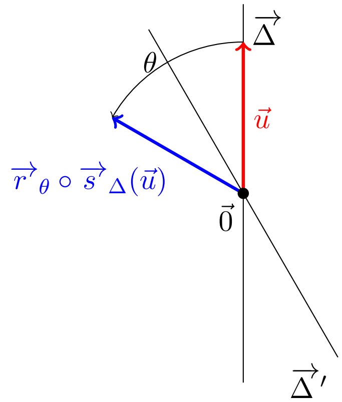
- ▷ La composée de deux rotations R_{θ_1}, R_{θ_2} d'angles θ_1, θ_2 tels que θ_1, θ_2, $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ modulo 2π (auquel cas R_{θ_1}, R_{θ_2} et $R_{\theta_1+\theta_2}$ ont toutes un unique point fixe) ;
- ▷ La composée de deux symétries axiales (affines) d'axes parallèles ;
- ▷ La composée de deux symétries axiales (affines) d'axes sécants.

Nous allons développer l'exemple plus délicat de la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation. Dans le plan euclidien, donnons-nous :

- ▷ Une droite verticale Δ ;
- ▷ Un point $C \notin \Delta$.

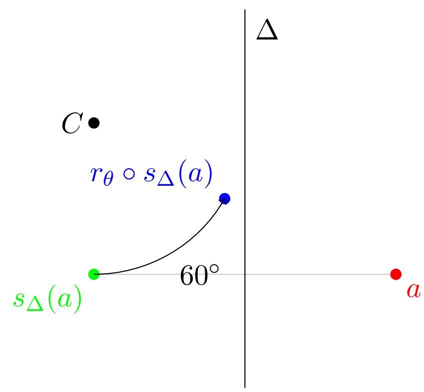
Soit s_Δ la symétrie axiale d'axe Δ, et r_θ la rotation de centre C et d'angle $\theta = 60°$. Quelle est la transformation $r_\theta \circ s_\Delta$?

Commençons par décrire $\overrightarrow{r_\theta \circ s_\Delta} = \overrightarrow{r}_\theta \circ \overrightarrow{s}_\Delta$.



$\overrightarrow{r}_\theta \circ \overrightarrow{s}_\Delta$ est une composition d'isométries vectorielle du plan, donc est une isométrie vectorielle du plan. De plus, $\overrightarrow{s}_\Delta$ renverse l'orientation et $\overrightarrow{r}_\theta$ préserve l'orientation, donc $\overrightarrow{r}_\theta \circ \overrightarrow{s}_\Delta$ renverse l'orientation : c'est une symétrie axiale. Enfin, elle envoie le vecteur rouge ci-dessus vers le vecteur bleu. C'est donc la symétrie axiale d'axe $\overrightarrow{\Delta}'$ formant un angle de 30° avec la verticale.

La partie linéaire de $r_\theta \circ s_\Delta$ est une symétrie axiale vectorielle, donc $r_\theta \circ s_\Delta$ est une symétrie glissée dont l'axe forme un angle de 30° par rapport à la verticale. Il reste à déterminer cette axe, ainsi que la translation opérée le long de l'axe. Cela peut se faire à l'aide de l'image d'un seul point.

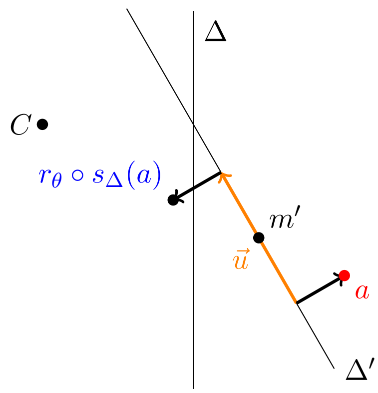


Pour cela, on utilisera le résultat (admis) :

Propriété V.18.
Toute symétrie glissée est la composition d'une symétrie axiale et d'une translation le long de l'axe de cette symétrie axiale. Cette décomposition est unique. En particulier, l'axe de la symétrie axiale est invariant pour la symétrie glissée.

