MEU302-Algèbre — Université Paris Saclay
L3MATH — 2025-2026

Examen

Le 16 décembre 2025
Durée : 3 heures

La note tiendra compte du soin et de la qualité de l'expression écrite.
Les réponses non argumentées ne rapportent aucun point.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Un barême approximatif est indiqué.

Exercice 1. (1,5 point)
Démontrez que l'image d'un sous-espace affine par une homothétie de rapport 2 est un sous-espace affine parallèle. *Un soin particulier devra être apporté à la rédaction.*

Exercice 2. (5 points)
Répondez par vrai ou faux et argumentez à l'aide d'une démonstration ou un contre-exemple.

1. Dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, soient s la symétrie axiale d'axe $y = x$ et r la rotation d'angle $-\pi/2$ (dans le sens trigonométrique). Alors $s \circ r$ est la symétrie axiale d'axe $x = 0$.
2. Il existe deux symétries affines dont la composée est une translation.
3. Une projection glissée a toujours un point fixe.
4. Soient q, q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$. Si q et q' sont de signature $(1, 1)$, alors $q + q'$ est de signature $(1, 1)$.
5. La conique $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 1\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. (2 points)
On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Soient $\vec{v}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{v}_2 = (2, -3, 0)$ et $\vec{v}_3 = (-2, 1, 1)$.

1. Soit P le plan passant par $a = (3, 1, -1)$ et dirigé par $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. En expliquant votre démarche, donnez une représentation cartésienne de P.
2. Soit Δ la droite passant par $b = (4, 3, -2)$ et dirigée par $\vec{v}_3$. En expliquant votre démarche, donnez une représentation cartésienne de Δ.

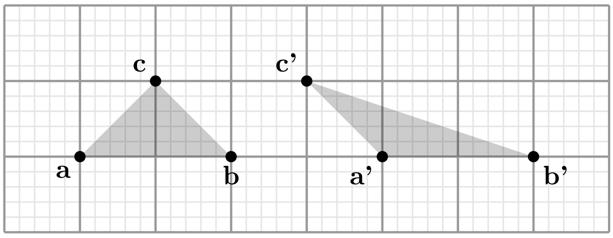
Exercice 4. (1,5 points)
Soient E un espace affine et $f : E \to E$ une transformation affine. Montrez que si f est surjective, alors sa partie linéaire $\vec{f}$ est surjective.

Exercice 5. (1 points)
On se donne la forme bilinéaire $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = -u_1v_1 + u_1v_2 - 2u_2v_1 + 6u_2v_2$ définie pour $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

1. Écrivez φ comme somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique.
2. Explicitez la forme quadratique associée à φ.

Questions suivantes au verso.

Exercice 6. (4 points)
On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$.



1. Pourquoi existe-t-il une unique application affine f qui envoie les points a, b, c sur les points a', b', c' dans cet ordre ?
2. En vous aidant d'un dessin, montrez que $\vec{f}$ a pour matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{ab}, \vec{ac})$.
3. Dans ce qui suit, les coordonnées de points sont prises dans le repère (a, b, c). Soit x un point de coordonnées X. Soit $y = f(x)$ son image par f, de coordonnées Y. Montrez que $Y = AX + B$, où B est à expliciter.
4. Quel est l'ensemble des points fixes de f ?
5. Calculez $\mathrm{Ker}(A - I)$. Déduisez-en que, si t est une translation, alors l'ensemble des points fixes de $t \circ f$ est ou bien vide, ou bien une droite affine.

Exercice 7. (5 points)
Soit $q(x, y) = x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ q(x, y) = 1\}$. On appelle A la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Explicitez A.
2. Calculez $A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, puis déduisez-en les valeurs propres de A et une base orthonormée de vecteurs propres.
3. Quelle est la signature de q ? Quelle est la nature de $\mathcal{C}$?
4. Dessinez $\mathcal{C}$, en prenant soin à respecter les longueurs et les angles.

Soit $\mathbb{S}_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité.

5. Montrez que $\mathbb{S}_1 \cap \mathcal{C} = \mathbb{S}_1 \cap \mathcal{C}_0$, où $\mathcal{C}_0$ est le cône isotrope de la forme quadratique $q'(x, y) = \sqrt{3}xy + y^2$.
6. Dessinez $\mathbb{S}_1$ et $\mathcal{C}_0$ sur le même dessin que précédemment.
7. Explicitez $\mathbb{S}_1 \cap \mathcal{C}$.