Autrement dit, il existe une symétrie axiale s par rapport à une droite Δ' faisant un angle de 30° par rapport à la verticale, et une translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\Delta}'$, telles que $r_\theta \circ s_\Delta = t_{\vec{u}} \circ s$.

Il reste à déterminer Δ' et $\vec{u}$. Soit $a \in E$. Alors le milieu m de $[a, s(a)]$ appartient à Δ'. De plus, le milieu m' de $[a, t_{\vec{u}} \circ s(a)]$ est $t_{\vec{u}/2}(m)$, donc appartient lui aussi à Δ'. Par conséquent, la droite Δ' passe par le milieu m' de $[a, t_{\vec{u}} \circ s(a)] = [a, r_\theta \circ s_\Delta(a)]$.

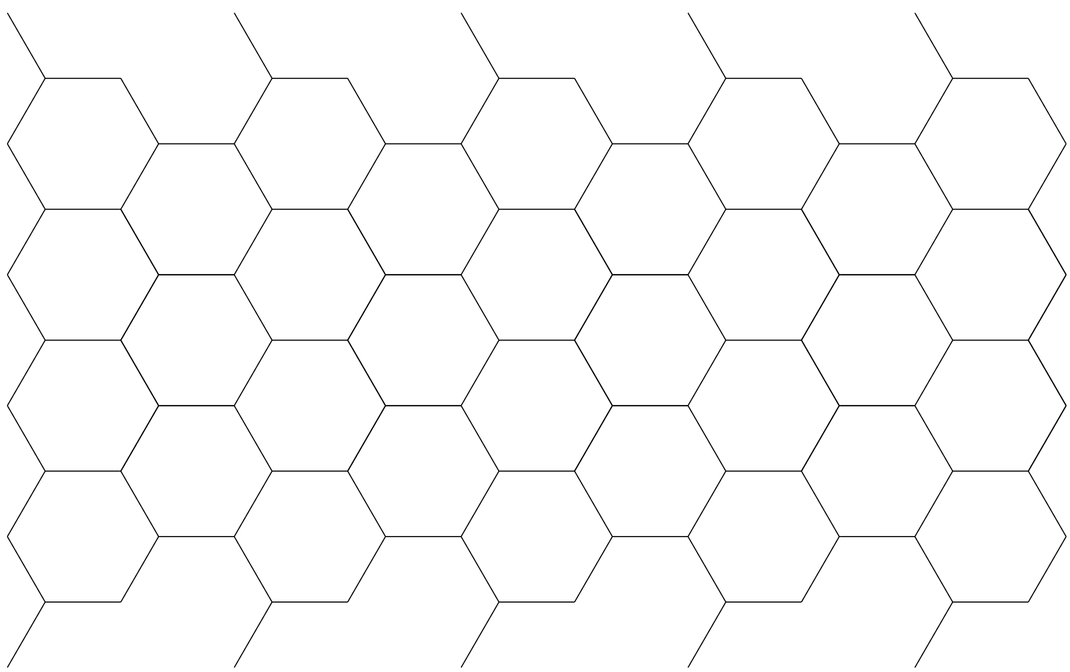


Remarque V.19.

On remarque a posteriori que le projeté orthogonal de C sur Δ appartientà la fois à Δ et à Δ', et que son image appartient aussi à Δ'. Cette propriété est spécique à l'angle utilisé ($60°$). On aurait pu utiliser ce point au lieu de a pour simplifier la construction, mais ce choix est beaucoup plus évident a posteriori qu'a priori.

Un pavage

Considérons un pavage $\mathcal{P}$ du plan par des hexagones :



Soit Γ l'ensemble des isométries affine qui préservent ce pavage. C'est un sous-groupe de $GA(E)$. Il contient notamment :

- ▷ Si C est le centre d'un hexagone, 6 symétries axiales passant par des droites passant par C et formant entre elles des angles multiples de $30°$, ainsi que 6 rotations d'angles multiples de $60°$.

- ▷ Si C est le milieu d'un segment, la symétrie centrale de centre C.
- ▷ Si C est un sommet d'un hexagone, 3 symétries axiales passant par des droites passant par C et formant entre elles des angles multiples de $60°$, ainsi que 3 rotations d'angles multiples de $120°$.
- ▷ Les translations envoyant le centre d'un hexagone vers le centre d'un hexagone.

Remarque V.20.

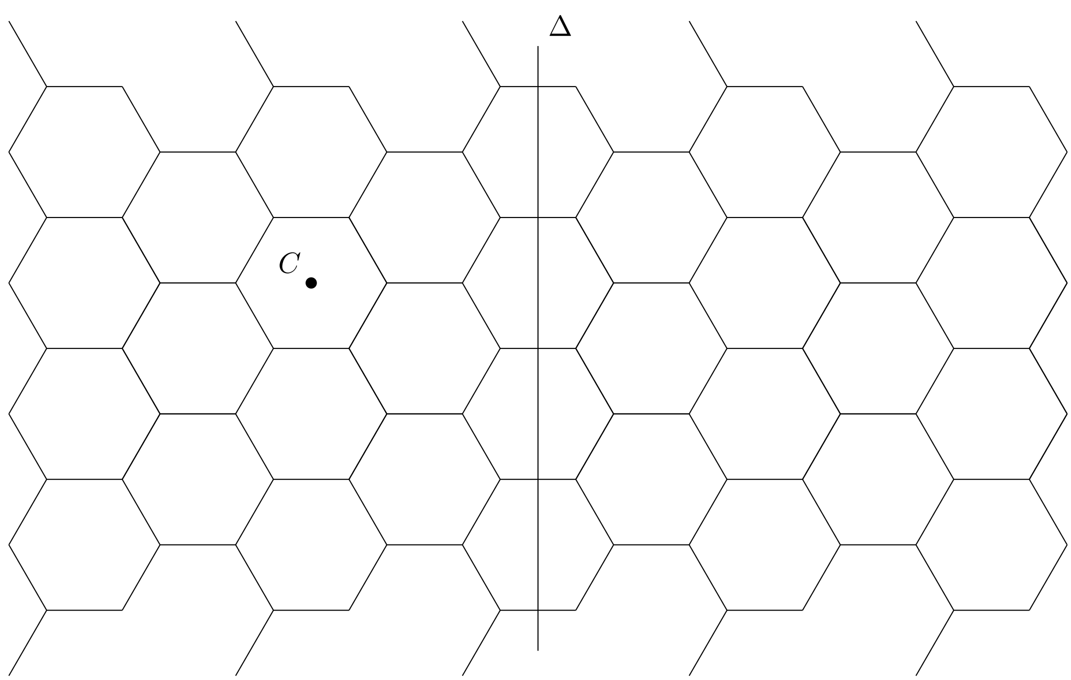
Soit C le centre d'une cellule. Alors le sous-groupe $\{f \in \Gamma \ : \ f(C) = C\}$ est isomorphe au groupe des isométries d'un hexagone régulier, c'est-à-dire au groupe diédral D_{12}.

Soit C un sommet d'un hexagone. Alors le sous-groupe $\{f \in \Gamma \ : \ f(C) = C\}$ est isomorphe au groupe des isométries d'un triangle équilatéral, c'est-à-dire au groupe diédral D_6.

Remarque V.21.

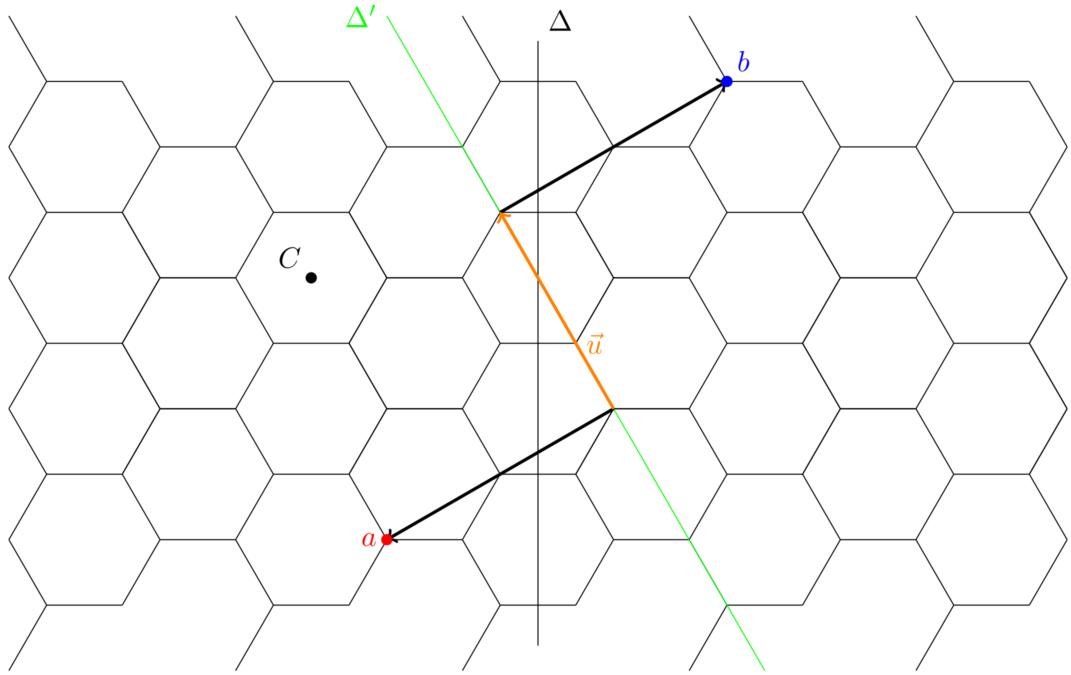
Si $f \in \Gamma$, alors $\overrightarrow{f} \in D_{12}$. Soit C le centre d'une cellule. Alors toute transformation f peut s'écrire de façon unique comme composée d'une transformation dans $\{f \in \Gamma \ : \ f(C) = C\} \sim D_{12}$ et d'une translation envoyant C vers le centre d'une autre cellule. Cette décomposition permet de montrer que Γ est isomorphe à un ***produit semi-direct*** *entre D_{12} et $\mathbb{Z}^2$, ce qui permet d'écrire efficacement à la fois les éléments de Γ est leur loi de composition.*

Les pavages sont étudiés au collège ; à ce niveau, il est possible de déterminer l'image d'un cellule par une symétrie axiale ou par une rotation, ainsi que de composer de telles transformations. Les outiles vus précédemment permettent une description plus systématique des composées de transformations. Par exemple, soit r la rotation de centre C et d'angle $60°$, et s la symétrie axiale d'axe Δ, où C et Δ sont comme ci-dessous :



Exercice 24. Choisissez une cellule, et construisez les images de cette cellule par s, puis par $r \circ s$.

Par ce qui précède, $r \circ s$ est la symétrie glissée, composée de la symétrie axiale d'axe Δ' puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ ci-dessous :



On peut vérifier que b est bien l'image de a par $r \circ s$.

Cette construction peut paraître laborieuse. Ceci dit :

▷ Si la description complète de la transformation $r \circ s$ est longue, la détermination de sa nature (une symétrie glissée) est très rapide, et la direction de son axe de symétrie est elle aussi assez rapide.

▷ La méthode ci-dessus n'est pas beaucoup plus longue quand on compose plus de transformations, auquel cas la description finale (une symétrie glissée, une rotation ou une translation) est beaucoup plus simple qu'une composée de multiples transformations.

▷ Dans le cas d'un groupe d'isométries préservant un pavage, la partie linéaire appartient à un groupe diédral. On peut alors utiliser un codage symbolique pour simplifier l'étude de la partie linéaire.